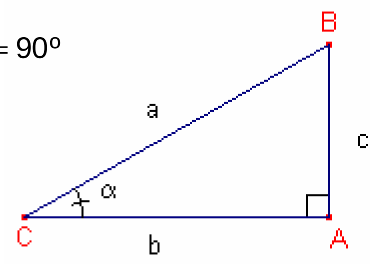
Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Trigonometria
Resolució de triangles.

Raons trigonomètriques d'un angle agut.

Considerarem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ on $A = 90^o$



Recordem que en qualsevol triangle rectangle
Es complia el teorema de Pitàgores:

$a^2 = b^2 + c^2$

Definim sinus de l'angle α i ho representem per $\sin\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

Definim cosinus de l'angle α i ho representem per $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$$

Definim tangent de l'angle α i ho representem per $\mathrm{tg}\,\alpha$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}}$$

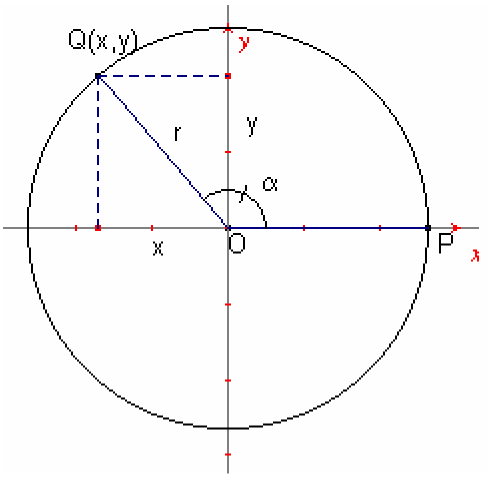
Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol.

Siga el punt Q(x,y)
Considerem la circumferència de centre O que passa pel punt Q i té radi r.
Considerem l'angle $\alpha = \angle POQ$
Definim:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$



Relacions fonamentals entre les raons trigonomètriques.
Donat un angle α es compleixen les següents relacions:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Aquestes dues identitats s'anomenem les relacions fonamentals de la trigonometria.

Ús de la calculadora:

Modes angulars de la calculadora:
MODE DEG mesures sexagesimals
MODE GRA mesures centesimals
MODE RAD mesures en radians

Coneixent l'angle α es poden calcular les raons trigonomètriques amb les tecles sin cos tan
Exemple:
Calculeu $\mathrm{tg}\,43º25'50''$, sin50º30',
Amb calculadores antigues:

43	º ' ”	25	º ' ”	50	º ' ”	tan	=	0.9467

50	º ' ”	30	º ' ”	sin	=	0.7716

Amb calculadores noves

tan	43	º ' ”	25	º ' ”	50	º ' ”	=	0.9467

sin	50	º ' ”	30	º ' ”	=	0.7716

Coneixent les raons trigonomètriques de l'angle α podem calcular l'angle α amb les tecles
$\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$ $\tan^{-1}$
Exemple:
Calculeu l'angle a tal que $\sin\alpha = 0.34$. $\alpha = \arcsin(0.34)$
Amb calculadores antigues:

0.34	$\sin^{-1}$	SHIFT	º ' ”	19º52'37”

Amb calculadores noves:

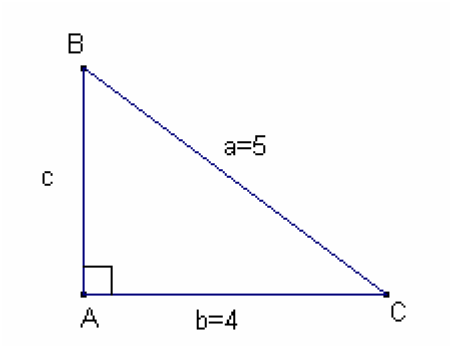
$\sin^{-1}$	0.34	=	SHIFT	º ' ”	19º52'37”

Resolució de triangles rectangles.

Resoldre un triangle és conéixer els tres costats i el tres angles.

Amb l'ajut del teorema de Pitàgores, de les raons trigonomètriques, i de la calculadora es pot resoldre qualsevol triangle rectangle. Vegem els següents exercicis:

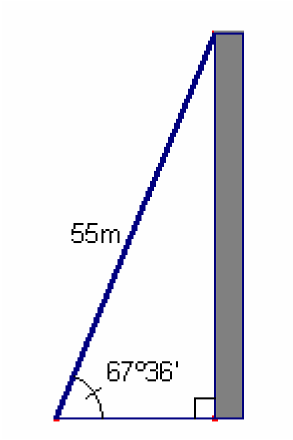
Problema 1:



Del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ on $A = 90^o$ coneguem
$a = 5cm,\ b = 4cm$
Determineu tots els costats, el angles i l'àrea del triangle.

Aplicant el teorema de Pitàgores:
$a^2 = b^2 + c^2$
$5^2 = 4^2 + c^2$, $25 = 16 + c^2$, $c^2 = 9$
Aleshores $c = 3$.
Aplicant qualsevol raó trigonomètrica podem calcular l'angle C.
$\cos C = \dfrac{b}{a}$, $\cos C = \dfrac{4}{5} = 0.8$
Amb ajut de la calculadora $C = \arccos 0.8 = 36^o 52' 12''$
Sabent que els tres angles d'un triangle sumen 180º $(A + B + C = 180^o)$
Tenim que $B + C = 90^o$, Aleshores $B = 90^o – C = 90^o – 36^o 52' 12'' = 53^o 7' 48''$
Per ser el triangle rectangle, l'àrea és $S = \dfrac{b \cdot c}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6cm^2$

Problema 2:



Per pujar d'alt del Miquelet de València utilitzem una escala exterior de 55m, la qual forma amb l'horitzontal un angle de 67º36'.
Amb aquestes dades calculeu l'altura del Miquelet.

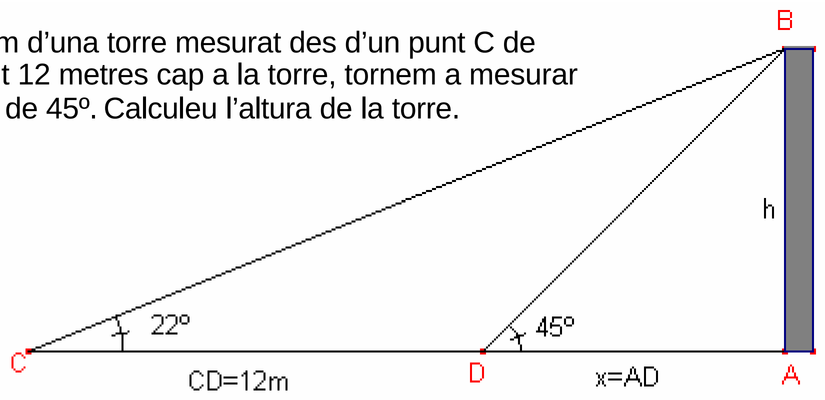
Notem que l'horitzontal, i el Miquelet formen un angle recte.

Siga x l'altura del Miquelet,
Utilitzant la raó trigonomètrica sinus,
$\sin 67^o 36' = \dfrac{x}{55}$
Aleshores, $x = 55 \cdot \sin 67^o 36' = 50'85m$

Problema 3:

L'angle d'elevació del cim d'una torre mesurat des d'un punt C de l'horitzontal és de 22º. Avançant 12 metres cap a la torre, tornem a mesurar l'angle d'observació que és ara de 45º. Calculeu l'altura de la torre.

Solució:
Siga el següent gràfic:



Siga $x = \overline{AD}$, siga $h = \overline{AB}$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $tg22^o = \dfrac{h}{12+x}$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$ $tg45^o = \dfrac{h}{x}$

Amb l'ajut de la calculadora $tg22^o = 0.4040$, $tg45^o = 1$

Considerem el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} h = (12+x)tg22^o \\ h = x \cdot tg45^o \end{cases} \text{ substituint } \begin{cases} h = (12+x)\cdot 0'4040 \\ h = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = x \\ x = (12+x)\cdot 0'4040 \end{cases}$$

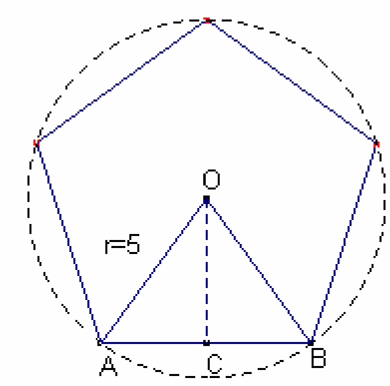
$$\begin{cases} h = x \\ x = 4.8480 + 0'4040x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 8'1342m \\ x = 8'1342m \end{cases}$$

Aleshores l'altura de la torre és 8'1342m

Problema 4:
Calculeu el costat i l'apotema d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 5cm.

Solució:

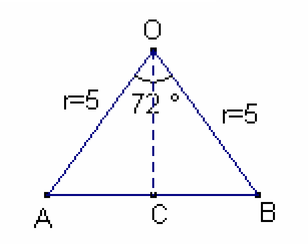


Siga $r = \overline{OA} = 5$ el radi de la circumferència circumscrita al pentàgon regular.

Siga el costat del pentàgon $x = \overline{AB}$

Siga l'apotema del pentàgon $y = \overline{OC}$

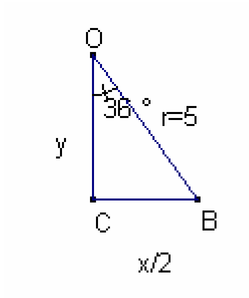
L'angle $\angle AOB = \dfrac{360^o}{5} = 72^o$



Considerem el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABO}$

L'altura del triangle divideix el triangle $\overset{\Delta}{ABO}$ en dos triangles rectangles iguals.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBO}$



L'angle $\angle COB = \dfrac{72^o}{2} = 36^o$

Siguen, $\overline{CB} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{x}{2}$ $\qquad \overline{OC} = y$

Aplicant les raons trigonomètriques:

$$\sin 36^{o} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{x}{2}}{5}$$

$$\sin 36^{o} = \frac{x}{10}$$

Fent ús de la calculadora:

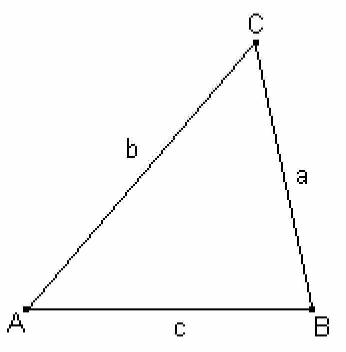
$0'5878 = \frac{x}{10}$, aleshores el costat del pentàgon mesura $x = 5'878\,\text{cm}$

$$\cos 36^{o} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{y}{5}$$

Fent ús de la calculadora:

$0'8090 = \frac{y}{5}$, aleshores l'apotema del pentàgon mesura $y = 4'045\,\text{cm}$

Teorema dels sinus



Els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són proporcionals als sinus dels angles oposats:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Teorema del cosinus.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Es compleixen les següents igualtats.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A}$$

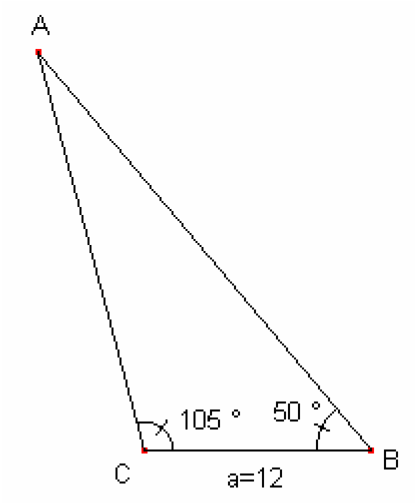
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\hat{C}$$

Càlcul de l'àrea d'un triangle.

$$S = \frac{b\cdot c\cdot\sin\hat{A}}{2} \qquad S = \frac{a\cdot c\cdot\sin\hat{B}}{2} \qquad S = \frac{a\cdot b\cdot\sin\hat{C}}{2}$$

Per a resoldre el triangles, és un gran ajut tenir nocions de dibuix.
Gairebé tots els problemes es poden dibuixar amb regla, escaire, compàs i transportador d'angles.



Problema 5:

Resoleu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, coneguts $a = 12$, $\hat{B} = 50^{o}$, $\hat{C} = 105^{o}$

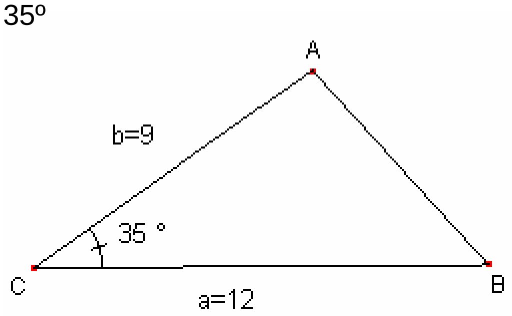
Solució:

Les incògnites són b, c, $\hat{A}$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{o}$
$\hat{A}=180^{o}-(\hat{B}+\hat{C})=180^{o}-(50^{o}+105^{o})=25^{o}$
A partir del teorema dels sinus:
$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$
$$\frac{12}{\sin 25^{o}}=\frac{b}{\sin 50^{o}} \quad \Rightarrow \quad b=12\cdot\frac{\sin 50^{o}}{\sin 25^{o}}\approx 21'75$$
$$\frac{12}{\sin 25^{o}}=\frac{c}{\sin 105^{o}} \quad \Rightarrow \quad c=12\cdot\frac{\sin 105^{o}}{\sin 25^{o}}\approx 27'43$$

Problema 6:

Resoleu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, coneguts $a=12$, $b=9$, $\hat{C}=35^{o}$

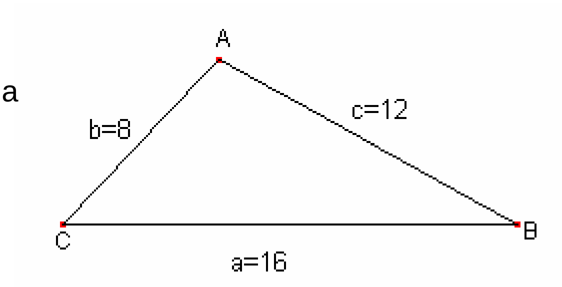


Solució:
Les incògnites són $c, \hat{A}, \hat{B}$
A partir del teorema del cosinus:
$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cdot\cos\hat{C}$

$c^{2}=12^{2}+9^{2}-2\cdot 12\cdot 9\cdot\cos 35^{o}$
$c^{2}=225-176'94 \quad \Rightarrow \quad c^{2}=48'06 \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{48.06}\approx 6'93$
Per a calcular els angles $\hat{A}, \hat{B}$ aplicarem el teorema del cosinus.
$$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\cdot\cos\hat{A} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{A}=\frac{a^{2}-(b^{2}+c^{2})}{-2bc}$$
$$\cos\hat{A}=\frac{12^{2}-(9^{2}+48'06)}{-2\cdot 9\cdot 6'93}=-0'1198$$
Fent ús de la calculadora:
$\hat{A}=\arccos(-0'1198)\approx 96^{o}53'$
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{o}$, per tant,
$\hat{B}=180^{o}-(\hat{A}+\hat{C})=180^{o}-(35^{o}+96^{o}53')\approx 48^{o}7'$

Problema 7:

Resoleu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, coneguts $a=16$, $b=8$, $c=12$
Solució:
Les incògnites són $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$
Podem observar que el problema té solució, perquè,
$a+b>c$
$a+c>b$
$b+c>a$



Aplicant el teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{A} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{-2bc}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{16^2 - (8^2 + 12^2)}{-2 \cdot 8 \cdot 12} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{A} = \frac{-1}{4}$$

Amb l'ajut de la calculadora $A = \arccos\left(\frac{-1}{4}\right) \approx 104º29'$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{B} = \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{-2ac}$$

$\cos\hat{B} = \frac{7}{8}$ Amb l'ajut de la calculadora $\hat{B} = \arccos\left(\frac{7}{8}\right) \approx 28º57'$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, per tant,

$\hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) = 180º - (104º29' + 28º57') \approx 46º34'$

Problema 8:

Resoleu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, coneguts $a = 60,\ b = 30,\ \hat{B} = 25º$

Solució:

Les incògnites són $c,\ \hat{A},\ \hat{C}$

Aplicant el teorema dels sinus,

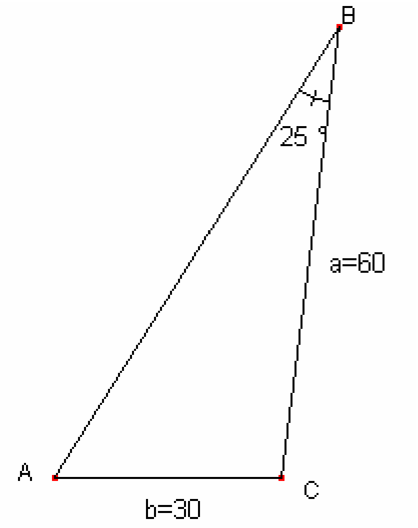
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad \frac{60}{\sin\hat{A}} = \frac{30}{\sin 25º}$$

$$\sin\hat{A} = \frac{60 \cdot \sin 25º}{30} = 0'84524$$

Amb l'ajut de la calculadora:

$$A = \arcsin(0.84524) \approx \begin{cases} 57º42' \\ 122º18' \end{cases}$$

El problema té dues solucions:



Primera solució:

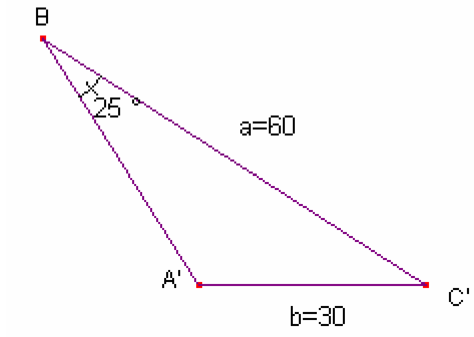
Si $\hat{A} \approx 57º42'$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, per tant,

$\hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 97º18'$

Pel teorema dels sinus:

$$c = a \cdot \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}} = \frac{60 \cdot \sin 97º18'}{\sin 57º42'} \approx 70'41$$



Segona solució:

Si $\hat{A} \approx 122º18'$

$\hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 32º42'$

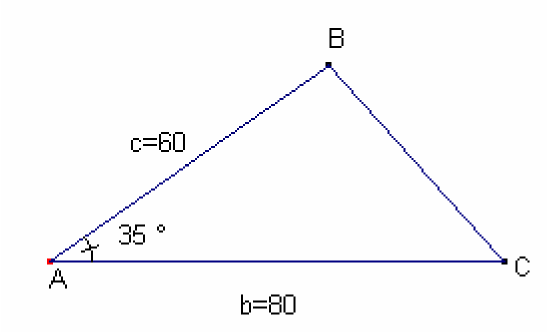
Pel teorema dels sinus:

$$c = a \cdot \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} a = \frac{60 \cdot \sin 32º42'}{\sin 57º42'} \approx 38'35$$

Problema 9:

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts $b = 80cm,\ c = 60cm,\ \hat{A} = 35º$

Solució:



L'àrea del triangle és

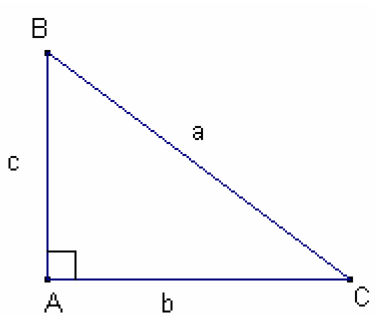
$S = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\hat{A}}{2}$, per tant,

$$S = \frac{bc \cdot \sin\hat{A}}{2} = \frac{80 \cdot 60 \cdot \sin 35º}{2} \approx 1376'58cm^2$$

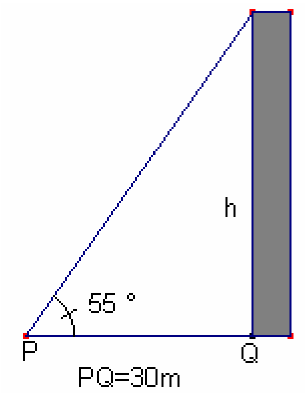
Problemes proposats de triangles

1 Resoleu els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$ coneguts:

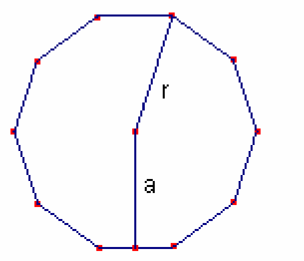
a) $a = 100cm,\ b = 7cm$
b) $b = 25m,\ c = 35m$
c) $a = 10cm,\ B = 40º35'$
d) $b = 75m,\ B = 55º$
e) $b = 10cm,\ C = 32º30'$
f) $c = 10cm,\ \sin C = \dfrac{1}{5}$
g) $b = 10m,\ tg\ C = 5$



2 Calculeu l'altura de la torre.



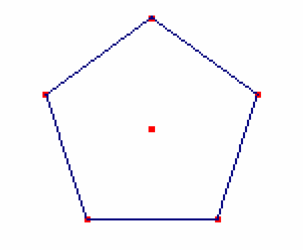
3 Calculeu l'àrea i l'apotema d'un decàgon regular de costat 20cm.



4 Calculeu el perímetre i l'àrea d'un decàgon regular d'apotema 10cm.

5 Calculeu el costat i l'àrea d'un decàgon regular inscrit en una circumferència de radi 10cm

6 Calculeu l'àrea i l'apotema d'un pentàgon regular de perímetre 100cm.



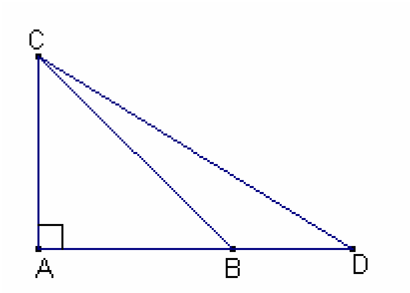
7 Calculeu els angles i el costat d'un rombe de diagonals 60cm, 80cm.

8 Calculeu l'àrea i el perímetre d'un dodecàgon regular inscrit en una circumferència de 10cm de radi.

9 L'àrea d'un triangle rectangle és $6m^2$ i la hipotenusa mesura 5m. Calculeu els angles i els catets del triangle rectangle.

10 Calculeu l'altura d'una torre, sabent que l'angle d'elevació des d'un punt A i l'horitzontal és de 45º, que des d'un punt B a 25m del punt A i més prop de la torre l'angle d'elevació és de 60º.

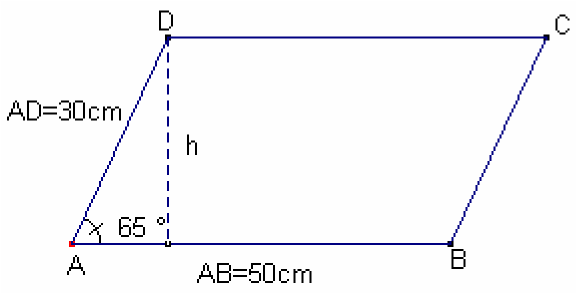
11 Resoleu:
a)
Dades conegudes:
$\overline{BD} = 10cm, \angle ABC = 60º, \angle ADC = 45º$
Incògnites:
$\overline{AC}, \overline{BC}, \angle BCD$



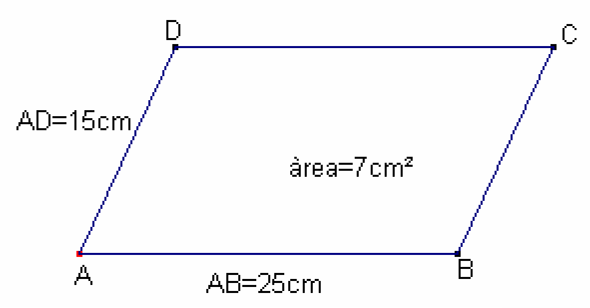
b)
Dades conegudes:
$\overline{CD} = 10cm, \overline{AB} = 4cm, \angle ADC = 25º$
Incògnites:
$\overline{BC}, \overline{BD}, \angle BCD$

c)
Dades conegudes:
$BC = 20cm, \angle ACB = 30º, \angle BCD = 25º$
Incògnites:
$\overline{AC}, \overline{CD}, \angle BDC$

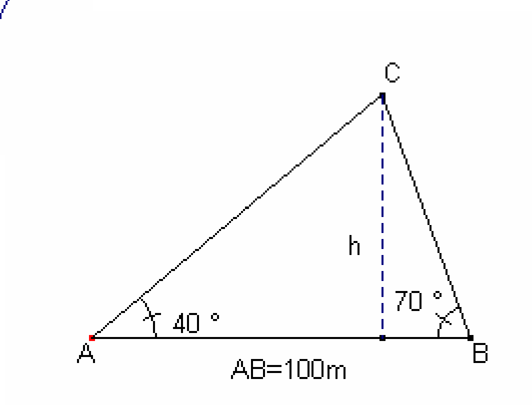
11 Determineu l'àrea del paral·lelogram següent:



13 Determineu els angles del paral·lelogram següent:



14 Calculeu l'altura h de la següent figura:



15 Resoleu els següents triangles coneguts:

a) $b = 20cm,\ c = 35cm,\ A = 55^o$

b) $a = 15cm,\ b = 25cm,\ c = 35cm$

c) $a = 20cm,\ A = 35^o,\ B = 75^o$

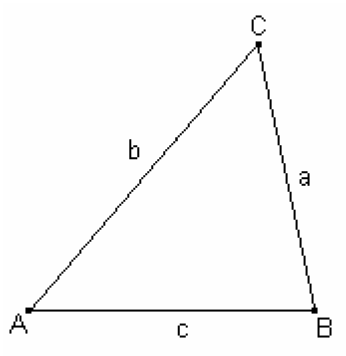
d) $c = 15cm,\ A = 25^o,\ B = 65^o30'$

e) $a = 30cm,\ b = 55cm,\ B = 80^o$

f) $a = 10cm,\ b = 10cm,\ c = 8cm$

g) $a = 10cm,\ b = 45cm,\ C = 30^o45'$

h) $a = 20cm,\ c = 60,\ A = 25^o$



16 Calculeu l'àrea dels triangles coneguts:

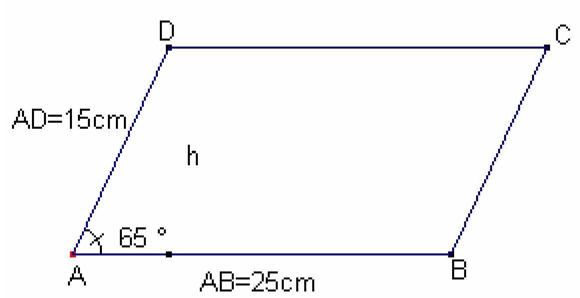
a) $a = 25cm,\ c = 35cm,\ B = 55^o$

b) $a = 10cm,\ b = 25cm,\ c = 30cm$

c) $c = 25cm,\ A = 35^o,\ B = 75^o$

d) $a = 30cm,\ b = 60cm,\ B = 80^o$

17 En el següent paral·lelogram calculeu les diagonals.



18 Calculeu la longitud del costats d'un triangle isòsceles sabent que l'altura sobre el costat desigual mesura 15cm i l'angle desigual 80º.

19 Resoleu un triangle isòsceles sabent que els costats iguals mesuren 10cm i l'àrea mesura $40cm^2$.