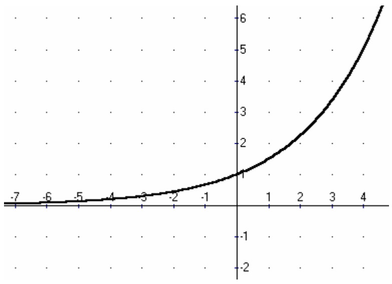
Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

LA FUNCIÓ EXPONENCIAL I LA FUNCIÓ LOGARÍTMICA. FUNCIONS DEFINIDES A TROSSOS.

Funció exponencial

La funció exponencial és de la forma $f(x) = a^x$, on $a > 0$, $a \neq 1$
El valor a s'anomena base de la funció exponencial.

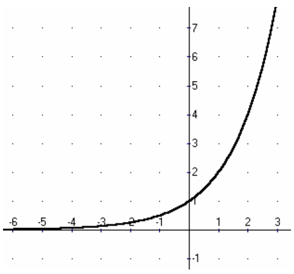
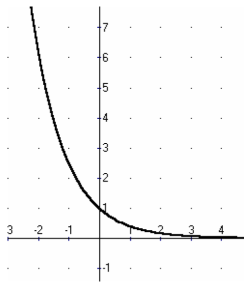


$y = 1'5^x$

Propietats:

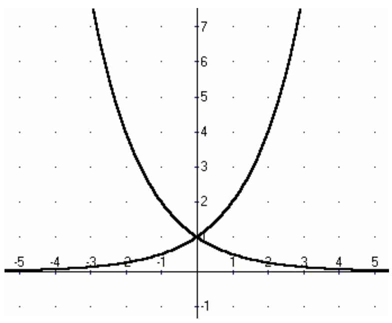
- El domini és R.
- El recorregut és $]0,+\infty[$
- La funció és contínua en R.
- $f(0) = 1$
- Si $f(x) = f(y)$, aleshores $x = y$,

  és a dir, si $a^x = a^y$, aleshores $x = y$
- $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
-

Si $a > 1$ la funció és creixent	Si $0 < a < 1$ la funció és decreixent
 $y = 2^x$	 $y = 0.4^x$

- Les gràfiques de les funcions $f(x) = a^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ són simètriques respecte de l'eix d'ordenades OY

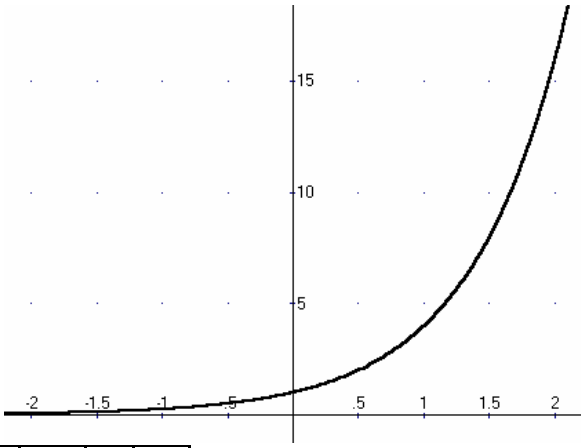
$y = 0.5^x$ $y = 2^x$



Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Exercici 1:

Estudieu i representeu la funció $f(x) = 4^x$.



És una funció exponencial de base $a = 4$
El seu domini és R
El recorregut és $]0,+\infty[$
És una funció creixent.
La funció és contínua en R

Construïm una taula de valors de la funció:

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32

Exercici 2:

Resoleu l'equació exponencial: $3^{x-1} = 729$
Intentarem que les dues parts de l'equació siguen dues potències de la mateixa base:
$729 = 3^6$
$3^{x-1} = 3^6$
Igualant els exponents:
$x - 1 = 6$
Resolent l'equació $x = 7$

Nota: per resoldre equacions on no podrem obtenir a les dues parts de la igualtat potències de la mateixa base, s'aplicaran logaritmes. Per exemple $2^x = 3$

Exercici 3:

Resoleu l'equació exponencial: $3^{2x} - 3^{x+1} - 3^x = 45$
Per resoldre aquest tipus d'equacions utilitzarem incògnites auxiliars:
Efectuen el canvi $y = 3^x$
Aleshores: $3^{2x} = \left(3^x\right)^2 = y^2$, $\quad 3^{x+1} = 3^x \cdot 3 = 3y$
L'equació inicial es transformaria en la següent:
$y^2 - 3y - y = 45$
Resolem l'equació de segon grau:

$$y^2 - 4y - 45 = 0, \qquad y = \frac{4 \pm \sqrt{16+180}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{4 \pm 14}{2}, \quad y = 9, \quad y = -5$$

Desfem el canvi:
$y = 3^x = 9$, aleshores $3^x = 3^2$, igualant exponents, $x = 2$
$y = 3^x = -5$, l'equació $3^x = -5$ no té solució, la funció exponencial sempre és positiva.

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Exercicis proposats:

1. Amb ajut de la calculadora, efectueu les següents operacions:

a) $2^{1/3} =$
b) $2^{-2/5} =$
c) $2^{1'3} =$
d) $2^{-2'7} =$
e) $2^{\sqrt{3}} =$
f) $2^{-\sqrt{5}} =$
g) $2^{\pi} =$
h) $2^{-\pi} =$
i) $2^{2+\sqrt{2}} =$

2. La calculadora té dues funcions exponencials $\boxed{10^x}$ $\boxed{e^x}$
Amb ajut de la calculadora, efectueu les següents operacions:

a) $10^{1'3} =$
b) $10^{-3'6} =$
c) $10^{5/4} =$
d) $10^{-7/3} =$
e) $10^{\sqrt{10}} =$
f) $10^{-\sqrt{3}} =$
g) $e^{2'3} =$
h) $e^{-1'6} =$
i) $e^{3/4} =$
j) $e^{-5/3} =$
k) $e^{\sqrt{2}} =$
l) $e^{-\sqrt{5}} =$

3. Estudieu i representeu les següents funcions:

a) $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = 3^x$
c) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
d) $m(x) = 2'5^x$
e) $n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
f) $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
g) $q(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
h) $r(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

4. Estudieu i representeu les següents funcions:

a) $f(x) = 10^x$
b) $g(x) = e^x$
c) $h(x) = 2 \cdot 10^x$
d) $m(x) = 5 \cdot e^x$
e) $n(x) = -3 \cdot 10^x$
f) $p(x) = -5 \cdot e^x$
g) $q(x) = 0'1^x$
h) $r(x) = 100^x$

5. La majoria de les bactèries es reprodueixen per bipartició, és a dir, una cèl·lula mare es divideix en dues cèl·lules filles. Suposem que un tipus de bactèries necessita 1 hora per duplicar-se. Completeu la taula següent. Definiu la funció i representeu-la gràficament.

x(hores)	0	1	2	3	4	5	6	x
Y(bactèries)								

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

6. La pressió atmosfèrica varia segons l'altura amb la següent fórmula $P(x)=0'9^{x}$, on x és l'altura en quilòmetres i P(x) la pressió atmosfèrica en atmosferes.
Representeu la funció.

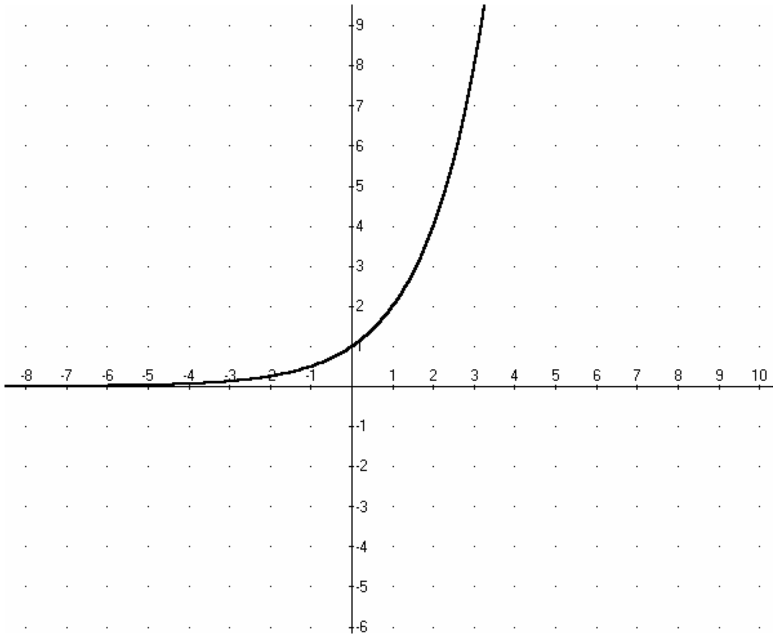
7. Donada la funció $f(x)=2^{x}$
Sense fer taula de valors dibuixeu les funcions:

$g(x)=2^{x}+3$

$h(x)=2^{x}-4$

$m(x)=2^{x+2}$

$n(x)=2^{x-1}$



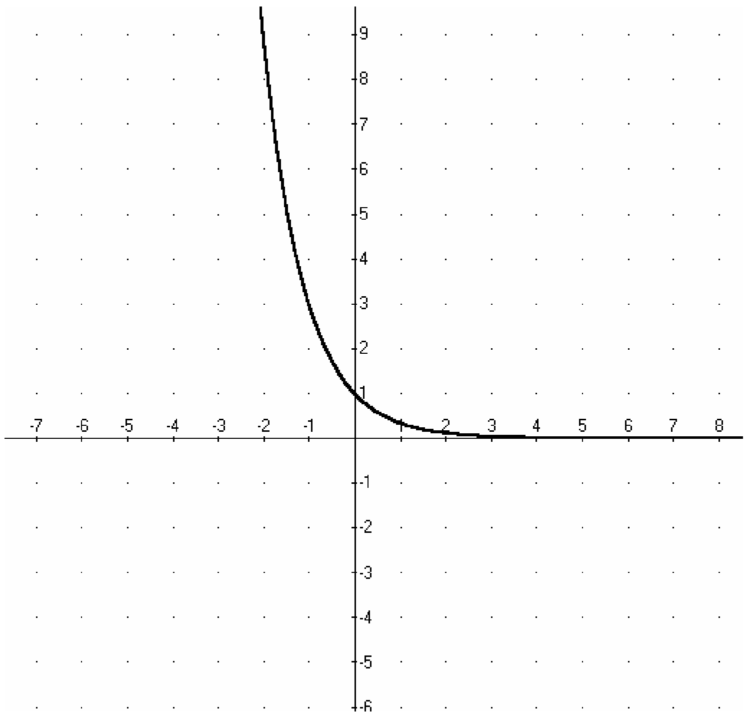
8. Donada la funció $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$
Sense fer taula de valors dibuixeu les funcions:

$g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+4$

$h(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-3$

$m(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

$n(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$



9. Resoleu les següents equacions:

a) $7^{x+1} = 7^{3x+2}$
b) $5^{x+3} = 5$
c) $2^{x} = 1024$
d) $2^{3x+1} = 1$
e) $3^{5x} = 81$
f) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$
g) $3^{x} = \sqrt{3}$
h) $7^{x-1} = 49^{3x-2}$
i) $25^{2x} = 125^{x-1}$
j) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 14$
k) $7^{x} + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$
l) $3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^{x+3} = -5$
m) $3 \cdot 2^{x} - 5 \cdot 2^{x-2} = 14$
n) $2 \cdot 3^{x+3} + 4 \cdot 3^{x+4} = 14$
o) $3^{2x} - 3^{x+1} = 54$
p) $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$
q) $4^{x} - 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x} = 24$
r) $9^{x} - 5 \cdot 3^{x+2} - 7 \cdot 3^{x} = 2349$

La funció logarítmica

Siga $a > 0$, $a \neq 1$
Definim logaritme base a de x i ho representem $\log_a x$ al valor y $\log_a x = y$ tal que:
$a^y = x$, és a dir, l'operació inversa de l'exponencial.

Exercici 4:

Calculeu $\log_2 8$, $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$, $\log_7 \sqrt[3]{49}$

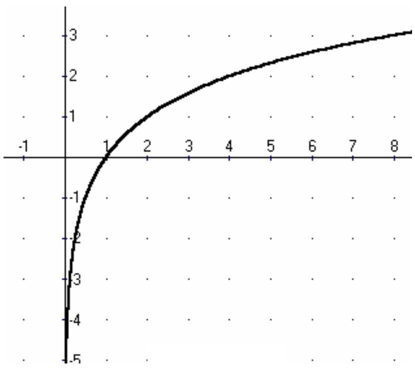
$\log_2 8 = y$, $2^y = 8$, $2^y = 2^3$, per tant, $y = 3$. Aleshores, $\log_2 8 = 3$

$\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = y$, $3^y = \frac{1}{81}$, $3^y = 3^{-4}$, per tant, $y = -4$. Aleshores $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$

$\log_7 \sqrt[3]{49} = y$, $7^y = \sqrt[3]{49}$, $7^y = 7^{2/3}$, per tant, $y = \frac{2}{3}$. Aleshores $\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$

Funció logarítmica:

A la funció $f(x) = \log_a x$, on $a > 0$, $a \neq 1$ s'anomena funció logarítmica

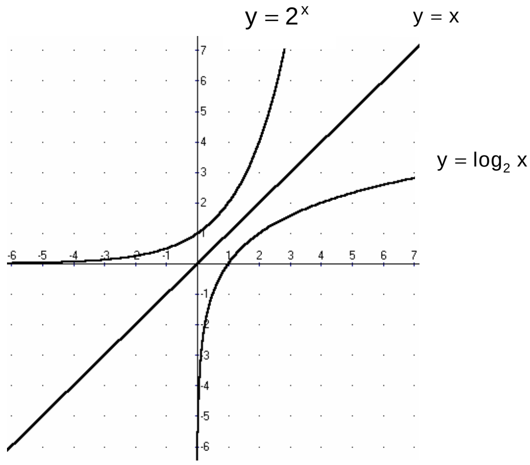


$y = \log_2 x$

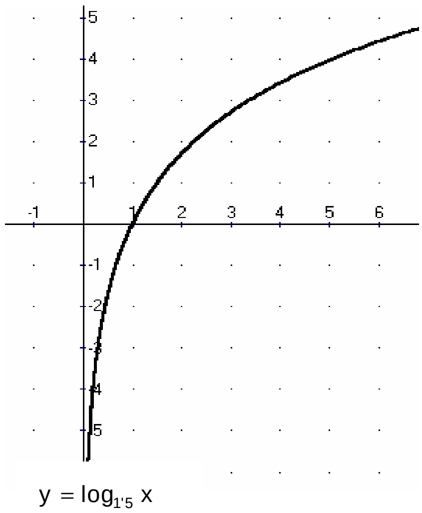
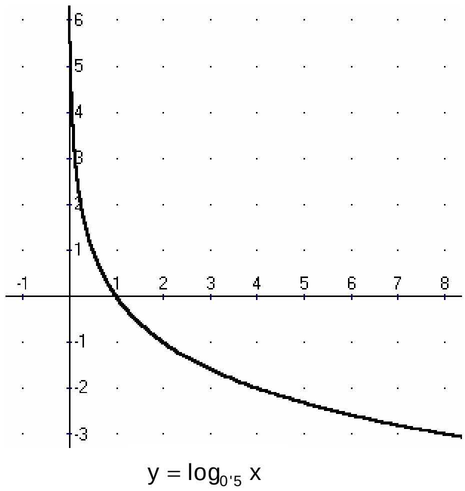
Propietats del logaritmes i la funció logarítmica

- El domini de la funció logarítmica és $]0,+\infty[$
- El recorregut de la funció logarítmica és R.
- La funció és contínua en $]0,+\infty[$
- Si $\log_a x = \log_a y$, aleshores, $x = y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^p = p$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

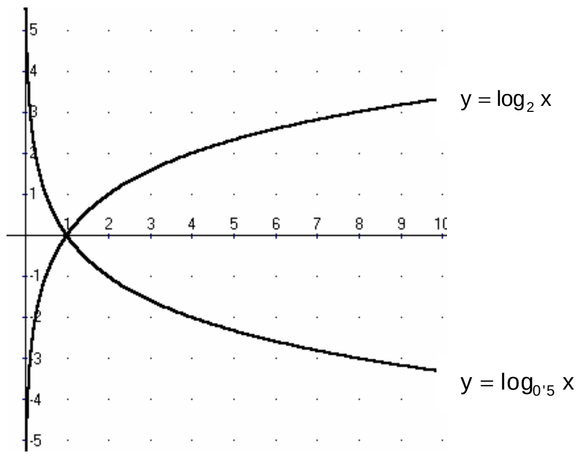
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- La funció $f(x) = \log_a x$, i la funció $g(x) = a^x$ són inverses, per tant són simètriques respecte de la recta $y = x$



-

Si $a > 1$ la funció és creixent	Si $0 < a < 1$ la funció és decreixent
	

- Les funcions $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_{1/a} x$ són simètriques respecte de l'eix d'abscisses OX



Ús de la calculadora.

La calculadora té dues funcions logarítmiques:

$\boxed{\log}$ que són els logaritmes decimals o de base 10. Escriurem $\log x = \log_{10} x$

$\boxed{\ln}$ que són els logaritmes neperians o de base e. Escriurem $\ln x = \log_e x$

Calculeu: $\log 25$, $\ln 3$

Amb calculadores antigues:

Per calcular $\log 25$	25	log	1.397940009
Per calcular $\ln 3$	3	ln	1.098612289

Amb calculadores modernes:

Per calcular $\log 25$	log	25	=	1.397940009
Per calcular $\ln 3$	ln	3	=	1.098612289

Exercici 5:

Amb ajut de la calculadora efectueu les següents operacions:

$\log_2 3$, $\log_3 2$.

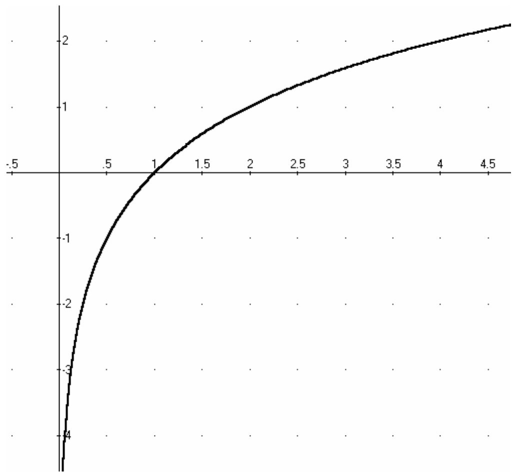
Les calculadores només tenen logaritmes decimals i neperians. Per poder calcular logaritmes d'altres bases efectuarem el canvi de base:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0.4771}{0.3010} = 1.5850$$

$$\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{0.6931}{1.0986} = 0.6309$$

Exercici 6:

Estudieu i representeu la funció $y = \log_2 x$



És una funció logarítmica de base 2.

El domini de la funció logarítmica és $]0,+\infty[$

El recorregut de la funció logarítmica és R.

La funció és contínua en $]0,+\infty[$

És una funció creixent.

Amb ajut de la calculadora construïm una taula de valors:

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	–2	–1	0	0,58	1	1,32	1,58	1,81	2	2,17

Exercici 7:

Resoleu l'equació exponencial $2^x = 5$

5 no es pot posar com potència de base 2, aleshores traurem logaritmes decimals a les dues parts de la igualtat:

$\log 2^x = \log 5$

Apliquem la propietat del logaritme d'una potència:

$x \cdot \log 2 = \log 5$

Aïllem la incògnita x

$x = \dfrac{\log 5}{\log 2}$, amb ajut de la calculadora podem aproximar el resultat: $x = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2.3219$

Exercicis proposats:

10. Sense utilitzar calculadora efectueu les següents operacions:

a) $\log_2 4 =$

b) $\log_9 729 =$

c) $\log 1000 =$

d) $\log_3 1 =$

e) $\log_{25} 5 =$

f) $\log_{16} 2 =$

g) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) =$

h) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$

i) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) =$

j) $\log 0'001 =$

k) $\log_{1/3}\left(\frac{1}{243}\right) =$

l) $\log_3 \sqrt{27} =$

m) $\log_4 \sqrt{2} =$

n) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$

11. Amb ajut de la calculadora efectueu les operacions de l'exercici anterior:

12. Representeu les funcions següents:

a) $f(x) = \log x$

b) $g(x) = \ln x$

c) $h(x) = \log_{1'5} x$

d) $m(x) = \log_4 x$

e) $n(x) = \log_{0'5} x$

f) $p(x) = \log_{0'2} x$

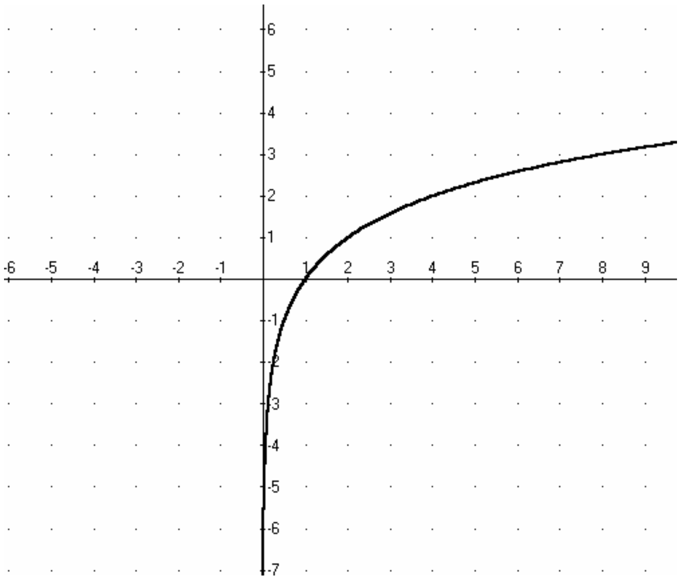
13. donada la funció $f(x) = \log_2 x$
Sense fer taula de valors dibuixeu les funcions:

$g(x) = 3 + \log_2 x$

$h(x) = -1 + \log_2 x$

$m(x) = \log_2(x + 2)$

$f(x) = \log_2(x - 4)$



Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Funcions definides a trossos.

Hem estudiat funcions definides per una sola expressió algebraica per a tot el seu domini, però també podem trobar una funció definida per intervals, (també anomenades funcions definides a trossos), per exemple:

Exercici 8:
Representeu la funció:

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{si } x\le -3 \\ 2 & \text{si } -3<x\le 1 \\ -x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Aquesta funció està definida en 3 trams, per a cadascun d'aquests trams construirem una taula:

$f(x)=x+3$ quan $x\le -3$.

x	f(x)
-5	-1
-4	0
-3	1

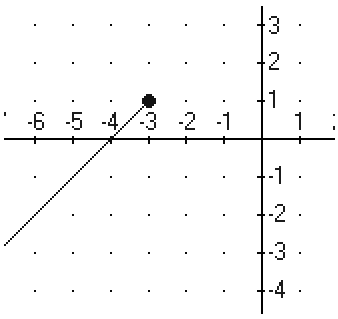
$f(x)=2$ quan $-3<x\le 1$.

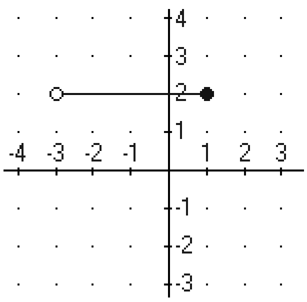
x	f(x)
-2'9	2
-1	2
1	2

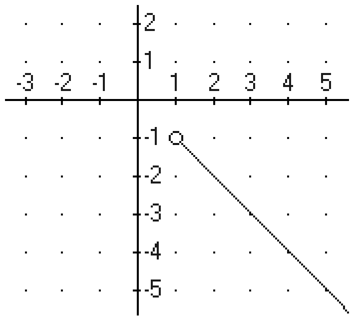
$f(x)=-x$ quan $x>1$

x	f(x)
1'1	-1'1
2	-2
4	-4

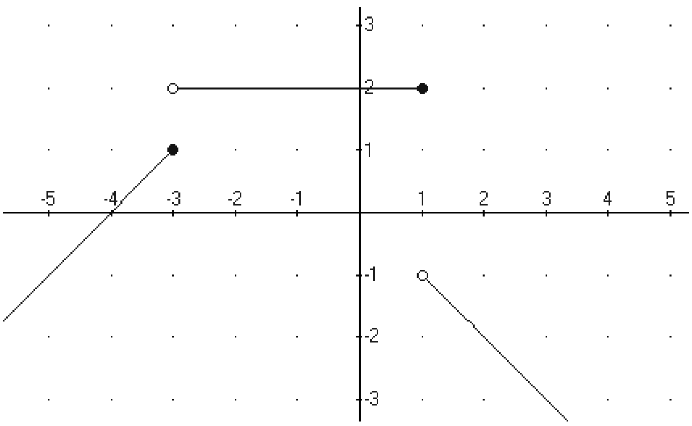
Per a cadascun dels trams representarem un tros de gràfica:







Noteu que si l'interval és obert en un extrem es simbolitza posant un punt en blanc (o),
Si l'interval és tancat en un extrem es simbolitza posant un punt en negre (•)
La gràfica de la funció és:



Exercicis proposats

14. Representeu les següents funcions.

a) $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x\le 1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}-x+3 & \text{si } x\le -1\\ 2x+6 & \text{si } x>-1\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\le -2\\ 3 & \text{si } x>-2\end{cases}$

d) $k(x)=\begin{cases}-2x+6 & \text{si } x<2\\ x & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

e) $m(x)=\begin{cases}3+2x & \text{si } x\le 0\\ x^2-1 & \text{si } x>0\end{cases}$

f) $n(x)=\begin{cases}x-4 & x<1\\ -x^2-2 & x\ge 1\end{cases}$

15. Representeu les següents funcions:

a) $p(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\le -2\\ -x^2+1 & \text{si } -2<x<3\\ x+1 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

b) $q(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<-1\\ x^2-4 & \text{si } -1\le x\le 2\\ 4 & \text{si } x>2\end{cases}$

c) $r(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x\le -4\\ -3 & \text{si } -4<x\le -2\\ x^2-4 & \text{si } -2<x<1\\ -x+4 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

16. Estudieu gràficament les següents funcions:
Definiu les funcions següents a trossos.

a) $a(x)=|x|$

b) $b(x)=|x+2|$

c) $c(x)=|x-3|$

d) $d(x)=|-2x+4|$

e) $e(x)=|x^2-9|$

f) $f(x)=|x^2-4x|$