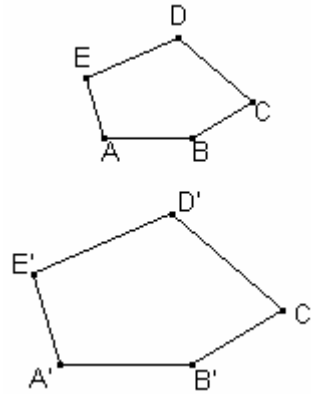


Semblança. Teorema de Tales

Dos polígons són **semblants** si el angles corresponents són iguals i els costats corresponents són proporcionals.

$ABCDE \approx A'B'C'D'E'$ si:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}', \hat{E} = \hat{E}' \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = r \end{cases}$$



Els elements que es corresponen s'anomenen **homòlegs**.

S'anomena **raó de semblança** r a la constant de proporcionalitats entre els costats homòlegs.

Teorema de Tales

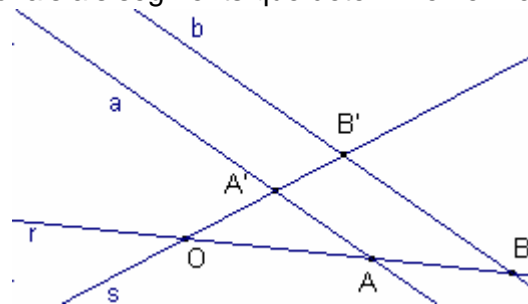
Si dues rectes secants r, s són tallades per paral·leles a, b , els segments que determinen sobre una de les secants són proporcionals als segments que determinen en l'altra secant

a) $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$

També s'acompleix:

b) $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$

c) $\frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BB'}}$

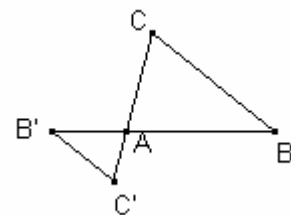
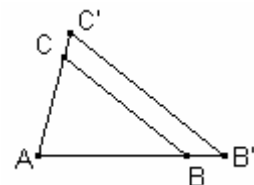


Triangles en posició de Tales:

Dos triangles estan en posició de Tales si dos costats dels dos triangles estan a les mateixes semirectes d'origen

comú o prolongacions i el tercer costat d'un triangle és paral·lel al tercer costat de l'altre triangle.

Dos triangles en posició de Tales són semblants



Criteris de semblança de triangles.

Siguen els triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$

Criteri 1.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, aleshores, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

És a dir, dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els costats corresponents que formen l'angle proporcionals

Criteri 2.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, aleshores, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

És a dir, dos triangles són semblants si tenen dos angles corresponents iguals.

Criteri 3.

Si $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$, aleshores, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

És a dir, dos triangles són semblants si tenen els tres costats corresponents proporcionals.

Relació entre els polígons semblants.

Raó dels perímetres de dos polígons (figures) semblants.

La raó dels perímetres de dos polígons semblants és igual a la raó de semblança.

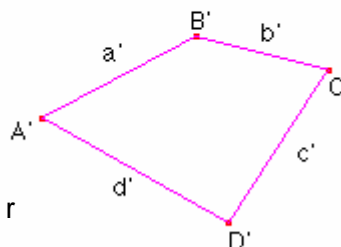
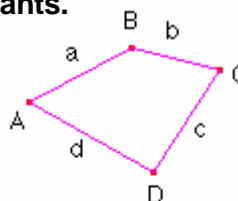
Considerem els polígons semblants ABCD i A'B'C'D'.

Siga r la seua raó de semblança.

Aleshores:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = r$$

$$\frac{\text{perímetre } A'B'C'D'}{\text{perímetre } ABCD} = \frac{a'+b'+c'+d'}{a+b+c+d} = \frac{r(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = r$$



Aquesta relació és certa per a qualsevol parell de segments homòlegs que es prenguen sobre els polígons semblants.

Per exemple, les diagonals d'un quadrat són semblants i tenen la mateixa raó de semblants que la dels quadrats.

Raó de les àrees de dos polígons (figures) semblants.

La raó de les àrees de dos polígons semblants és igual al quadrat de la raó de semblança.

Considerem els rectangles semblants ABCD i A'B'C'D'.

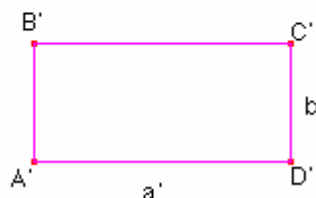
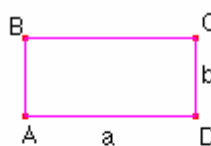
Siga r la seua raó de semblança.

Aleshores:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = r$$

Podem obtenir les següents relacions:

$$\frac{\text{àrea}A'B'C'D'}{\text{àrea}ABCD} = \frac{a' \cdot b'}{a \cdot b} = \frac{r^2 \cdot a \cdot b}{a \cdot b} = r^2$$



Raó dels volums de dos cossos semblants.

La raó dels volums de dos cossos semblants és igual al cub de la raó de semblança.

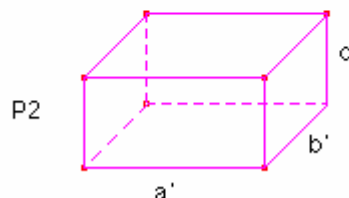
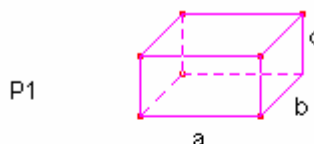
Considerem els paral·lelepípedes semblants:

Aleshores:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = r$$

Podem obtenir les següents relacions:

$$\frac{\text{Volum}P2}{\text{Volum}P1} = \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a \cdot b \cdot c} = \frac{r^3 \cdot a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = r^3$$



Plànols, mapes i maquetes.

Plànols i mapes són figures semblants a la projecció de l'objecte real sobre el plànol (o mapa).

S'anomena **escala** a la raó de semblança entre les figures del plànol (o mapa) i la realitat.

Es representa de la forma 1:r el seu significat és: 1 unitat del plànol correspon a r unitats de la realitat.

Maquetes són construccions de cossos semblants a cossos de la realitat. Les construccions també es fan mitjançant una escala.

Exercicis d'autoaprenentatge.

Exercici 1

Aplicant el teorema de Tales divideu un segment en 3 parts iguals:

Solució:

Dibuixem el segment \overline{AB}

Dibuixem una semirecta d'origen el punt A.

Amb ajut del compàs dibuixem els

punts X, Y, Z tal que $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YZ}$

Dibuixem la recta r que passa pels punts B, Z.

Dibuixem les rectes s, t paral·leles a la recta r que passen pels punts Y, X, respectivament.

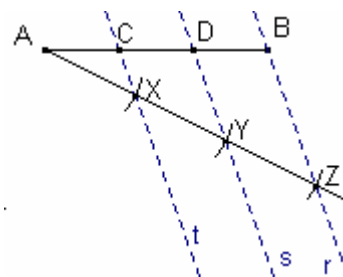
Fem la intersecció de les rectes s, t i el segment \overline{AB} que determinen els punts D, C respectivament.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow 1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}, \text{ aleshores, } \overline{AC} = \overline{CD}$$

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \Rightarrow 1 = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}, \text{ aleshores, } \overline{CD} = \overline{DB}$$

Per tant $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$



Exercici 2:

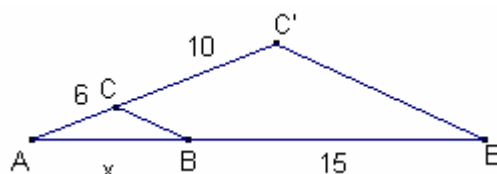
Siguen els triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$.

Calculeu el valor desconegut x.

Solució:

Notem que els dos triangles estan en posició de Tales, per tant

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CC'}}, \quad \frac{x}{15} = \frac{6}{10}, \text{ resolent l'equació } x = 9$$



Exercici 3:

Dos triangles semblants tenen una superfície de 20cm^2 i 30cm^2 respectivament.

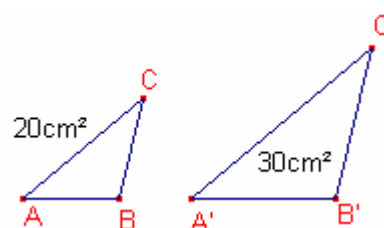
Determineu la raó de semblança dels dos triangles.

Solució:

Si la raó de semblança de dos triangles és r la raó de proporcionalitat de les superfícies és r^2

$$\frac{\text{àrea } A'B'C'}{\text{àrea } ABC} = r^2 \quad r^2 = \frac{30}{20}$$

Aleshores la raó de semblança dels dos triangles és: $r = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.22$



Problemes Proposats.

1. Dividiu un segment qualsevol en 4 parts iguals utilitzant el teorema de Tales. Sabríeu fer-ho per un altre procediments exacte.
2. Dibuixeu un segment qualsevol en 5 parts iguals utilitzant el teorema de Tales.
3. Dividiu un segment qualsevol en 3 parts proporcionals a 2, 3, 5 utilitzant el teorema de Tales.
4. D'aquestes parelles de triangles coneguem els costats, digueu quins són semblants i quins no ho són.

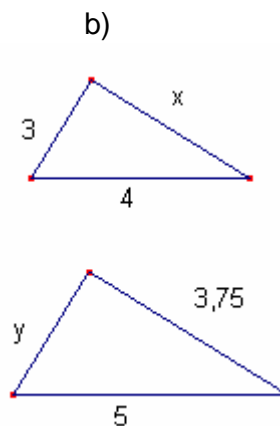
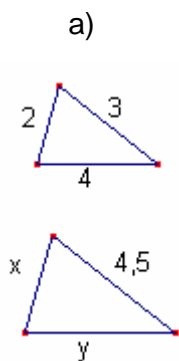
En cas afirmatiu indiqueu quina és la raó de semblança:

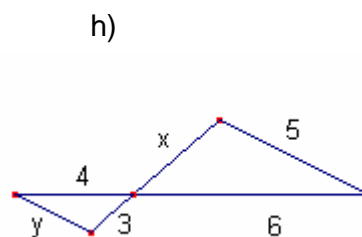
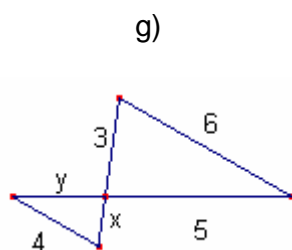
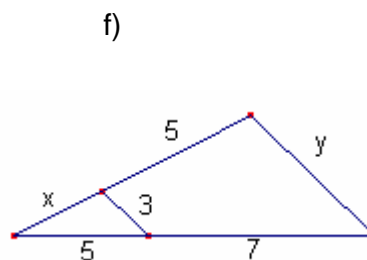
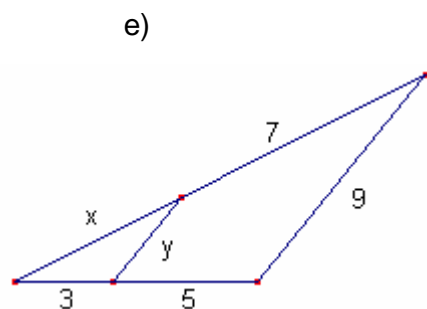
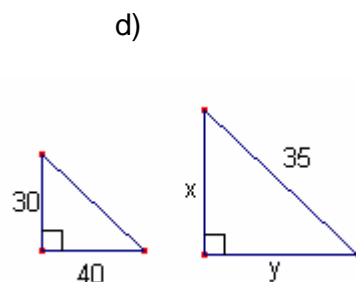
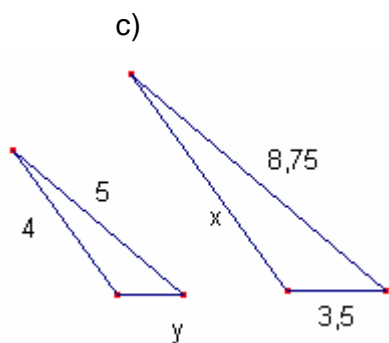
- | | |
|---------------|--------------|
| a) 40, 30, 50 | 120, 90, 150 |
| b) 7, 7, 7 | 20, 20, 20 |
| c) 50, 60, 70 | 6, 7, 8 |
| d) 10, 5, 15 | 6, 3, 9 |
| e) 40, 60, 70 | 6, 9, 10 |
| f) 3, 9, 3 | 20, 40, 20 |
| g) 60, 30, 60 | 2, 4, 2 |

5. Les parelles de triangles següents són semblants. Determineu el cada cas la raó de semblança i els valors desconeguts:

- | | |
|---------------|-----------|
| a) 2, 4, 5 | 4, x, 10 |
| b) 5, 8, 10 | 150, x, y |
| c) 30, 40, 50 | x, 10, y |

6. Les parelles de triangles següents són semblants. Determineu en cada cas la raó de semblança i els valors desconeguts:





7. Les parelles de triangles següents són semblants. Determineu el cada cas els valors desconeguts.

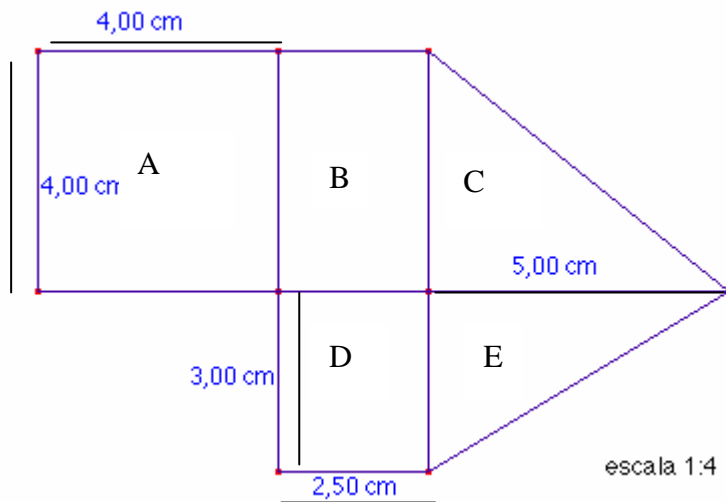
- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| a) $45^\circ, 90^\circ, x^\circ$ | $45^\circ, y^\circ, z^\circ$ |
| b) $35^\circ, 65^\circ, x^\circ$ | $y^\circ, 65^\circ, z^\circ$ |
| c) $35^\circ, 45^\circ, x^\circ$ | $a^\circ, b^\circ, c^\circ$ |
| d) $x^\circ, 35^\circ, y^\circ$ | $105^\circ, a^\circ, b^\circ$ |

8. Una persona mesura 1'75 m en el mateix instant que la mesura de la seua ombra és 1m, l'ombra d'un edifici mesura 25 m. Calculeu l'altura de l'edifici.

9. Un rectangle té una diagonal de 75 m. Calculeu les seues dimensions sabent que és semblant a un altre rectangle de costats 36 m i 48 m.

10. La raó de semblança de dues figures és 6 quina és la relació de les seues àrees? Si la menuda mesura 10cm^2 quina és l'àrea de la gran?
11. L'àrea d'un quadrat és 81 cm^2 . Calculeu la longitud d'un altre quadrat sabent que és més gran i la seua raó de semblança és 5.
12. El volum d'una esfera és de 1000 cm^3 . Calculeu el volum d'una altra esfera que duplique el radi.
13. Una escultura de 100 cm d'alçada pesa 2500 gr .
Quant pesarà una reproducció seua del mateix material i de 220 cm d'alçada?
14. Una mànega de jardí té un radi de $1'2\text{ cm}$. Volem comprar-ne una altra que tire el doble d'aigua. Calculeu el radi que ha de tindre.
15. L'àrea de dos cercles és 25m^2 i 50m^2 . Quina és la seua raó de semblança?
16. Si volem dibuixar una circumferència de longitud 5 vegades més gran que una circumferència de radi 7 quin radi ha de tenir?. Quina serà la seua longitud? Quina serà la seua àrea?.
21. Si volem dibuixar un cercle d'àrea 5 vegades més gran que un cercle de radi 7 quin radi ha de tenir.
17. Un plànol està en escala $1:10.000$
En el plànol dos punts disten 4 cm . Quant disten en la realitat?
En la realitat dos punts disten 3500 m quant disten en el plànol?.
18. Un xalet té forma rectangular (15 m de longitud i 10 d'amplada). Fem un altre xalet semblant que tinga 15 m d'amplada.
Quina és la seua raó de semblança?
Quina àrea té el segon xalet?. En quina proporció estan les àrees?.

19. Considereu el següent plànol.
Calculeu l'àrea real de cada recinte i l'àrea total.



20. Dos dipòsits són semblants un d'ells mesura 2m^3 i l'altre 250m^3 . quina és la raó de semblança?

Si el menut té una superfície de 10m^2 , quina és la superfície del gran?

21. Si el àrea de dos triangles equilàters és 5cm^2 i 25cm^2 respectivament. Són semblants? Per què?. En cas afirmatiu quina és la raó de semblança.

22. Si l'àrea de dos pentàgons regulars és 10cm^2 i 250cm^2 respectivament, són semblants?. Per què?. En cas afirmatiu calculeu la raó de semblança.