Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Probabilitat

Un **fenomen** és **aleatori** si coneixem tots els seus resultats possibles però no podem predir quin d'ells ocorrerà.
Cadascun d'aquests resultats és un **succés** elemental del fenomen aleatori.
Tots els successos elementals formen **l'espai mostral**.

Amb els successos podem operar, siguen A i B dos successos, definim:
$A \cup B$ com el succés que resulta si es dóna A o B. És la unió de successos.
$A \cap B$ com el succés que resulta si es donen A i B a la vegada. És la intersecció de successos.

Podem fer una classificació dels successos:
Succés segur: és l'espai mostral, E, és aquell que es realitza sempre.
Succés impossible: és el $\varnothing$, aquell que no es pot realitzar.
Succés complementari: $\overline{A}$ complementari (o contrari) de A, si $A \cup \overline{A} = E$ i $A \cap \overline{A} = \varnothing$, és a dir, si $\overline{A}$ conté tots els successos elementals que no conté A i no tenen res en comú.
Dos **successos A i B**, són **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$, és a dir, si no poden succeir a la vegada.
Diem que el succés **A està inclòs en el succés B**, $A \subseteq B$, si cada resultat de A també és de B.

Probabilitat
La probabilitat és la mesura de la possibilitat de realització dels successos.

Assignem probabilitats al successos per diferents mitjans:
Assignació de probabilitats mitjançant la freqüència absoluta. Si repetim un fenomen aleatori un nombre n de vegades en les mateixes condicions, i contem que el succés A apareix m vegades, aleshores podem dir que $P(A) = \frac{m}{n}$, sent m<n.

Assignació de probabilitats mitjançant la regla de Laplace. La regla Laplace diu que la probabilitat d'un succés A és la raó entre el nombre de casos favorables i el nombre de casos possibles. També podem raonar aquest quocient dient que és la raó entre el nombre de successos elementals que té el succés A i el nombre de successos elementals de l'espai mostral.

PROPIETATS DE LA PROBABILITAT:
La probabilitat d'un succés és un nombre que pertany a l'interval [0, 1]
$P(E) = 1$
$P(\varnothing) = 0$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
La probabilitat de la diferència de dos successos A i B és: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
Si $B \subseteq A$, aleshores la diferència és: $P(A - B) = P(A) - P(B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A i B són incompatibles
Si A i B són dos successos qualsevol: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Lleis de Morgan: $\begin{cases} \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)} \\ \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)} \end{cases}$

Propietat distributiva: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

FENOMEN COMPOST: Diem que un fenomen aleatori és compost si està format per dos o més fenòmens aleatoris simples.

SUCCESSOS INDEPENDENTS: Dos successos A i B són independents si es compleix que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En cas contrari diem que els successos A i B són dependents.

TÈCNIQUES COMBINATÒRIES DE CONTEIG

Permutacions: Utilitzarem aquesta tècnica quan necessitem fer grups ordenats amb n elements. Calculem les permutacions de n elements:

$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Aquestos grups es diferencien en l'ordre dels elements.

Variacions: Utilitzarem aquesta tècnica quan necessitem fer grups amb n elements distints agafats de m en m sense repetir els elements $(m \leq n)$. Calculem les variacions de n elements agafats de m en m:

$$V_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Dos variacions sense repetició són diferents si els seus elements són diferents o estan ordenats de forma diferent.

Variacions amb repetició: Utilitzarem aquesta tècnica quan necessitem fer grups amb n elements agafats de m en m, podent repetir els elements. Calculem les variacions amb repetició de n elements agafats de m en m:

$VR_{n,m} = n^m$.

Dos variacions amb repetició són diferents si els seus elements són diferents o estan ordenats de forma diferent.

Combinacions: Utilitzarem aquesta tècnica quan necessitem fer grups amb n elements agafats de m en m i sense tenir en compte l'ordre dels elements i sense repetir els elements. Calculem les combinacions de n elements agafats de m en m:

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}. \qquad C_{n,m} = \frac{V_{n,m}}{P_m}$$

Dos combinacions són diferents si els seus elements són diferents.

Problemes d’autoaprenentatge:

Problema 1:

Joan i Pepa estan jugant al joc de pedra, paper o tisores. Aquest joc determina un fenomen aleatori. Aleshores:

a) Descriu l’espai mostral del joc.
b) ¿Quin és el resultat més probable?
c) Calcula la probabilitat de traure (pedra, tisores)

Solució:

a) L’espai mostral el podem descriure amb aquesta taula:

JOAN	PEPA
▤	✂
▤	❖
▤	▤
✂	✂
✂	❖
✂	▤
❖	✂
❖	❖
❖	▤

b) No hi ha cap resultat més probable. Tots els resultats són igualment probables.
c) Per a calcular la probabilitat de (pedra, tisores) contem el nº de resultats possibles: 9, i el núm. de resultats favorables: 1.

Per tant la probabilitat cercada és: $\frac{1}{9}$

Problema 2:

Llancem dos daus i sumem els resultats. Calcula la probabilitat de traure suma 6 i de traure suma parella. Si feres una aposta, ¿per quin resultat apostaries?

Solució:

El primer que fem és descriure l’espai mostral determinat pel llançament dels dos daus sense tenir en compte l’ordre dels daus perquè els llancem a la vegada i no els podem diferenciar.

Primer dau	Segon dau	Resultat	Suma
1	1	(1,1)	2
	2	(1,2)	3
	3	(1,3)	4
	4	(1,4)	5
	5	(1,5)	6
	6	(1,6)	7
2	1	(2,1)	3
	2	(2,2)	4
	3	(2,3)	5
	4	(2,4)	6
	5	(2,5)	7
	6	(2,6)	8
3	1	(3,1)	4
	2	(3,2)	5
	3	(3,3)	6
	4	(3,4)	7
	5	(3,5)	8
	6	(3,6)	9

Primer dau	Segon dau	Resultat	Suma
4	1	(4,1)	5
	2	(4,2)	6
	3	(4,3)	7
	4	(4,4)	8
	5	(4,5)	9
	6	(4,6)	10
5	1	(5,1)	6
	2	(5,2)	7
	3	(5,3)	8
	4	(5,4)	9
	5	(5,5)	10
	6	(5,6)	11
6	1	(6,1)	7
	2	(6,2)	8
	3	(6,3)	9
	4	(6,4)	10
	5	(6,5)	11
	6	(6,6)	12

Hem de fer el conteig de tots els resultats possibles: {suma 2 (1), suma 3 (2), suma 4 (3), suma 5 (4), suma 6 (5), suma 7 (6), suma 8 (5), suma 9 (4), suma 10 (3), suma 11 (2), suma 12 (1)}. Tenim en total 36 resultats possibles.

Ens demanen en primer lloc calcular la probabilitat que la suma siga 6, per tant hem de comptar de quantes formes pot eixir 6. Si mirem l'arbre que descriu l'espai mostral, ens adonem que la suma pot ser 6 de 5 formes: (1,5), (2,4),(3,3), (4,2) i (5,1). La probabilitat cercada és: $\frac{5}{36}$

També ens demanen la probabilitat de traure suma parella.
Fem el conteig dels casos favorables d'aquest succés i ixen :
{suma 2 (1), suma 4 (3), suma 6 (5), suma 8 (5), suma 10 (3), suma 12 (1)}. Un total de 12 casos favorables.

Calculem la probabilitat de que la suma siga parella: $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

Si haguera de fer una aposta, la faria al resultat o resultats que apareixen més: suma 7 (6), Aleshores:

P(suma 7) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Problema 3:
Siguen A y B dos successos d'un fenomen aleatori. Coneixem que P(A)=2/5, P(B)=5/9 i P(A∪B)=11/15. Calcula:

a) La probabilitat que es verifiquen A y B
b) La probabilitat que es verifique A y $\overline{B}$.
c) La probabilitat que no es verifique A o no es verifique B

Solució:
a) El que ens demana en aquest apartat és la probabilitat del succés intersecció: P(A∩B)
Nosaltres coneixem que per a qualsevol parell de successos es compleix:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
En l'enunciat tenim les dades següents: P(A)=2/5, P(B)=5/9 i P(A∪B)=11/15. Aleshores, substituint a la fórmula anterior:

$$\frac{11}{15}=\frac{2}{5}+\frac{5}{9}-P(A\cap B)$$

Aleshores, $P(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{5}{9}-\frac{11}{15}=\frac{2}{9}$

b) $P(A\cap \overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{2}{9}=\frac{8}{45}$

Per la diferència de dos successos

c) $P(\overline{A}\cup \overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

Per les lleis de Morgan

Problema 4:
Al nostre armari tenim 6 barrets, 3 negres i 3 blancs, 5 camises, 3 negres i 2 blanques i 5 faldes, 2 negres i 3 blanques. ¿De quantes formes diferents ens podem vestir?. Però, no m'agrada portar dues peces negres, ¿de quantes formes em puc vestir?. Si vull agafar un d'aquests conjunts que em puc fer amb la roba que tinc a l'armari, ¿quina és la probabilitat que siga dels conjunts que m'agraden?

Per cada barret em puc posar cinc camises:

6 barrets x 5camises = 30 parelles
I per cadascuna d'aquestes parelles puc elegir cinc faldes:
30 parelles x 5 faldes = **150 conjunts de roba**
Ara decidim no posar-nos dues peces negres:

- 3 barrets negres
  - 2 faldes negres — NO POT SER
  - 3 faldes blanques
    - 3 camises negres — NO POT SER
    - 2 camises blanques
- 3 barrets blancs
  - 2 faldes negres
    - 3 camises negres — NO POT SER
    - 2 camises blanques
  - 3 faldes blanques
    - 3 camises negres
    - 2 camises blanques

Si agafem els camins possibles obtenim:
3x3x2 + 3x2x2 + 3x3x3 + 3x3x2 = 18 + 12+ 27 + 18 =75 conjunts de roba, on no hi ha dues peces negres.
Per a trobar la probabilitat, utilitzarem la fórmula de Laplace:
si A és el succés "que el conjunt m'agrade", $P(A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$.
Els nostres casos possibles son els 150 conjunts que puc fer amb la roba de l'armari, i els casos favorables són el 75 conjunts que m'agraden perquè no porten dues peces negres. Per tant la probabilitat cercada és: $P(A)=\frac{75}{150}=\frac{1}{2}$

Problema 5:
Ens agrada prou la paraula AMOR. ¿Quantes paraules, amb significat o sense ell, podem formar amb aquestes lletres?. Imaginem que tenim totes aquestes paraules dins d'una bossa i traiem una paraula, ¿quina és la probabilitat que siga ROMA?, ¿quina és la probabilitat que comence amb la síl·laba RO?, ¿quina és la probabilitat que comence per R?.

Per a conèixer la quantitat de paraules que podem formar amb les lletres de la paraula AMOR, fem una anàlisi del tipus d'agrupament que volem fer: importa l'ordre i tots els grups han de tenir tots els elements. Per tant utilitzarem les permutacions dels quatre elements:
$P_4 = 4! = 24$ paraules podem formar.
Per a calcular les probabilitats demanades, utilitzarem la fórmula de Laplace:

$$P(A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$$

En el primer cas, només tenim un favorable. De totes les 24 paraules que podem formar amb les lletres de la paraula AMOR, només tenim una paraula ROMA. La probabilitat cercada és:

$$P(ROMA)=\frac{1}{24}$$

Del segon cas, comptarem quantes d'aquestes 24 comencen per RO: només ens queden dues lletres, A i M, per a ocupar els dos llocs: AM, MA. Aleshores tenim dos casos favorables: $P(RO\_\ \_) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

En el cas últim tenim : R _ _ _: tres elements de tres en tres: $P_3 = 3! = 6$ casos favorables: $P(R\_\ \_\ \_) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Problema 6:
Anem a jugar al joc següent: llancem un dau tres vegades i sumem les puntuacions. Calculeu la probabilitat d'obtenir 11.
Solució:
Els casos possibles són tots els conjunts de tres elements que es poden fer amb els 6 elements del dau. A més a més poden tenir repeticions i importa l'ordre:

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$

Els casos favorables són els conjunts de tres que sumen 11:
{1, 4, 6}, {1, 5, 5}, {2, 3, 6}, {2, 4, 5}, {3, 3, 5}, {3, 4, 4}. Com que l'ordre és important, en els conjunts on no es repeteix cap element poden aparèixer de 3!=3·2·1=6 formes diferents. I els conjunts on es repeteix un element poden aparèixer de 3 formes diferents. Per exemple el conjunt {1, 5, 5}, també pot aparèixer de la forma {5, 1, 5} i de la forma {5, 5, 1}.
Tenim tres conjunts de cadascuna de les característiques de dalt. Aleshores el nombre de casos favorables és:
3·3! + 3·3 = 3·6+3·3=18+9=27
Aplicant la regla de Laplace per a calcular la probabilitat demanada:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

Problemes proposats:

1.
   a) Descriviu l'espai mostral determinat pel fenomen aleatori del llançament d'un dau.
   b) Descriviu el successos següents: A={Traure un número parell}; B={Traure múltiple de 3}, C={Traure un número senar}.
   c) Assigneu probabilitats a cadascun dels successos de l'apartat b.

2.
   a) Descriviu l'espai mostral determinat pel fenomen aleatori del llançament de dues monedes.
   b) Descriviu els següents successos: A={Traure cara almenys una vegada}; B={Traure dues creus}; C={Traure dues cares}.
   c) ¿Són A i B successos complementaris?
   d) Assigneu probabilitats a cadascun dels successos de l'apartat b.

3. Siga el fenomen aleatori determinat per l'extracció d'una carta d'una baralla espanyola. Escriviu els següents successos i assigneu-los probabilitat:
   a) Extraure figura
   b) Extraure ors.
   c) Extraure reis
   d) El succés contrari al succés del primer apartat.

4. Tenim un dau amb les cares pintades cadascuna d'un color diferent: roig, groc, blau, taronja, verd i violeta. Llancem el dau una vegada. Siguen els successos següents: Que isquen els colors primaris :F={roig, blau, groc}, Que isca blau o taronja: G={blau, taronja}, Que isquen els colors secundaris: H ={violeta, verd, taronja}, Que isca un parell de colors complementaris: I={roig, verd}.
   a) Descriviu els successos següents: $F\cup G$, $F\cap G$.
   b) Escriviu dos successos compatibles.
   c) Escriviu dos successos incompatibles.
   d) ¿F té succés contrari ?
   e) ¿Com formaríeu el succés segur d'aquest fenomen aleatori? (Ajuda: el podeu formar amb unió de successos)
   f) ¿Com formaríeu el succés impossible d'aquest fenomen aleatori? (Ajuda: el podeu formar amb intersecció de successos)
   g) Assigneu probabilitat als successos dels apartats a, b, c i d.

5. Calculeu la probabilitat que el producte de les puntuacions en el llançament de dos daus siga:
   a) Major o igual que cinc.
   b) Imparell
   c) Parell

6. Anem pel carrer i s'adonem que hi ha un home en més gent fent un joc. El joc consisteix en una taula amb tres tasses damunt i baix d'una d'elles hi ha una boleta. L'home, que sembla el cap, demana que la gent aposte on està la boleta. Barreja les tasses amb molta velocitat i una vegada barrejades demana a la gent on hi és la boleta.
   a) ¿Quina és la probabilitat d'encertar on hi és?
   b) ¿I si hi haguera dues tasses amb boletes i la tercera sense boletes?

7. Calculeu la probabilitat d'aconseguir quatre punts si elegim aleatòriament una fixa de dòmino.

8. Escollim per sorteig un número de l'1 al 63000. Calculeu la probabilitat que siga múltiple de 2, de 3 y de 5.

9. Siguen A y B dos successos d'un fenomen aleatori. Coneixem que $P(A)=1/3$, $P(B)=1/5$ y $P(A\cup B)=7/15$. Calculeu:
   a) La probabilitat que es verifiquen A y B
   b) La probabilitat que es verifique A y $\overline{B}$.
   c) La probabilitat que no es verifique A o no es verifique B

10. ¿Quantes persones assisteixen a un congrés de llengües sabent que hi ha 128 persones que parlen anglès, 99 que parlen francès i, d'entre elles, 47 parlen ambdues llengües?

11. Si fem una travessa de futbol de quinze resultats, quina és la probabilitat d'encertar?

12. Ara fem una loteria primitiva de dijous. Quina és la probabilitat d'encertar?

13. En quin joc, travessa de futbol o loteria primitiva, és més fàcil guanyar?

14. Estava llegint el diari i he trobat la següent taula, que estudia el color del cabell de 165 dones i homes agafats aleatòriament en el meu poble:

persones	**he trobat**
dona amb cabell castany	55
home amb cabell castany	53
dona amb cabell ros	10
home amb cabell ros	12
dona amb cabell negre	18
home amb cabell negre	17

Segons aquestes dades totalment fiables, ¿quina és la probabilitat que la primera persona que em trobe al carrer siga un home amb el cabell ros? ¿I una dona amb el cabell negre?

15. A classe hi ha un estoig amb 25 llapisseres, 15 de color roig i 10 de color blau. Si agafem dues llapisseres, quina és la probabilitat que les dues siguen blaves?. Calculeu també la probabilitat que la primera siga blava i la segona siga roja.

16. Tenim una baralla espanyola i traiem dues cartes. Quina és la probabilitat d'obtenir dos asos? I si tornem la primera carta a la baralla abans de fer la segona extracció?

17. Un estudiant ha preparat 40 temes dels 50 que entren a l'examen. Si l'examen consisteix en elegir tres temes a l'atzar i contestar a un d'ells, calculeu les probabilitats següents:
a) Que no sàpiga cap dels temes.
b) Que sàpiga almenys un.
c) Que sàpiga els tres.

18. Una urna conté 5 boles roges, 3 verdes i 2 blanques. Traiem a l'atzar i a la vegada dues boles, calculeu la probabilitat que:
a) Les dues siguen del mateix color.
b) Almenys una siga roja.

19. La probabilitat que un home visca passats 25 anys és 6/25 i la probabilitat que la seua dona visca passats els 25 anys és de 9/25. Calculeu la probabilitat que, transcorreguts els 25 anys:
a) visquen els dos.
b) cap dels dos visca.
c) només visca el marit.
d) només visca la dona.

20. A una caixa tenim 68 claus de cap gran i 32 de cap menut. Elegim dos claus a l'atzar, calculeu la probabilitat que siguen:
a) ambdós de la mateixa classe.
b) de diferent classe.