

EQUACIONS DE SEGON GRAU

Recordeu

Una equació de segon grau és de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, on $a \neq 0$.

Les solucions de l'equació de segon grau són:

$$\begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Anomenem discriminant i el representem per: $\Delta = b^2 - 4ac$.

El nombre de solucions de l'equació depèn del signe del discriminant:

- [Si $\Delta > 0$ l'equació té dues solucions reals diferents (existeix l'arrel quadrada)
- [Si $\Delta = 0$ l'equació té una solució real doble (l'arrel quadrada és zero)
- [Si $\Delta < 0$ l'equació no té solució real (l'arrel quadrada no existeix)

Exercicis d'autoaprenentatge

Resoleu les següents equacions:

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $x^2 - 4x = 0$ c) $2x^2 - 18 = 0$

SOLUCIONS:

a) L'equació $3x^2 - 4x + 1 = 0$ té tots els coeficients diferents de zero. Per resoldre-la apliquem la fórmula:

$a = 3, b = -4, c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x = \frac{4+2}{6} = 1 \\ x = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Les solucions són $x = 1$, $x = \frac{1}{3}$

Comprovació:

Si $x = 1$, $3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0$

Si $x = \frac{1}{3}$, $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 1 = 0$

b) Una equació de segon grau amb una incògnita és incompleta si els coeficients b o c són zero.

L'equació $x^2 - 4x = 0$ no té terme independent, $c = 0$.

Per resoldre-la traiem la incògnita x factor comú:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0$$

Un producte és zero si un dels seus factors és zero.

Aleshores,

$x = 0$, o bé $x - 4 = 0$

Resolent la segona equació $x = 4$. Per tant, l'equació té dues solucions $\boxed{x=0}$ i $\boxed{x=4}$

Comprovació:

$$\text{Si } x=0, \quad 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Si } x=4, \quad 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$$

c) L'equació $2x^2 - 18 = 0$ és incompleta. No té terme de grau primer, $b = 0$. Aillem x^2 després farem l'arrel quadrada:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \quad x^2 = 9$$

Traient l'arrel quadrada:

$$x = \pm\sqrt{9} \quad \text{Les solucions de l'equació són } \boxed{x=3}, \quad \boxed{x=-3}$$

Comprovació:

$$\text{Si } x=3, \quad 2 \cdot 3^2 - 18 = 0$$

$$\text{Si } x=-3, \quad 2 \cdot (-3)^2 - 18 = 0$$

Les equacions b) i c) s'haurien pogut resoldre mitjançant la fórmula.

Recordeu

Una equació biquadrada és una equació de quart grau de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, els coeficients de tercer i primer grau són zero.

Per resoldre l'equació farem el canvi de variable $z = x^2$

2. Resoleu l'equació biquadrada $x^4 - 13x^2 - 48 = 0$

Fem el canvi $z = x^2$, aleshores $z^2 = x^4$

L'equació es transformaria:

$$z^2 - 13z - 48 = 0$$

Resolem l'equació:

$$a = 1, b = -13, c = -48$$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 192}}{2} = \frac{13 \pm 19}{2} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{32}{2} = 16 \\ z = \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right.$$

Defem el canvi:

$$\text{Si } z = 16 \Rightarrow x^2 = 16, \text{ resolent l'equació: } x = \pm 4$$

$$\text{Si } z = -3 \Rightarrow x^2 = -3, \text{ aquesta equació no té solució.}$$

Per tant, les solucions de l'equació són $\boxed{x=4}$, $\boxed{x=-4}$

Comprovació:

$$\text{Si } x=4, \quad 4^4 - 13 \cdot 4^2 - 48 = 0$$

$$\text{Si } x=-4 \quad (-4)^4 - 13 \cdot (-4)^2 - 48 = 0$$

3. Calculeu el valor de g perquè l'equació $4x^2 - 9x + g = 0$ tinga una solució doble.

SOLUCIÓ:

Perquè una equació de segon grau tinga solució doble, hem d'exigir que el discriminant siga zero

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

En l'equació $a = 4$, $b = -9$, $c = g$

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot g = 0 \quad 81 - 16g = 0$$

Resolent l'equació anterior, $g = \frac{81}{16}$

Exercicis proposats:

1. Resoleu les següents equacions de segon grau:

a) $x^2 - 12x = 0$

b) $2x^2 - 288 = 0$

c) $x^2 - 2x - 8 = 0$

d) $7x^2 - 20x - 3 = 0$

e) $x(x-1) + x(x-3) = 48$

f) $(x-1)^2 - (x+3)^2 - x^2 = 7$

g) $4x^2 - x + 2 = 0$

h) $x^2 - 10x + 25 = 0$

i) $3x^2 = -343$

j) $7x^2 + 26 = x^2 + 80$

k) $3(x+1) - x(2x-1) = 4x-1$

l) $x^2 - 50 - 6x = 9x$

m) $5x^2 = 6x + 1$

n) $(x-1)^2 = 25$

o) $3(x-1)(x+2) = 6x$

2. Resoleu les següents equacions biquadrades:

a) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

b) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

c) $x^2 + \frac{125}{x^2} = 30$

d) $x^2 + \frac{21}{x^2} = 10$

e) $x^4 + 6x^2 = 48$

f) $x^2(x^2 - 5) = -4$

g) $x^4 + 100 = 20x^2$

h) $-36 = x^2(5 - x^2)$

3. Resoleu les equacions següents:

a) $\frac{x-3}{x-1} + 2x - 1 = 5 + 2x$

b) $5x - \frac{10}{x+5} = \frac{4x^2 + 22x}{x+5}$

c) $\frac{2x^2 - x - 7}{x^2 - 6x - 1} = 1$

d) $\frac{3x+14}{2x} = \frac{9x+2}{4}$

e) $\frac{5x+4}{x^2-1} = \frac{7}{3}$

f) $\frac{x+3}{x} - \frac{2}{x^2} = 2$

4. Calculeu el valor de a que fa que l'equació $5x^2 - 6x + a = 0$ tinga una arrel doble.

5. Escriviu una equació de segon grau que tinga per solucions 2 i $\frac{5}{3}$.

6. Escriviu una equació de segon grau que tinga com a solució única $x = -3$.

Problemes

1. Calculeu un nombre de forma que si li sumem la meitat del seu quadrat el resultat siga 12.
2. Calculeu dos nombres de forma que la seua suma siga 32 i que la suma dels seus quadrats siga 584.
3. Les mesures dels costats d'un triangle rectangle són tres nombres parells consecutius. Trobeu les longituds dels costats.
4. Determineu dos nombres la diferència dels quals siga 5 i el producte d'ambdós siga 374.
5. Determineu dos nombres el producte dels quals siga 24 i la suma dels seus quadrats siga 52.
6. El perímetre d'un rectangle és 84 m i la diagonal mesura 30 m. Determineu l'àrea del rectangle.
7. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 25 m i la suma de les longituds dels catets és 35 m. Determineu la mesura dels catets.
8. Determineu dos nombres consecutius, la suma dels quadrats dels quals siga 313.
9. Determineu dos nombres que multiplicats donen 504 i el seu quocient és $\frac{2}{7}$.
10. Determineu el perímetre d'un quadrat sabent que l'àrea és de 729 m^2 .
11. En un triangle la base amida 4 cm més que l'altura. Sabent que l'àrea és de 96 cm^2 , quants cm amiden la base i l'altura.
12. La suma dels quadrats de tres nombres naturals consecutius és 194. Quins són aquests nombres?
13. Determineu el valor x.

