Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

POLINOMIS. Divisió. Regla de Ruffini.

Recordeu:

Un monomi en x és una expressió algebraica de la forma $a \cdot x^n$ on a és un nombre real i n és un nombre natural. A s'anomena coeficient i n s'anomena grau del monomi.

Exemple: $4x^3$ és un monomi en la variable x de grau 3 i coeficient 4.
Un polinomi és la suma de dos o més monomis. Els binomis són suma de dos monomis i els trinomis són suma de tres monomis.
El grau d'un polinomi és el major dels graus dels monomis que el formen.
Exemple: $-2x^4 + 3x^2 + x - 4$ és un polinomi de grau 4 i de coeficients $(-2, 0, 3, 1, -4)$ el coeficient principal és –2 i el terme independent és -4
Monomis semblants són els que tenen la mateixa part literal.

Operacions amb polinomis:
Sumem polinomis sumant els monomis semblants.

Multipliquem polinomis multiplicant cada monomi d'un dels factors per tots els monomis de l'altre factor i després sumem els monomis semblants.

Dividir dos polinomis $A(x) : B(x)$ és determinar dos polinomis $Q(x)$ quocient i $R(x)$ residu tals que complesquen:
a) $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ dividend és igual a divisor per quocient més el residu.
b) $\text{grau}\,R(x) < \text{grau}\,B(x)$ grau del residu és menor que el grau del divisor.
Grau(quocient)=grau(dividend)-grau(divisor)
Una divisió és exacta si el residu és zero R(x)=0

Valor d'un polinomi $A(x)$ per a $x = a$ és substituir el valor x del polinomi pel nombre reals a. Es representa per $A(a)$
Exemple:
$A(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
$A(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 1 = -24 + 8 + 8 + 1 = -7$

Teorema del Residu:
El residu de dividir el polinomi P(x) entre el monomi $x - a$ és igual al valor numèric del polinomi per a $x = a$, és a dir P(a).

Teorema del factor.
Un polinomi P(x) és divisible pel monomi $x - a$ si i només si el valor numèric del polinomi per a $x = a$, és zero $P(a) = 0$

Mètode per a dividir polinomis amb una variable.

S'ordenem el dividend i el divisor segons les potències decreixents de la variable.
Dividim el terme primer del dividend entre el terme primer del divisor, per obtenir el primer terme del quocient.
Multipliquem el divisor pel primer terme del quocient i li restem al dividend el resultat anterior per aconseguir el primer residu parcial.
Repetim el procediment fent ara de dividend el primer residu parcial.
La divisió finalitza quan el grau del residu és menor que el grau del divisor.

Exercicis d'autoaprenentatge.
Exercici:
Dividiu $\left(6x^5+x^4+4x^2-7x+1\right):\left(2x^2+x-3\right)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -7x & +1 & 2x^2 & +x & -3 & \\ \cline{7-10}
-6x^5 & -3x^4 & +9x^3 & & & & 3x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\ \cline{1-6}
 & -2x^4 & +9x^3 & +4x^2 & -7x & +1 & & & & \\
 & 2x^4 & +x^3 & -3x^2 & & & & & & \\ \cline{2-6}
 & & 10x^3 & +x^2 & -7x & +1 & & & & \\
 & & -10x^3 & -5x^2 & +15x & & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -4x^2 & +8x & +1 & & & & \\
 & & & 4x^2 & +2x & -6 & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -5 & & & &
\end{array}
$$

El quocient és: $3x^3-x^2+5x-2$
El residu és: $10x-5$
Comprovació:
Notem que $\text{grau}(10x-5)<\text{grau}(2x^2+x-3)$
Podem provar que $\left(2x^2+x-3\right)\cdot\left(3x^3-x^2+5x-2\right)+(10x-5)=6x^5+x^4+4x^2-7x+1$
Efectuem la multiplicació:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\
 & & & 2x^2 & +x & -3 \\ \hline
 & & -9x^3 & +3x^2 & -15x & +6 \\
 & +3x^4 & -x^3 & +5x^2 & -2x & \\
6x^5 & -2x^4 & +10x^3 & -4x^2 & & \\ \hline
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -17x & +6
\end{array}
$$

Efectuem la suma:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -17x & +6 \\
 & & & & 10x & -5 \\ \hline
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -7x & +1
\end{array}
$$

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Exercici: Regla de Ruffini.

Divisió d'un polinomi P(x) entre un monomi de la forma $x - a$

Efectueu la següent divisió: $\left(-3x^5 + 4x^3 - 5x + 1\right) : (x - 2)$

1 En la primera fila col·loquem els coeficients del dividend ordenats segons les potències decreixents.

4 Els nombres de la segona fila s'aconsegueixen multiplicant el terme independent del divisor per l'últim nombre aconseguit de la tercera fila:
$2\cdot(-3)=-6$ $2\cdot(-6)=-12$
$2\cdot(-8)=-16$ $2\cdot(-16)=-32$
$2\cdot(-37)=-74$

$$\begin{array}{c|cccccc} & -3 & 0 & 4 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & & -6 & -12 & -16 & -32 & -74 \\ \hline & -3 & -6 & -8 & -16 & -37 & \boxed{-73} \end{array}$$

2 Terme independent del divisor canviat de signe

3 Coeficient principal del dividend

5 Suma dels nombres superiors.

6 Suma dels nombres superiors.
És el residu de la divisió.

7 Els coeficients del polinomi quocient són els nombres de la tercera fila menys el darrer que és el residu. En aquest cas els coeficients són: $(-3,-6,-8,-16,-37)$

Per tant el quocient és $-3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 16x - 37$
El residu és $R = -73$

Exercici:

Calculeu el valor del polinomi $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x + 1$ en $x = 2$ per dos mètodes distints.

Solució:

Per la definició de valor d'un polinomi:

$p(2) = 2\cdot 2^4 - 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 1 = 31$

Pel teorema del residu $p(2)$ és el residu de dividir $p(x)$ entre $x - 2$

Efectuem la divisió utilitzant la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & & 4 & 8 & 10 & 30 \\ \hline & 2 & 4 & 5 & 15 & \boxed{31} \end{array}$$

El residu de la divisió és R=31, aleshores $p(2) = 31$

Exercici:

Trobeu el residu de la divisió $\left(x^5+7\right):(x+2)$ per dos mètodes distints:

Efectuant la divisió per la regla de Ruffini:

	1	0	0	0	0	7
-2		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	$\boxed{-25}$

El residu de la divisió és $R=-25$

Utilitzant el teorema del residu, el residu de dividir $\left(x^5+7\right):(x+2)$ és $p(-2)$

Aleshores, $R=p(-2)=(-2)^5+7=-25$

Factorització d'un polinomi aplicant el teorema del residu.

Si dividim $p(x):(x-a)$ i la divisió és exacta:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x-a \\ \hline 0 & q(x) \end{array}$$

Aleshores, $p(x)=(x-a)\cdot q(x)$

Direm que $x=a$ és una arrel o zero del polinomi $p(x)$

Teorema:

Siga $p(x)$ és un polinomi amb coeficients enters i $x=a$ és un zero enter del polinomi $x=a$, aleshores $x=a$ divideix al terme independent del polinomi $p(x)$.

Exercici:

Factoritzeu el polinomi $p(x)=x^4+x^3-6x^2-4x+8$.

Solució:

Pel teorema anterior el polinomi si té zeros enters són divisors del terme independent 8.

Els divisors enters de 8 són $1,-1,2,-2,4,-4,8,-8$

$x=1$, és un zero ja que $p(1)=1^4+1^3-6\cdot1^2-4\cdot1+8=0$

Aleshores podem efectuar la divisió:

	1	1	-6	-4	8
1		1	2	-4	-8
	1	2	-4	-8	$\boxed{0}$

Aleshores,

$p(x)=x^4+x^3-6x^2-4x+8=(x-1)\cdot(x^3+2x^2-4x-8)$

Repetirem el procediment amb el polinomi quocient x^3+2x^2-4x-8

	1	2	-4	-8
2		2	8	8
	1	4	4	$\boxed{0}$
-2		-2	-4	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Aleshores,

$$x^3+2x^2-4x-8=(x-2)\cdot\left(x^2+4x+4\right)=$$
$$=(x-2)\cdot(x-(-2))\cdot(x-(-2))=$$
$$=(x-2)\cdot(x+2)^2$$

Per tant,

$p(x)=x^4+x^3-6x^2-4x+8=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)^2$

Els zeros o arrels del polinomi $p(x)$ són $x=1,2,-2,-2$

Exercicis proposats.

1. Siguen els polinomis $p(x)=2x^4+3x^2-5x+7$, $q(x)=-2x^2+4x-3$.

Calculeu:

a) $p(x)+q(x)$ b) $p(x)-q(x)$ c) $p(x)\cdot q(x)$

d) $2\cdot p(x)$ e) $3\cdot p(x)+4\cdot q(x)$ f) $(p(x))^2$

2. Efectueu les següents divisions de monomis:

a) $\left(6x^5\right):\left(2x^3\right)$ b) $\left(-9x^3\right):\left(3x^2\right)$ c) $\left(4x^5\right):\left(-2x^5\right)$

d) $\left(4x^5\right):\left(5x^4\right)$ e) $\left(7x^7\right):\left(3x^4\right)$ f) $\left(5x^6\right):\left(-2x^3\right)$

g) $\left(-2x^6\right):\left(5x^2\right)$ h) $\left(-3x^4\right):\left(-2x\right)$ i) $\left(7x^4\right):\left(14x^3\right)$

3. Efectueu les següents divisions de polinomis:

a) $\left(2x^5-4x^4+2x^3+x^2-5x+2\right):\left(x^3-2x^2+x-3\right)$

b) $\left(3x^4-3x^2+x-5\right):\left(x^2+3\right)$

c) $\left(-2x^3+4x^2+x\right):(2x+1)$

d) $\left(8x^5+1\right):\left(2x^3-1\right)$

e) $\left(x^3-3x^2+6x-1\right):\left(x^2-4x+5\right)$

f) $\left(3x^4-2x^3+4x-7\right):(x+3)$

g) $\left(4x^4-2x^2+3x-2\right):\left(2x^2+x-3\right)$

4. Efectueu les següents divisions aplicant la regla de Ruffini.

a) $\left(2x^5-3x^4+4x^3-5x^2+3x+1\right):(x+2)$

b) $\left(-2x^4+3x^2-5\right):(x-3)$

c) $\left(x^5+4x^4-5x+1\right):(x+1)$

d) $\left(x^4-3x^3+4x^2+3x-5\right):(x-5)$

e) $\left(3x^5+2\right):(x-1)$

f) $\left(-3x^4+2x^3-7x\right):(x-2)$

g) $\left(x^5+4x^2\right):(x+3)$

h) $\left(2x^4+3x^3-5\right):(x+4)$

i) $\left(4x^4-2x+1\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

j) $\left(x^3-4x^2+3x-1\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$

5. Siga el polinomi $p(x)=2x^3-4x^2+2x-5$, per la definició, calculeu els següents valors:

a) $p(1)$ b) $p(-1)$ c) $p(2)$

d) $p(-3)$ e) $p(4)$ f) $p\left(\frac{1}{2}\right)$

6. Siga el polinomi $p(x)=2x^3-4x^2+2x-5$, utilitzant el teorema del residu, calculeu els següents valors:

a) $p(1)$ b) $p(-1)$ c) $p(2)$

d) $p(-3)$ e) $p(4)$ f) $p\left(\frac{1}{2}\right)$

7. Determineu el valor m a fi que la divisió $\left(2x^3-4x^2+x+m\right):(x+2)$ siga exacta. (L'exercici es pot fer per dos mètodes distints).

8. Determineu el valor m a fi que la divisió $\left(x^3+mx+3\right):(x-2)$ siga exacta.

9. Determineu m a fi que la divisió $\left(x^4+2x^3-3x^2+4x+m\right):(x+1)$ tinga per residu 3.

10. Determineu m a fi que la divisió $\left(x^3+mx^2+2x+3\right):(x-1)$ tinga per residu –7.

11. Determineu m sabent que $x=-2$ és una arrel del polinomi $p(x)=x^3+2x^2-3x+m$.
(L'exercici es pot fer per dos mètodes distints).

12. Determineu m sabent que $x=3$ és una arrel del polinomi $p(x)=x^4-3x^3+mx+1$

13. Factoritzeu els següents polinomis. En cada exercici digueu quins són els zeros o arrels.

a) $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$
b) $x^4+6x^3+9x^2-4x-12$
c) $x^4+x^3-19x^2-49x-30$
d) $x^4+10x^3+37x^2+60x+36$
e) x^4-2x^2+1
f) $x^4+3x^3-5x^2-3x+4$
g) $x^4+2x^3-12x^2+14x-5$
h) $x^5+6x^4+5x^3-24x^2-36x$
i) $x^5+2x^4-3x^3-8x^2-4x$
j) $x^6+2x^5-3x^4-4x^3+4x^2$