Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Potències i Radicals

Potències amb exponent natural

Siga $a \in R\sim\{0\}$ $n \in N$ Definim $a^n = a \cdot \ldots\ldots\overset{(n}{}\ldots\ldots \cdot a$

Exemple: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

Propietats:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 2) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

3) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ 4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ Per conveni: 6) $a^0 = 1$

Potències amb exponent negatiu

Siga $a \in R\sim 0$ $n \in N$. Definim $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemple: $3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$.

Propietats:

Siga $a \in R\sim 0$ $n, m \in Z$, s'acompleixen les mateixes propietats (1), (2), (3), (4), (5).

Radical

Definim arrel n-ésima del valor a $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$.

El valor n s'anomena índex. El valor a s'anomena radicand.

Si l'índex és 2 l'arrel s'anomena arrel quadrada i es representa per $\sqrt{\ }$.

Exemple:

$\sqrt{16} = 4$ perquè $4^2 = 16$.

$\sqrt[5]{32} = 2$ perquè $2^5 = 32$.

$\sqrt[3]{-125} = -5$ perquè $(-5)^3 = -125$.

Nombre d'arrels d'un radicand:

Si el radicand és positiu i l'índex parell, existeixen dues solucions reals oposades:
Si el radicand és negatiu i l'índex parell, no existeix cap arrel real.
Exemple:

$\sqrt{25} = \pm 5$ $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ $\sqrt{-25} \notin R$ $\sqrt[4]{-16} \notin R$

Nota: La calculadora només treu l'arrel positiva dels radicals amb exponent parell.
En la resta del tema, si no diem el contrari, considerarem també l'arrel positiva.

Si l'índex és imparell, existeix una solució real del mateix signe que el radicand.
Exemple:

$\sqrt[3]{64}=4$ $\sqrt[5]{243}=3$ $\sqrt[3]{-64}=-4$ $\sqrt[5]{-243}=-3$

Ús de la calculadora.

Per a efectuar potències i radicals amb calculadora s'utilitzen, respectivament, les tecles $\boxed{x^y}$ $\boxed{x^{1/y}}$

Exemples:

Per efectuar 5^4 en la calculadora s'escriu:

5	x^y	4	=

El resultat és: 625

Per efectuar 5^{-4}, en la calculadora s'escriu:

5	x^y	4	±	=

El resultat és: 1.6 $^{-03}$ És a dir: $5^{-4}=0{,}0016$

Per efectuar $\sqrt[5]{32}$, en la calculadora s'escriu:

32	$x^{1/y}$	5	=

El resultat és: 2

Per efectuar $\sqrt[4]{2^3}$, en la calculadora s'escriu:

2	x^y	(	3	:	4	)	=

El resultat és: 1.68179283

O bé

2	x^y	3	$x^{1/y}$	4	=

El resultat és: 1.68179283

Propietats dels radicals:

(1) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

(2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(3) $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

(4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

(5) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$

Expressió potencial d'un radical.

Definim $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ on $m\in Z, n\in Z\sim\{0\}$.

Exemple: $\sqrt[5]{3^7}=3^{\frac{7}{5}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[7]{5^3}}=5^{\frac{-3}{7}}$.

Simplificació de radicals

Per simplificar un radical dividim l'índex i l'exponent del radical pel mcd d'ambdós. (Aplicació de la propietat (5)).

Exemple:
$\sqrt[15]{7^6} = \sqrt[3\cdot 5]{7^{3\cdot 2}} = \sqrt[5]{7^2}$
mcd(15,6)=3

Extracció de factors d'un radical

El procediment per a treure factors d'un radical és el següent. (Aplicació de les propietats (1) (5)):
a) Descompondre en factors primers el radicand.
b) Aconseguir que algun exponent siga múltiple de l'índex. Tot seguit simplificar.
c) Tots els exponents de dins el radicant han de ser menors que l'índex.

Vegem-ho amb un exemple:
$\sqrt[3]{250\cdot a^5\cdot b^7} = \sqrt[3]{2\cdot 5^3\cdot a^3\cdot a^2\cdot b^6\cdot b} = 5\cdot a\cdot b^2\cdot \sqrt[3]{2\cdot a^2\cdot b}$.

Introducció de factors en el radicand

Per introduir un factor en un radicand, l'elevem al nombre que indique l'índex i el multipliquem pel radicand. (Aplicació de les propietats (1) (5)).

Exemple:
$7\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{7^4\cdot 5} = \sqrt[4]{12005}$.
$3a\sqrt[5]{2a^2} = \sqrt[5]{3^5\cdot a^5\cdot 2\cdot a^2} = \sqrt[5]{486a^7}$.

Reducció de radicals a índex comú

Reduir a índex comú uns radicals és convertir-los en altres radicals equivalents que tinguen el mateix índex.
L'índex comú és el mcm dels índex i el radicant s'eleva al resultat de dividir el mcm entre l'índex respectiu. (Aplicació de la propietat (5)):

Exemple:
Reduïu a índex comú $\sqrt[3]{5^4}$, $\sqrt[4]{7^5}$, $\sqrt{3^5}$.
El mcm(3,4,2)=12.
$\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[12]{\left(5^4\right)^4} = \sqrt[12]{5^{16}}$.
$\sqrt[4]{7^5} = \sqrt[12]{\left(7^5\right)^3} = \sqrt[12]{7^{15}}$.
$\sqrt{3^5} = \sqrt[12]{\left(3^5\right)^6} = \sqrt[12]{3^{30}}$.
És a dir, $\sqrt[12]{5^{16}}, \sqrt[12]{7^{15}}, \sqrt[12]{3^{30}}$ són equivalents als de l'enunciat i tenen el mateix índex.

Aquest exercici serveix per a comparar i ordenar radicals, així com per a multiplicar i dividir radicals.

Exemple:

Ordeneu de menor a major $\sqrt[5]{15}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[15]{3475}$.

$\sqrt[5]{15}=\sqrt[15]{15^3}=\sqrt[15]{3375}$, $\sqrt[3]{5}=\sqrt[15]{5^5}=\sqrt[15]{3125}$, $\sqrt[15]{3475}$.

Per tant, $\sqrt[3]{5}<\sqrt[5]{15}<\sqrt[15]{3475}$.

Multiplicació i divisió de radicals

Per a multiplicar o dividir radicals, es redueixen els radicals a índex comú i després s'aplica la propietat (1) o (2).

Exemple:

$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[6]{5^3\cdot 7^2}=\sqrt[6]{6125}$.

$$\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[12]{5^3}}{\sqrt[12]{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{125}{9}}\ .$$

Radicals semblants

Radicals semblants són aquells que després de simplificar-los tenen el mateix índex i radicand.

Exemple:

$\sqrt{75}$, $\sqrt{27}$ són semblants ja que traient factors fora d'ambdós radicals tenim:

$\sqrt{75}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$.

$\sqrt{27}=\sqrt{3^2\cdot 3}=3\sqrt{3}$.

Suma i resta de radicals semblants

Per a sumar o restar radicals semblants, se simplifiquen i és treuen factors fora dels radicals respectius. A continuació se sumen o resten els coeficients respectius i es multiplica el resultat pel radical comú (propietat distributiva dels nombres reals).

Exemple:

$\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{320}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}-\sqrt[3]{4^3\cdot 5}=2\cdot\sqrt[3]{5}-4\cdot\sqrt[5]{5}=-2\cdot\sqrt[3]{5}$.

$5\sqrt{27}+6\sqrt{75}=5\sqrt{3^2\cdot 3}+6\sqrt{5^2\cdot 3}=5\cdot 3\sqrt{3}+6\cdot 5\sqrt{3}=45\sqrt{3}$.

Racionalització de fraccions

Donada una fracció racionalitzar-la és trobar una fracció equivalent tal que el denominador siga un nombre natural.

Estudiarem 2 casos:

1.- Quan el denominador és de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, on m<n.

Per a racionalitzar la fracció, multiplicarem numerador i denominador per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Exemple:

Racionalitzeu $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Multiplicarem numerador i denominador per $\sqrt{5}$.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} .$$

Exemple:

Racionalitzeu $\dfrac{4}{\sqrt[5]{7^3}}$.

Multiplicarem numerador i denominador per $\sqrt[5]{7^2}$.

$$\frac{4}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{4}{\sqrt[5]{7^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{4 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{7} .$$

2.- El denominador és suma o diferència de dos radicals quadràtics.

Per a racionalitzar la fracció, multiplicarem numerador i denominador per l'expressió conjugada del denominador (és a dir, el denominador canviant suma per diferència o viceversa).

Exemple:

Racionalitzeu $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Multiplicarem numerador i denominador per $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2} .$$

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Exercicis de potències i radicals

1. Simplifiqueu. Escriviu en forma d'una sola potència:

a) $7^8\cdot 7^{-3} =$

b) $5^{-2}\cdot 5 =$

c) $(-8)^{-4}\cdot(-8)^{-2}\cdot(-8)^5 =$

d) $7^6\cdot 7^{-4}\cdot 7^{-1} =$

e) $9^3 : 9^7 =$

f) $3^{-5} : 3^4 =$

g) $\left(8^{-5}\right)^2 =$

h) $\left((-6)^3\right)^{-4} =$

i) $5^6\cdot 4^6 =$

j) $5^{-5}\cdot 4^{-5}\cdot 3^{-5} =$

k) $21^{-3} : 7^{-3} =$

l) $3^{-3}\cdot 27^2\cdot\left(9^4\right)^{-5} =$

m) $8^5\cdot\left(2^6\right)^{-3}\cdot 32 =$

n) $\dfrac{3^5\cdot 3^{-4}}{3^7} =$

o) $\dfrac{8^5\cdot 8^{-2}}{\left(8^3\right)^5\cdot 8} =$

p) $\dfrac{2^3\cdot 8^{-3}}{\left(4^{-2}\right)^5} =$

q) $\dfrac{5^3\cdot 125^{-3}}{\left(25^4\right)^{-5}} =$

r) $(-a)^5(-a)^{-3}a =$

s) $(-2)^4\cdot 2^3\cdot(-2)^4 =$

t) $-1^{26} =$

u) $(-1)^{568} =$

v) $(-1)^{35} =$

w) $(-5)^6\cdot 5^{-2}\cdot 5\cdot 5^{-3} =$

2. Escriviu com una sola potència de **b**

a) $b^5\cdot b^{-4}\cdot b =$

b) $b^6\cdot\left(b^{-4}\right)^3 =$

c) $\dfrac{b^5}{b^{-7}} =$

d) $\dfrac{b^5}{b^{-6}} =$

e) $\dfrac{b^5\cdot b}{b^{-4}} =$

f) $\dfrac{b^{-3}\cdot\left(b^4\right)^{-2}}{b^5\cdot b} =$

g) $b^3\left(\dfrac{1}{b^{-1}}\right)^{-2} =$

h) $\dfrac{b^6\left(b^{-3}\right)^{-2}}{\left(b^{-1}\right)^{-3}} =$

i) $b^{-5}\cdot\dfrac{b^3}{\left(b^4\right)^{-2}}$

3. Calculeu els valors reals dels següents radicals per descomposició factorial:

a) $\sqrt{729} =$

b) $\sqrt[3]{125} =$

c) $\sqrt[4]{160000} =$

d) $\sqrt{-36} =$

e) $\sqrt[5]{-0'00001} =$

f) $\sqrt[3]{2744} =$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{8}} =$

h) $\sqrt{\dfrac{16}{625}} =$

i) $\sqrt[4]{-81} =$

j) $\sqrt[5]{-161051} =$

4. Amb ajut de la calculadora comproveu els resultats de l'exercici anterior.

5. Amb ajut de la calculadora calculeu les següents arrels:

a) $\sqrt[3]{333} =$ b) $\sqrt[4]{554} =$
c) $\sqrt{234} =$ d) $\sqrt[5]{-245} =$
e) $\sqrt[6]{654} =$ f) $\sqrt{-457} =$

6. Escriviu en forma de potència:

a) $\sqrt{3^5} =$ b) $\sqrt{7} =$
c) $\sqrt[3]{4^5} =$ d) $\sqrt[7]{2^3} =$
e) $\frac{1}{\sqrt{3}} =$ f) $\frac{1}{\sqrt{3^5}} =$
g) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$ h) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} =$
i) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} =$ j) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} =$
m) $\sqrt[5]{5^{10}} =$ l) $\sqrt{7^4} =$

7. Escriviu en forma de radical:

a) $7^{\frac{3}{4}} =$ b) $2^{\frac{1}{3}} =$
c) $8^{\frac{1}{4}} =$ d) $5^{\frac{5}{2}}$
e) $5^{\frac{-2}{3}} =$ f) $6^{\frac{-3}{2}} =$
g) $7^{\frac{-9}{4}} =$ h) $10^{\frac{-1}{2}} =$

8. Extragueu els factors possibles dels següents radicals:

a) $\sqrt{1200} =$ b) $\sqrt{504} =$
c) $\sqrt[3]{135} =$ d) $\sqrt[4]{1875} =$
e) $\sqrt[6]{15625} =$ f) $\sqrt[3]{1715} =$
g) $\sqrt{\frac{27}{125}} =$ h) $\sqrt[3]{\frac{16}{875}} =$
i) $\sqrt{45a^3b^6} =$ j) $\sqrt[3]{16a^7b^5} =$
k) $\sqrt{\frac{16a^5}{125b^4}} =$ l) $\sqrt[4]{\frac{32a^4b^5}{c^6}} =$

9. Introduïu factors dins del radical i simplifiqueu:

a) $3\sqrt{3} =$ b) $7\cdot\sqrt[3]{49} =$

c) $4\cdot\sqrt[5]{25} =$ d) $3\sqrt{33} =$

e) $a\sqrt{3a} =$ f) $4a\cdot\sqrt[5]{a^3} =$

g) $7a\cdot\sqrt[3]{25} =$ h) $a^2\cdot\sqrt[3]{2a} =$

i) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{2}} =$ j) $\frac{a}{5}\sqrt[3]{\frac{625}{a}} =$

k) $\frac{a}{5}\sqrt{20a} =$ l) $\frac{2y}{3x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{3y^2}} =$

10. Simplifiqueu les següents arrels:

a) $\sqrt[6]{3^8} =$ b) $\sqrt[14]{7^7} =$

c) $\sqrt[5]{a^{10}} =$ d) $\sqrt[15]{a^{12}} =$

e) $\sqrt[30]{a^{10}} =$ f) $\sqrt[50]{8^{20}} =$

g) $\sqrt[25]{5^5} =$ h) $\sqrt[12]{3^{20}} =$

i) $\sqrt[20]{a^{12}} =$ j) $\sqrt[20]{8^6} =$

11. Reduïu a índex comú les següents arrels.

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{7}$, $\sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{10}$

d) $\sqrt{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[8]{20}$

e) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{10}$

f) $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[15]{a^7}$

g) $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[15]{a^2}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a^2}$

12. Sense utilitzar la calculadora ordeneu de menor a major els següents nombres reals:

a) $\sqrt{14}$, $\sqrt[3]{52}$

b) $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[4]{74}$, $\sqrt[12]{390624}$

c) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[6]{30}$

d) $\sqrt[3]{15}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[4]{500}$, $\sqrt[8]{1000}$

13. Comproveu els resultats anteriors amb ajut de la calculadora.

14. Calculeu (doneu el resultat en un únic radical):

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}=$ b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}=$

c) $\sqrt{6}:\sqrt{18}=$ d) $\sqrt[3]{14}:\sqrt[3]{7}=$

e) $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt{3}=$ f) $\sqrt[3]{15}:\sqrt{3}=$

g) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{7}=$ h) $\sqrt{3a}:\sqrt[5]{a^3}=$

i) $3:\sqrt[5]{3}=$ j) $\sqrt[3]{4}:2=$

k) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt[4]{15ab^3}=$ l) $\sqrt[3]{3a^2b}:\sqrt[4]{15ab^3}=$

m) $\dfrac{\sqrt[3]{4a}}{4\sqrt{a}}=$ n) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{2}}=$

o) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{3}}=$ p) $\dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{10}}=$

15. Calculeu les següents sumes:

a) $5\sqrt{7}-3\sqrt{7}+4\sqrt{7}+2\sqrt{7}-\sqrt{7}=$

b) $4\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}-7\cdot\sqrt[3]{5}+2\cdot\sqrt[3]{5}=$

c) $\sqrt{99}+\sqrt{44}=$

d) $2\sqrt{18}+5\sqrt{8}-\sqrt{50}=$

e) $\sqrt[3]{81}+4\cdot\sqrt[3]{375}-3\cdot\sqrt[3]{24}=$

f) $\sqrt{6}+3\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{24}-4\sqrt{2}=$

g) $\sqrt{100x}+3\sqrt{16x}=$

h) $\sqrt[3]{54x}-4\cdot\sqrt[3]{16x}+\sqrt[3]{250x}=$

i) $2a\sqrt{3}-3\sqrt{12a^2}-a\sqrt{27}=$

j) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}=$

k) $\sqrt{50}+\sqrt{75}-\sqrt{18}-\sqrt{12}=$

16. Calculeu (doneu el resultat en forma d'un únic radical).

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5^7}}=$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}=$

c) $\sqrt{7\sqrt{3}}=$ d) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}=$

e) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt{2}}}=$ f) $\sqrt{a\cdot\sqrt[5]{2a^2}}=$

g) $\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}=$ h) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=$

17. Racionalitzeu les següents fraccions:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} =$

b) $\dfrac{-4}{5\sqrt{2}} =$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} =$

d) $\dfrac{7}{\sqrt[5]{2^3}} =$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5^3}} =$

f) $\dfrac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{5}} =$

g) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$

h) $\dfrac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} =$

i) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} =$

j) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+4}$

k) $\dfrac{1}{3-\sqrt{10}} =$

l) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$