

SISTEMES D' EQUACIONS LINEALS.

Recordeu:

Un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites és un conjunt d'equacions de primer grau que es compleixen a la vegada.

L'expressió general és
$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ d \cdot x + e \cdot y = f \end{cases}$$

Un sistema equacions lineals pot tenir solució o no. Si en té solució l'anomenem sistema compatible. En aquest cas pot tenir una solució i direm que és compatible determinat, o infinites solucions i direm que és compatible indeterminat. Si no té solució direm que és un sistema incompatible.

Un sistema d'equacions lineals es pot resoldre algebraicament per tres mètodes: Igualació, substitució i reducció.

Un sistema d'equacions lineals es pot resoldre gràficament. Cadascuna de les equacions, $y = m \cdot x + n$, representa una recta en el pla. Si el sistema té una solució les dues rectes es tallen en un punt que és la solució del sistema (x, y) . Si són rectes coincidents el sistema té infinites solucions, els infinits punts de la recta. I si no té solució tindrem dues rectes paral·leles. Dos sistemes són equivalents si tenen el mateix conjunt de solucions.

Exercicis d'autoaprenentatge.

1. Resoleu gràficament el següent sistema:
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$$

Resoldrem gràficament cadascuna de les equacions.

Aïllarem y de les dues equacions a fi de deixar-les de la forma $y = a \cdot x + b$

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 - 2x \\ 2y = 8 + x \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 - 2x \\ y = \frac{8+x}{2} \end{cases}$$

La primera equació és la recta $y = -2x - 1$.

Dibuixem-la donant-li valors a la x per calcular la seua y corresponent:

x	-1	1
y	1	-3

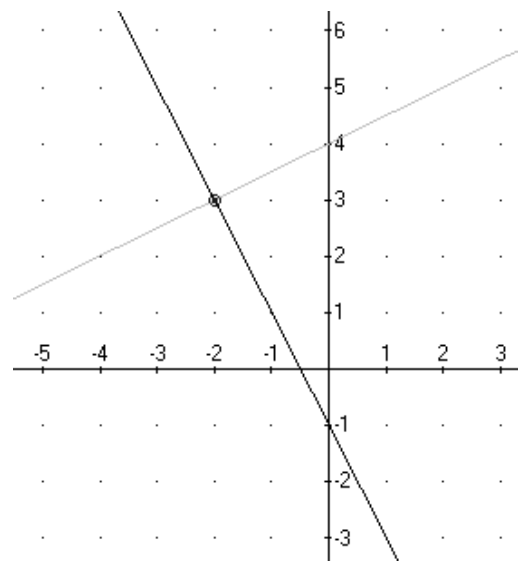
Els punts $(-1, 1)$, $(1, -3)$ determinen la recta

Anàlogament dibuixem la recta $y = \frac{x+8}{2}$

x	0	2
y	4	5

Els punts $(0, 4)$, $(2, 5)$ determinen la recta. La solució és

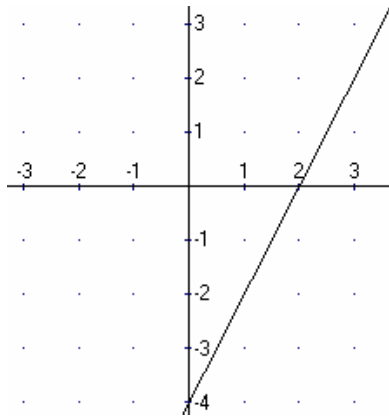
el punt de intersecció de les dues rectes: $(-2, 3)$. Es a dir
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$



Nota un sistema lineal de dues incògnites té solució única (compatible determinat) si les rectes es tallen en un punt. Té infinites solucions (compatible indeterminat) si són la mateixa recta. El sistema no té solució (incompatible) si són paral·leles.

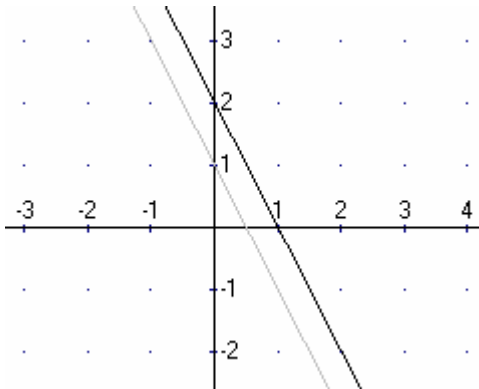
Considerem els següents sistemes, amb les seues solucions gràfiques:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{array} \right\}$$



Sistema compatible indeterminat

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{array} \right\}$$



Sistema incompatible.

2. Resoleu el següent sistema pel mètode de igualació:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{array} \right\}$$

Aïllem en cadascuna de les equacions la mateixa incògnita. Després igualem les dues equacions. Aïllem la incògnita y de les dues equacions:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y = 2 - x \\ 2y = x - 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y = 2 - x \\ y = \frac{x - 5}{2} \end{array} \right\}$$

Igualem les dues incògnites:

$$\left. \begin{array}{l} 2 - x = \frac{x - 5}{2} \\ y = 2 - x \end{array} \right\} \text{ (noteu que sempre mantenim dues equacions)}$$

Resolem la primera equació amb la incògnita x

$$\left. \begin{array}{l} 4 - 2x = x - 5 \\ y = 2 - x \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -2x - x = -5 - 4 \\ y = 2 - x \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -3x = -9 \\ y = 2 - x \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 - x \end{array} \right\}$$

Substituïm el valor de la incògnita x en la segona equació:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 - 3 \end{array} \right\} \text{ La solució del sistema és } \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array} \right\}$$

Comprovació: vegem que els valors anteriors transformen les dues equacions inicials en identitats:

$$\left. \begin{array}{l} 3 + (-1) = 2 \\ 3 - 2(-1) = 5 \end{array} \right\}$$

3. Resoleu el següent sistema pel mètode de substitució:
$$\begin{cases} 5x - y = 0 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

D'una equació aïllem una incògnita i substituïm el seu valor en l'altra equació.
De la primera equació aïllem la incògnita y:

$$\begin{cases} 5x - y = 0 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5x \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

Substituïm el valor de la incògnita y en la segona equació:

$$\begin{cases} y = 5x \\ 3x + 5x = 8 \end{cases}$$

Resolem la segona equació amb la incògnita x:

$$\begin{cases} y = 5x \\ 8x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5x \\ x = 1 \end{cases}$$

Substituïm el valor de la incògnita x en la primera equació:

$$\begin{cases} y = 5 \cdot 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{la solució del sistema és: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Comprovació:

$$\begin{cases} 5 \cdot 1 - 5 = 0 \\ 3 \cdot 1 + 5 = 8 \end{cases}$$

4. Resoleu el següent sistema pel mètode de reducció:
$$\begin{cases} 2x = -10 - 6y \\ x - 3y = 7 \end{cases}$$

La mateixa incògnita de les dues equacions ha de tenir els coeficients oposats.
Després sumarem les equacions. Escrivim el sistema anterior en forma general:

$$\begin{cases} 2x + 6y = -10 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$$

Volem reduir la incògnita y. Multipliquem la segona equació per 2 (d'aquesta forma els seus coeficients seran oposats).

$$\begin{cases} 2x + 6y = -10 \\ 2 \cdot (x - 3y) = 2 \cdot 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 6y = -10 \\ 2x - 6y = 14 \end{cases}$$

Sumem les dues equacions:

$$\begin{cases} 4x + 0y = 4 \\ 2x + 6y = -10 \end{cases} \quad \text{(noteu que sempre mantenim dues equacions)} \quad \begin{cases} 4x = 4 \\ 2x + 6y = -10 \end{cases}$$

Resolem la primera equació amb la incògnita x:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + 6y = -10 \end{cases}$$

Substituïm el valor de la incògnita x en la segona equació:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2 \cdot 1 + 6y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ 6y = -12 \end{cases} \quad \text{La solució del sistema és: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Comprovació:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 = -10 - 6(-2) \\ 1 - 3(-2) = 7 \end{cases}$$

Exercicis proposats.

1. Resoleu els següents sistemes d'equacions lineals, emprant el mètode més adient:

a)
$$\begin{cases} 5x - y = 10 \\ 3x + 2y = -7 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ 3(x - 1) + 2y = 5(y - 2x) + 11 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 0.3x + 0.2y = 1 \\ 0.1x - 0.2y = -0.3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3(x - 1) - 5y = 1 - 3x \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} 5x - 8y = -5 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -9 \end{cases}$$

2. Resoleu gràficament el següent sistema d'equacions. Expliqueu el resultat obtingut.

a)
$$\begin{cases} 9x + 8y = 35 \\ 5x - 6y = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x - 8y = -5 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -9 \end{cases}$$

Problemes

1. Tinc 36 bitllets, uns de 20€ i els altres de 50€. Si tinc un total de 1290€. Quants bitllets tinc de cada classe?
2. En un corral hi ha gallines i conills, en total 28 animals. Sumant tots els becs i les potes tenim 89. Quants hi ha de cada classe?
3. Joan li diu al seu germà Carles: "Si em dones 200 € tindrem la mateixa quantitat". I Carles li respon: " Si em dones tu a mi 200 € jo tindrè el doble que tu". Quants diners té cadascun?.
4. Trobeu dos nombres la suma dels quals siga 33 i la diferència siga 5.
5. La suma de les dues xifres d'un nombre és 12. Si invertim l'ordre de les seues xifres, el nombre augmenta en 18 unitats. Quin és el nombre?
6. Al invertir l'ordre de las dues xifres d'un nombre, el nombre queda disminuït en 36 unitats. Sabem que aquestes xifres sumen 12. Calculeu el nombre.
7. Un pare té sis vegades l'edat del seu fill, i la suma de les seues edats és 91 anys. Quants anys té cadascun d'ells?
8. Tres jugadors guanyen 310 €. Si el segon guanya 30 € menys que el primer, i el tercer el doble que el segon, quant va guanyar cadascun?
9. Descomponeu el nombre 200 en dues parts que siguen a la relació de 2 a 3
10. Una persona gasta la meitat del seu jornal diari en alimentar-se i la tercera part en altres despeses. Quan passen 40 dies ha estalviat 202€ Quin és el seu jornal?