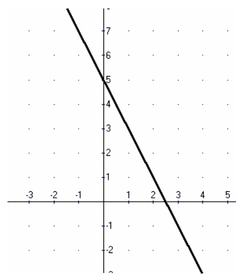
Mª Àngels Lonjedo

Ricard Peiró

LA RECTA, LA PARÀBOLA I LA HIPÈRBOLA

La recta

Una **recta** és una funció de la forma $y = mx + n$.
m és el pendent de la recta i n és l'ordenada a l'origen.
L'ordenada a l'origen ens indica el punt de tall amb l'eix Y: (0, n)



$y = -2x + 5$

Segons el signe de m:

$$\begin{cases} \text{si } m > 0 & \text{la recta és creixent} \\ \text{si } m < 0 & \text{la recta és decreixent} \\ \text{si } m = 0 & \text{la recta és constant i la seua gràfica és paral·lela a l'eix X} \end{cases}$$

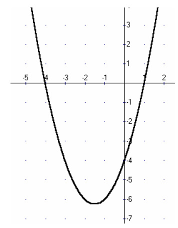
Si n=0 la recta és de la forma $y = mx$, i l'anomenem **funció lineal**. Aquesta funció passa per l'origen de coordenades.
Si n?0 la recta és de la forma $y = mx + n$ i l'anomenem **funció afí**.

Dues rectes són paral·leles si tenen el mateix pendent i distinta ordenada a l'origen.
Dues rectes són secants si tenen distint pendent. Per treure el punt on es tallen resoldrem el sistema que formen les dues rectes.

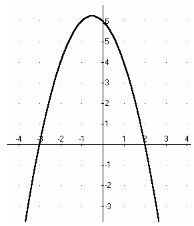
La paràbola

La funció quadràtica o **paràbola** és de la forma $y = ax^2 + bx + c$ on $a \neq 0$
L'orientació de la paràbola depén del signe de a:

$$\begin{cases} a > 0 \text{ branques cap a dalt} \rightarrow \text{funció còncava} \\ a < 0 \text{ branques cap a baix} \rightarrow \text{funció convexa} \end{cases}$$



$f(x) = x^2 + 3x - 4$



$g(x) = -x^2 - x + 6$

L'eix de simetria ve donat per la recta $x = \dfrac{-b}{2a}$

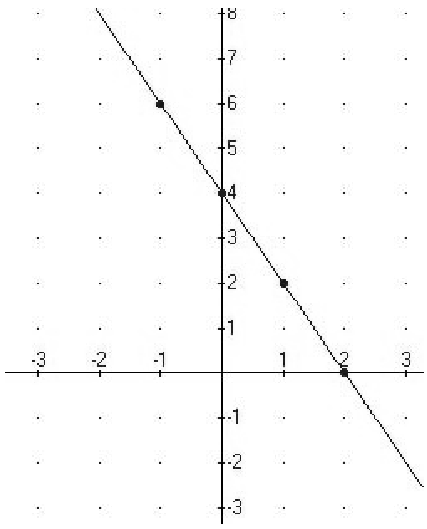
El vèrtex de la paràbola té per abscissa $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
L'ordenada la trobarem substituint aquest valor de x_0 a la funció.
Els punts de tall amb l'eix d'abscisses venen donats per les dues solucions de l'equació de segon grau $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Són: (x_1, 0) i (x_2, 0).
El punt de tall amb l'eix d'ordenades ve donat pel punt (0, c).

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Exercici 1:
Representeu gràficament la funció $f(x) = -2x + 4$

Per dibuixar una recta $f(x) = mx + n$ cal estudiar el pendent m que ens dirà si es creixent o decreixent la funció.
Determinar el punt de tall amb l'eix d'ordenades que és (0, n)
Determinar dos punts de la funció.
Determinar el punt de tall amb l'eix d'abscisses, $f(x) = 0$. Per a la qual cosa resoldrem l'equació $mx + n = 0$

SOLUCIÓ:
El pendent de la recta és –2, per tant la funció és decreixent.
L'ordenada en l'origen és 4, per tant la funció talla l'eix d'ordenades en el punt (0, 4).



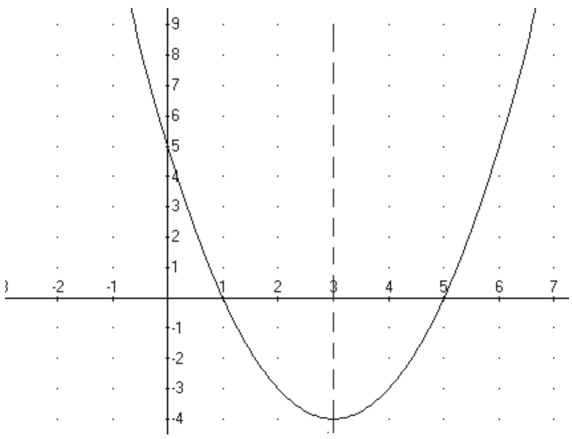
Busquem dos punts de la recta

x	f(x)
?1	6
1	2

El punt de tall amb l'eix d'abscisses és:
$f(x) = 0$, $-2x + 4 = 0$, $x = 2$ és a dir el punt $(2, 0)$.

Exercici 2:
Siga la funció : $y = x^2 - 6x + 5$. Estudieu-la i dibuixeu-la.
SOLUCIÓ:
És una paràbola amb les branques cap a dalt, perquè $a = 1 > 0$.
L'eix de simetria és la recta $x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$.
El vèrtex té per abscissa: $x_0 = 3$ i per ordenada: $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$
Aleshores el vèrtex és el punt (3, –4)
Pels punts de tall amb l'eix d'abscisses fem : $x^2 - 6x + 5 = 0$.
Resolem i obtenim:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} = \frac{10}{2} = 5 \\ = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}.$$



Aleshores els punts de tall són: (5, 0) i (1, 0)
El punt de tall amb l'eix d'ordenades és (0, 5).

Exercici 3:

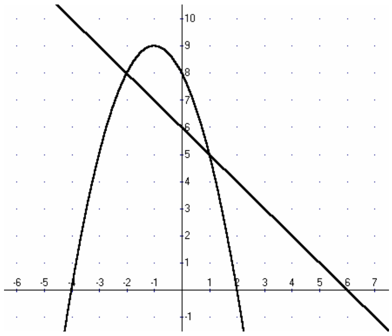
Determineu el punt (o els punts) d'intersecció de la paràbola $y=-x^2-2x+8$ i la recta $y=-x+6$.

Els punts d'intersecció són les solucions del sistema format per ambdues equacions.
Poden haver 1, 2 o cap solució:

$$\begin{cases} y=-x^2-2x+8 \\ y=-x+6 \end{cases}$$

El resolem per igualació de les incògnites:

$$\begin{cases} -x^2-2x+8=-x+6 \\ y=-x+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2-x+2=0 \\ y=-x+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{-2} \\ y=-x+6 \end{cases}$$



El sistema de dues solucions: $\begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$

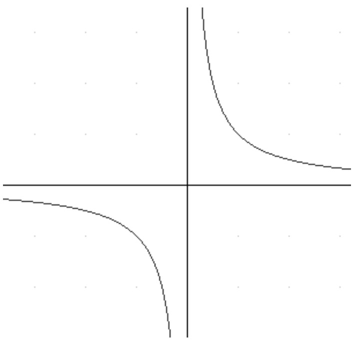
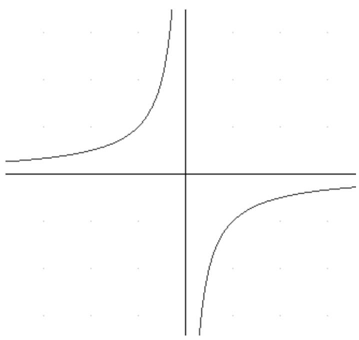
Els punts d'intersecció són $A(-2,8)$, $B(1,5)$

La hipèrbola equilàtera

Anomenem **funció de proporcionalitat inversa** o hipèrbola equilàtera a la funció $y=f(x)=\dfrac{k}{x}$ on k és la raó de proporcionalitat. Noteu que la funció compleix $x\cdot y=k$

El domini de la funció és $R\sim\{0\}$. El recorregut és $R\sim\{0\}$

Noteu que $f(-x)=-f(x)$. La funció és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

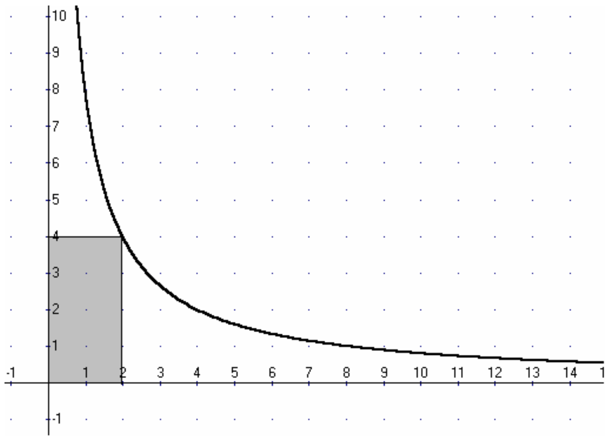
Si k>0 la gràfica de la funció és de la següent forma. La funció és decreixent.	Si k<0 la gràfica de la funció és de la següent forma. La funció és creixent
	

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Exercici 4:

Determineu la relació entre els costats dels rectangles d’àrea 8cm^2. Dibuixeu la gràfica de la funció.
Suposem que un costat és x i l’altre costat és y
L’àrea del rectangle és $x \cdot y = 8$.
Aquesta és la fórmula que relaciona els dos costats.
O bé: $y = \dfrac{8}{x}$
Per a representar la funció construïm una taula:

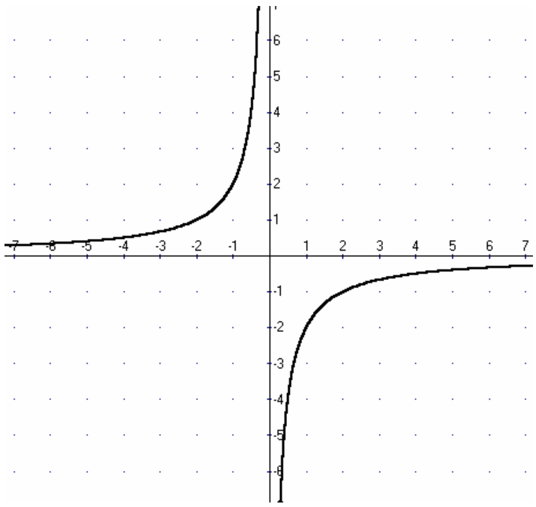
x	y
0’5	16
1	8
2	4
2’5	3’2
3	8/3
4	2
5	1’6
8	1
10	0’8



La funció és una hipèrbola equilàtera de constant $k = 8$

Exercici 5:
Estudieu i representeu la següent funció:
$f(x) = \dfrac{-2}{x}$
La funció és una hipèrbola equilàtera. La constant de proporcionalitat és $k = -2$
El domini de la funció és $R - \{0\}$. El recorregut és $R \sim \{0\}$
La funció és simètrica respecte l’origen de coordenades.
És una funció creixent.
Per a dibuixar-la fem una taula de valors:

x	y	$x \cdot y$
–4	0.5	–2
–2	1	–2
–1	2	–2
–0.5	4	–2
0.5	–4	–2
1	–2	–2
2	–1	–2
4	–0.5	–2
8	–0.25	–2



Exercicis proposats:

1. Completa la taula :

Funció	Tipus	Pendent	Ordenada a l'origen	Creixement o decreixement
$y=-3x$				
$y=x+4$	afí			creixent
$y=-5$				constant
$y=-x+10$				
$y=\frac{1}{3}x$	lineal			
$y=$		6	–3	

2. Dibuixeu les gràfiques següents:

a) $y=2x-3$

b) $y=-3x+4$

c) $y=5-x$

d) $4(y-x)=3(1-x)$

e) $y=20(x-2)$

f) $3x-y=-1$

3. Determineu les equacions de les rectes:

a) La recta que passa per (–1, 3) i (2, –3). Dibuixeu-la.

b) La recta que passa per (0, 6) i és paral·lela a la recta $y=2x-3$.

c) La recta que passa per (1, 3) i (2, 5).

d) La recta que té pendent –1 i passa per (2, -1).

e) La recta que passa per l'origen i és paral·lela a $y=-3x+5$.

f) La recta que passa per (0, -5) i té pendent $\frac{-1}{2}$

g) La recta que passa per (0, 2) i per (-1, 0).

4. En les següents rectes digueu quin és el seu pendent i calculeu l'equació d'una paral·lela que passe per (1, 1).

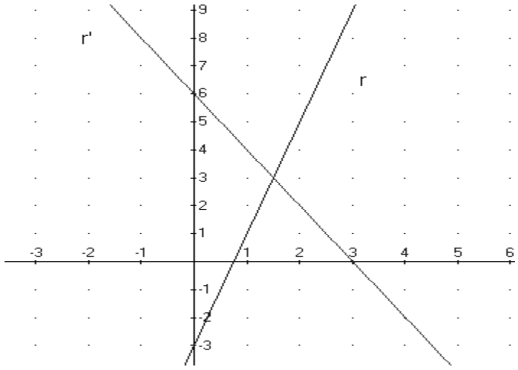
a) $y=3x$

b) $y=-\frac{2}{3}x+2$

c) $y=-x+1$

d) $y=x-1$

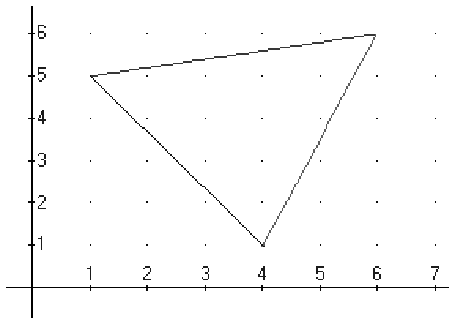
5. Calculeu les equacions de les rectes r i r’ de la figura:



6. Determineu la recta r que passa pels punts $A(2,-1), B(3,4)$ i la recta s que té pendent 2 i passa pel punt $C(1,1)$. Dibuixeu-les.
Determineu el punt on es tallen les rectes.

7. Determineu el punt d’intersecció de les rectes $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = -2x + 5$. Dibuixeu-les.

8. Calculeu les equacions de les rectes que determinen els costats del triangle i després comprova que els vèrtex són les solucions dels sistemes que determinen aquestes rectes dos a dos.



9. En una línia d’autobús, el bitllet costa 1.5 €, més 0.2 € per cada quilòmetre de trajecte.
Escriviu la funció que relaciona el nombre de quilòmetres recorreguts amb el preu del viatge.
Representeu-la.
Quants quilòmetres podem fer en aquesta línia amb 6.5 €.

10. Una companyia telefònica cobra 12 € pel lloguer del telèfon al mes i 0’12 € per cada pas de conversació. Calculeu les despeses d’una família si ha fet els passos següents : 17 passos a la primera setmana del mes, 24 a la segona, 15 a la tercera i 34 a la quarta. Calculeu les despeses de cada setmana i del mes. Determineu una funció que represente les despeses telefòniques al mes.

11. Dibuixeu les següents funcions quadràtiques:

a) $y = x^2 - 6x + 10$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = -x^2 - 4x - 2$

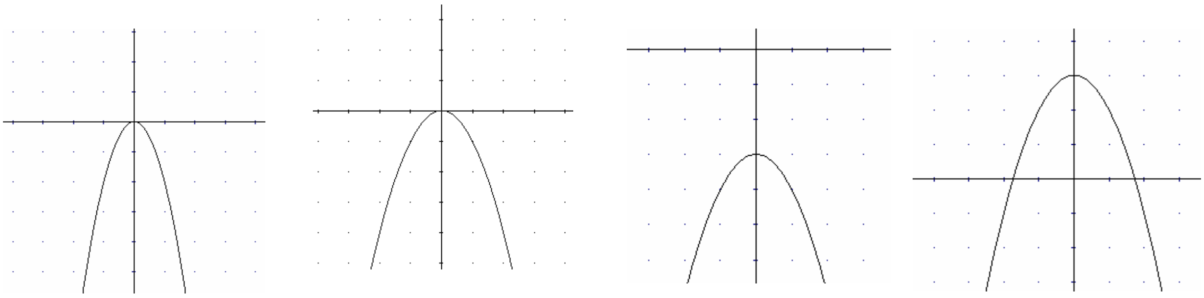
d) $y = x^2 - 4$

e) $y = -2x^2 - x + 6$

f) $y = x^2 + 2x + 2$

12. Identifiqueu les següents funcions:

$f(x) = -x^2$ $\quad$ $g(x) = -x^2 + 3$ $\quad$ $m(x) = -x^2 - 3$ $\quad$ $n(x) = -2x^2$



a) $\quad$ b) $\quad$ c) $\quad$ d)

13. Siga la funció $f(x) = x^2 + mx + m$. Determineu m sabent que la gràfica passa pel punt $(-2, 7)$.

14. Siga la funció $f(x) = x^2 + mx + n$. Determineu m i n sabent que la gràfica passa pels punts $(1, 0), (-3, 4)$.

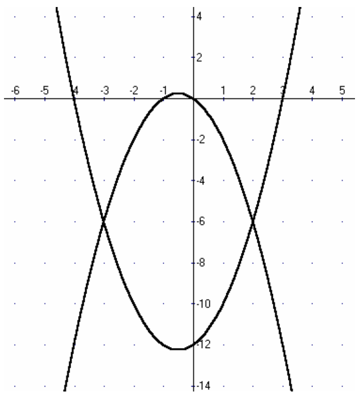
15. Siga la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determineu a, b, c sabent que la gràfica passa pels punts $(1, 0), (0, 0), (-1, 2)$.

16. Determineu el punt (o els punts) d'intersecció de la paràbola $y = x^2 + 2x$ i la recta $y = 2x + 1$.

17. Determineu el punt (o els punts) d'intersecció de la paràbola $y = -x^2 + 2x + 3$ i la recta $y = 3x + 3$. Dibuixeu-les

18. Determineu el punt (o els punts) d'intersecció de la paràbola $y = 2x^2 - 8$ i la recta $y = -x + 7$.

19. Determineu el punt o els punts d'intersecció de les paràboles:



20. Determineu el punt o els punts d'intersecció de les paràboles $y = x^2 + x$, $y = -x^2 - x + 12$. Dibuixeu-les.

21. Determineu el punt o els punts d'intersecció de les paràboles $y = 3x^2 - 3$, $y = x^2 - 6x + 5$. Dibuixeu-les.

22. Determineu una funció que calcule el producte de dos nombres que sumen 32. ¿Quin tipus de funció és?. Dibuixeu-la.

23. Al llençar una pedra a l'aire l'altura de la pedra segueix la següent funció $f(t) = -5t^2 + 50t$ on t és el temps en segons, i f(t) l'altura en metres.
Calculeu en quin segon s'assoleix la màxima altura i quina és la màxima altura
En quin segon cau a terra?.
Representeu la funció.

24. Representeu les funcions:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

b) $g(x) = \frac{3}{x}$

c) $h(x) = \frac{0'5}{x}$

d) $r(x) = \frac{-1}{x}$

e) $s(x) = \frac{-4}{x}$

f) $t(x) = \frac{-0'25}{x}$

g) $x \cdot y = 4$

h) $x \cdot y = -6$

i) $x \cdot y = 2'5$

25. Determineu la relació entre els costats dels rectangles d'àrea $60 cm^2$. Dibuixeu la gràfica de la funció.

26. Per fer una feina cal treballar durant 90 hores. Si són 3 treballadors per fer la feina cadascun ha de treballar 30h. Completeu la taula següent:

Nombre treballadors	Hores que dedica cada treballador
1	
3	30
5	
10	
15	
20	
30	
50	

Representeu gràficament la funció que relacione les hores que treballarà cadascun d'ells en funció del nombre de treballadors.

60	
90	
180	
x	