9 Problemes de Geometria amb la CP400.

Ricard Peiró i Estruch

Febrer-Abril 2014

La resolució de problemes comporta un aprenentatge dels processos matemàtics tals com conjecturar, particularitzar-generalitzar, abstraure, provar, establir connexions, però també conéixer teories, algoritmes i saber establir relacions.
Polya indica quatre fases en la resolució d'un problema:
Entendre el problema.
Crear un pla.
Portar a terme el pla o estratègia.
Revisar i interpretar el resultat.

Per resoldre problemes és necessari un entrenament que indique amb claredat quan ha de ser refusada una estratègia, quan una situació ens duu a un atzucac. Un entrenament en coneixements teòrics.
Per resoldre problemes geomètrics és convenient el coneixement dels programes de geometria dinàmica, així com, programes de càlcul formal o calculadora gràfica.

La calculadora CP400 de Casio permet a l'usuari fer construccions geomètriques en el plànol així com provar la conjectura del problema. Aquests processos porten implícits procediments d'anàlisi, comprovació, experimentació, i investigació, procediments que motiven l'activitat constructiva de l'alumnat.

Les construccions són molt intuïtives i interactives.
La introducció de la calculadora CP400 en l'aula, comporta un gran canvi metodològic. Permet l'anàlisi dels resultats agilitant els processos de càlcul i ajuden a la visualització de situacions difícils d'abstraure a partir d'una expressió verbal o a la pissarra.

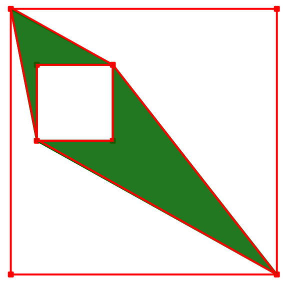
Tots el problemes els he fet utilitzant les eActivity, que permet en una mateixa finestra treballar en text, geometria i càlcul.

Els problemes són extrets d'olimpíades de secundària internacionals.

Enunciats

Problema 1:

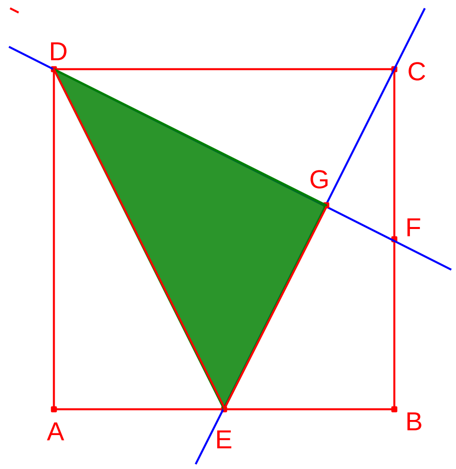
En la figura hi ha dos quadrats, el menut té 2cm de costat i el gran 6cm.
Els costats dels dos quadrats són paral·lels.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.



Problema 2:

Donat el quadrat ABCD de costat a considerem E i F els punts migs de $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. El segment $\overline{DF}$ talla el segment $\overline{CE}$ en G.

Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{DEG}$ és proporcional al triangle 3:4:5.

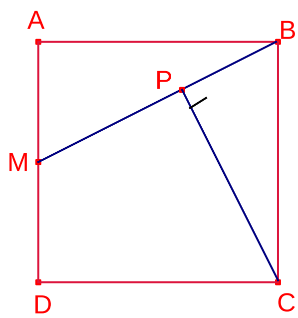


Problema 3:

Determineu l'equació de la recta que passa pel punt $P(-2,3)$ i està a igual distància dels punts $A(5,-1)$ i $B(3,7)$.

Problema 4:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ del quadrat ABCD.
Siga P del segment $\overline{BM}$ tal que $\overline{CP}$ és perpendicular a $\overline{BM}$.
Proveu que $\overline{DP}=\overline{CD}$.

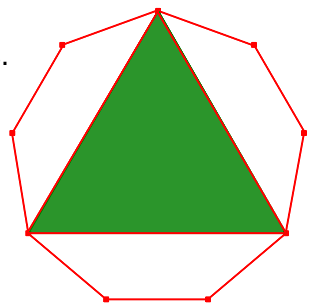


Problema 5:

Siga la circumferència de centre O i radi 5 i la corda $\overline{AB}$ de longitud 4.
La recta tangent a la circumferència que passa per B i la recta OA s'intersecten en el punt C. Calculeu la mesura del segment $\overline{BC}$.

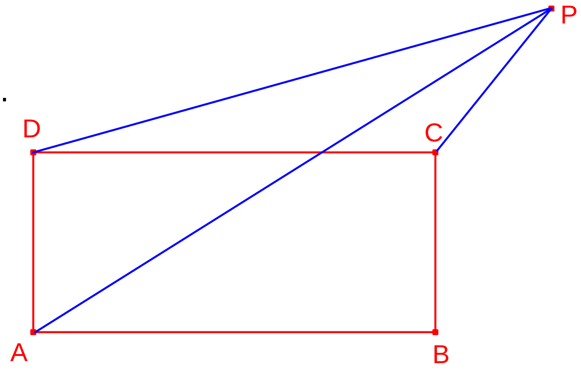
Problema 6:

Un polígon regular de 9 costats té inscrit un triangle equilàter.
Determineu la raó de proporcionalitat de les àrees de les dues figures.



Problema 7:

Donat un rectangle ABCD i P un punt qualsevol
del plànol, proveu que $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 = 0$.



Problema 8:

Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga P un punt interior al quadrat distint de O.

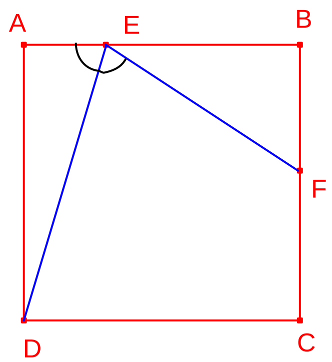
Les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{PAB}$, $\overset{\Delta}{PCD}$ s'íntersecten en els punts P, Q.

Les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{PAD}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ s'íntersecten en els punts P, R.

Proveu que $\overline{QR} = 2 \cdot \overline{OP}$.

Problema 9:

Donat el quadrat ABCD, siga E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\angle AED = \angle DEF$.
Proveu que $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{CF}$.

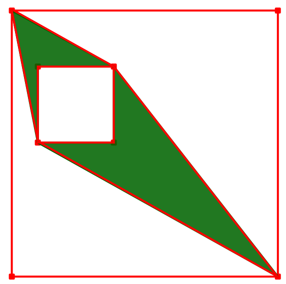


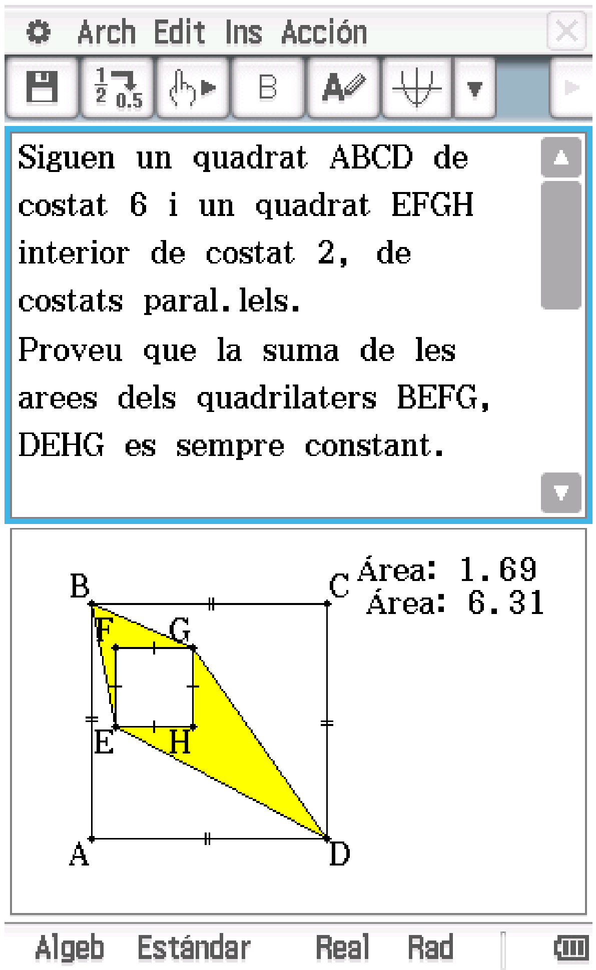
Problema 1:

En la figura hi ha dos quadrats, el menut té 2cm de costat i el gran 6cm.

Els costats dels dos quadrats són paral·lels.

Determineu l’àrea de la zona ombrejada.





Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat 6cm

Siga el quadrat PQRS de costat 2cm.

Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

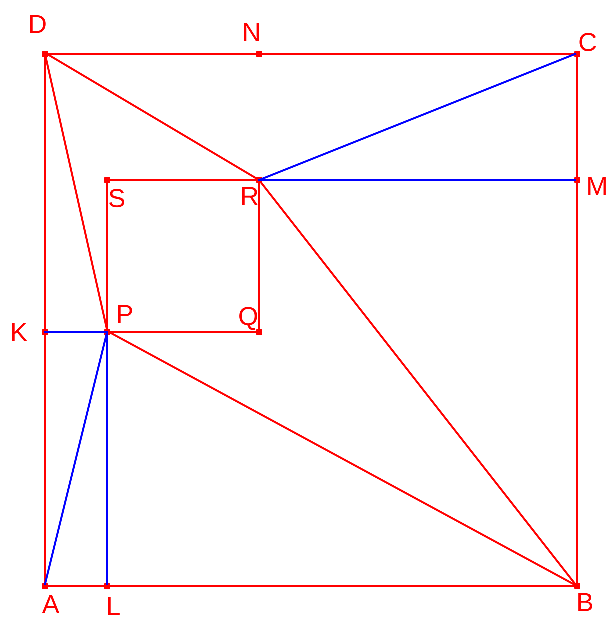
Siga L la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga M la projecció de R sobre el costat $\overline{BC}$.

Siga N la projecció de R sobre el costat $\overline{CD}$.

Siga $\overline{PK} = a, \overline{RM} = b$. Aleshores, $a + b = 6 - 2 = 4$.

Siga $\overline{PL} = c, \overline{RN} = d$. Aleshores, $c + d = 6 - 2 = 4$.



L'àrea de la zona ombrejada és igual a:

$$S = S_{ABCD} - \left(S_{PQRS} + S_{ADP} + S_{BCR} + S_{ABP} + S_{CDR}\right).$$

$$S = 6^2 - \left(2^2 + \frac{1}{2}6a + \frac{1}{2}6b + \frac{1}{2}6c + \frac{1}{2}6d\right).$$

$$S = 36 - \left(4 + \frac{1}{2}6(a+b) + \frac{1}{2}6(c+d)\right).$$

$$S = 36 - \left(4 + \frac{1}{2}6 \cdot 4 + \frac{1}{2}6 \cdot 4\right).$$

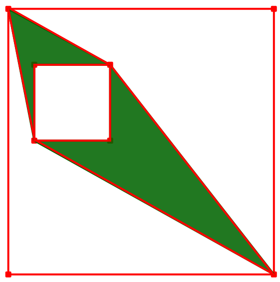
$$S = 8cm^2.$$

Generalització:

En la figura hi ha dos quadrats, el costat del menut és a i el costat del gran b.

Els costats dels dos quadrats són paral·lels.

Determineu l'àrea de la zona ombrejada.



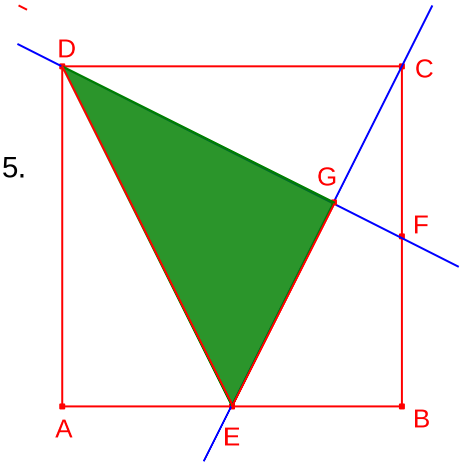
Solució:

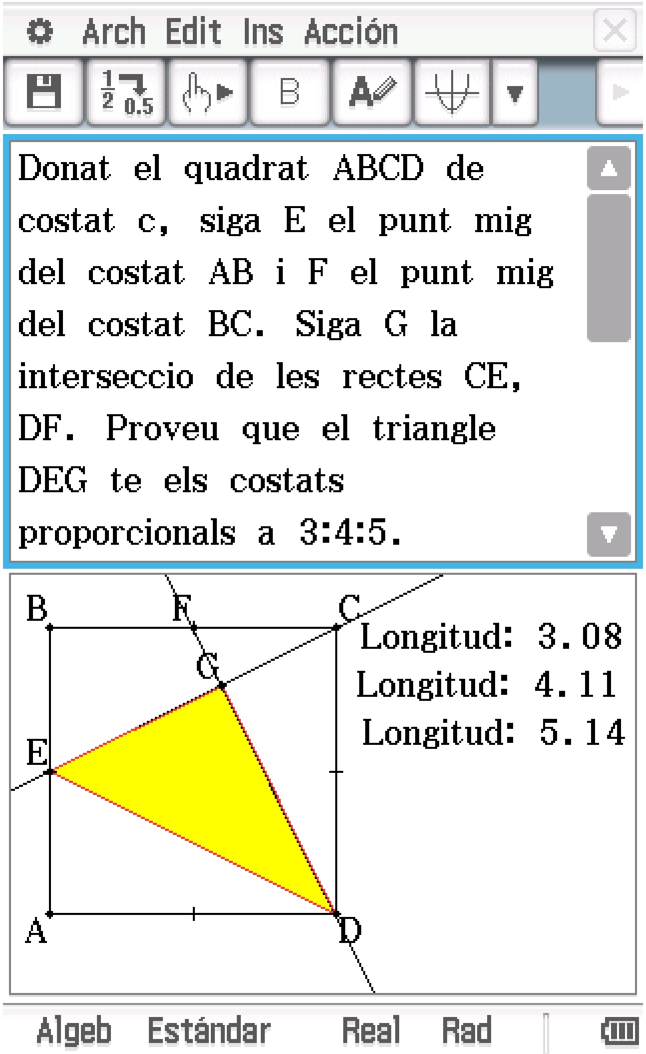
$$S = ab - a^2.$$

Problema 2:

Donat el quadrat ABCD de costat a considerem E i F els punts migs de $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. El segment $\overline{DF}$ talla el segment $\overline{CE}$ en G.

Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{DEG}$ és proporcional al triangle 3:4:5.





Solució:

Farem una demostració general.

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAE}$:

$$\overline{DE} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$\angle CGF = \angle BCE$, aleshores, $\angle CDG$, $\angle DCG$ són complementaris.

Per tant, $\angle DGC = 90º$.

El triangle $\overset{\Delta}{DGE}$ és rectangle $\angle DGE = 90º$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}$, $\overset{\Delta}{DGC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DG}}{a} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}.$$

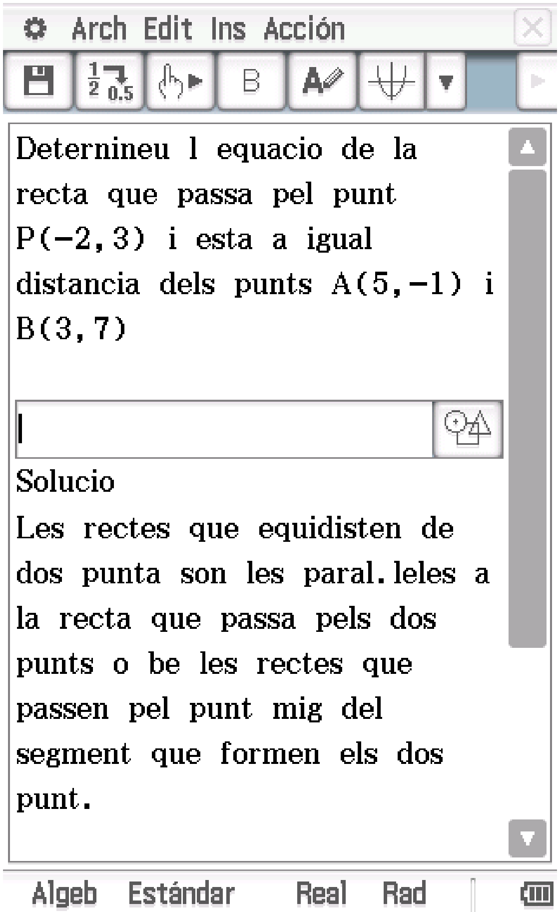
$$\overline{DG} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$

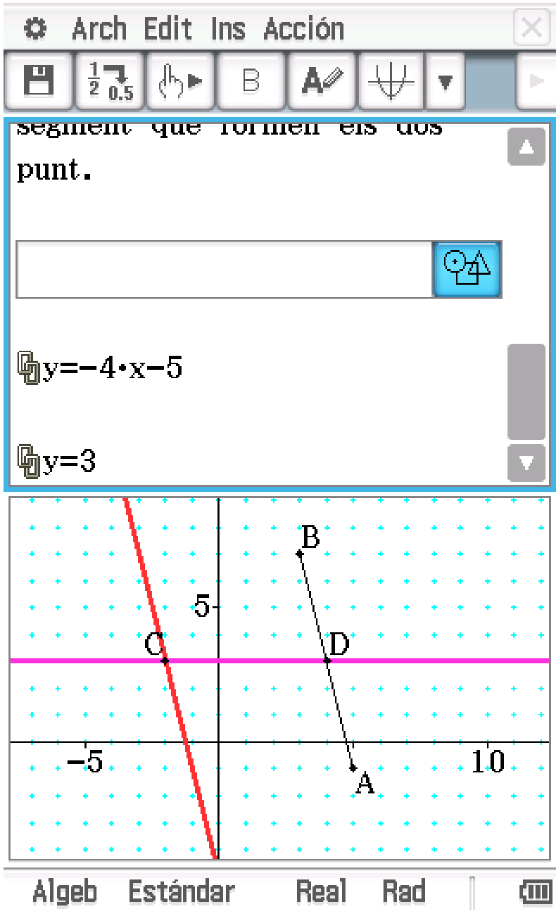
$$\frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{4}{5}.$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DGE}$ és un triangle $\overline{DG} : \overline{GE} : \overline{DE} = 4 : 3 : 5$.

Problema 3:
Determineu l'equació de la recta que passa pel punt $P(-2, 3)$ i està a igual distància dels punts $A(5, -1)$ i $B(3, 7)$.

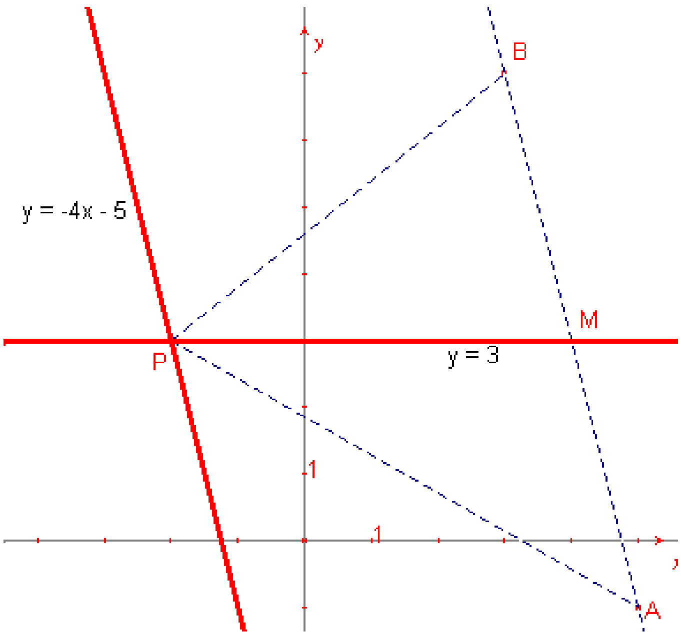
Solució 1:





Les rectes que equidisten de dos punts són les paral·leles a la recta que passa pels dos punts o bé les rectes que passen pel punt mig del segment que formen els dos punts.

Aleshores una de les rectes solució de l'exercici és la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta que passa pels punts A, B que té pendents -4. La seua equació és:
$y - 3 = -4(x + 2)$.
$y = -4x - 5$.
L'altra solució és la recta que passa pel punt mig dels punts A, B que té coordenades $M(4, 3)$. La seua equació és:
$y = 3$.



Solució 2:
La recta d'equació $x = -2$ que passa pel punt P no equidista dels punts A i B.
Siga la recta $y - 3 = m(x + 2)$ que passa pel punt P i té pendent m.
Determinem m a fi que els punts A, B equidisten de la recta $y - 3 = m(x + 2)$.
L'equació general de la recta és: $mx - y + 3 + 2m = 0$.
Les distàncies de A i B a la recta són respectivament:

$$\left|\frac{5m + 1 + 3 + 2m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|, \left|\frac{3m - 7 + 3 + 2m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|.$$

Aquestes dues mesures són iguals:

$$\left|\frac{5m + 1 + 3 + 2m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = \left|\frac{3m - 7 + 3 + 2m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|$$. Simplificant:

$|7m + 4| = |5m - 4|$. Resolent l'equació:

$m = -4, 0$.

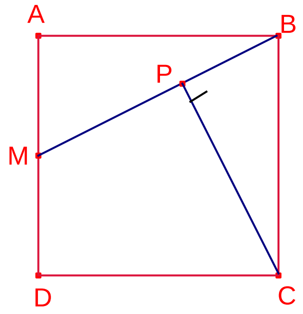
Les rectes solució del problema són:
$y - 3 = -4(x + 2)$, $y - 3 = 0$.

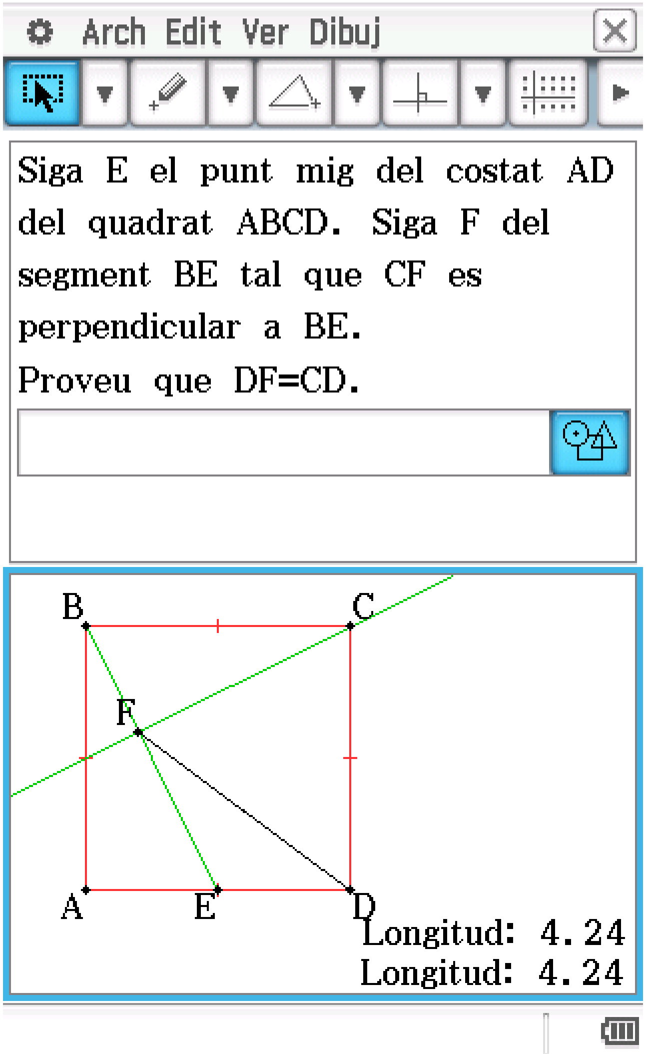
Problema 4:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ del quadrat ABCD.

Siga P del segment $\overline{BM}$ tal que $\overline{CP}$ és perpendicular a $\overline{BM}$.

Proveu que $\overline{DP} = \overline{CD}$.





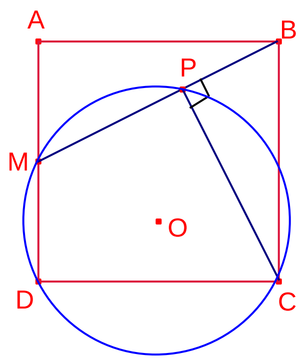
Solució 1:

$\angle MDC = \angle CPM = 90^{o}$.

Aleshores el quadrilàter CDMP és inscriptible.

$\angle DCM = \angle MPD$, $\angle MDC = \angle CPM = 90^{o}$, Aleshores:

$\angle PCD = \angle DMC$.



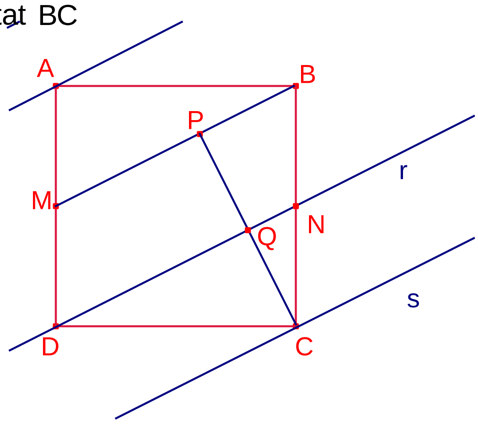
Els arcs $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DP}$.

Aleshores, $\overline{DP} = \overline{CD}$.

Solució 2:

Considerem la recta BM.

La recta r paral·lela a la recta BM que passa per D, talla el costat $\overline{BC}$ en el punt mig D.



Siga la recta s paral·lela a la recta BM que passa per C.

La recta r és paral·lela mitjana de les rectes BM, s.

Aleshores $\overline{PQ} = \overline{CQ}$.

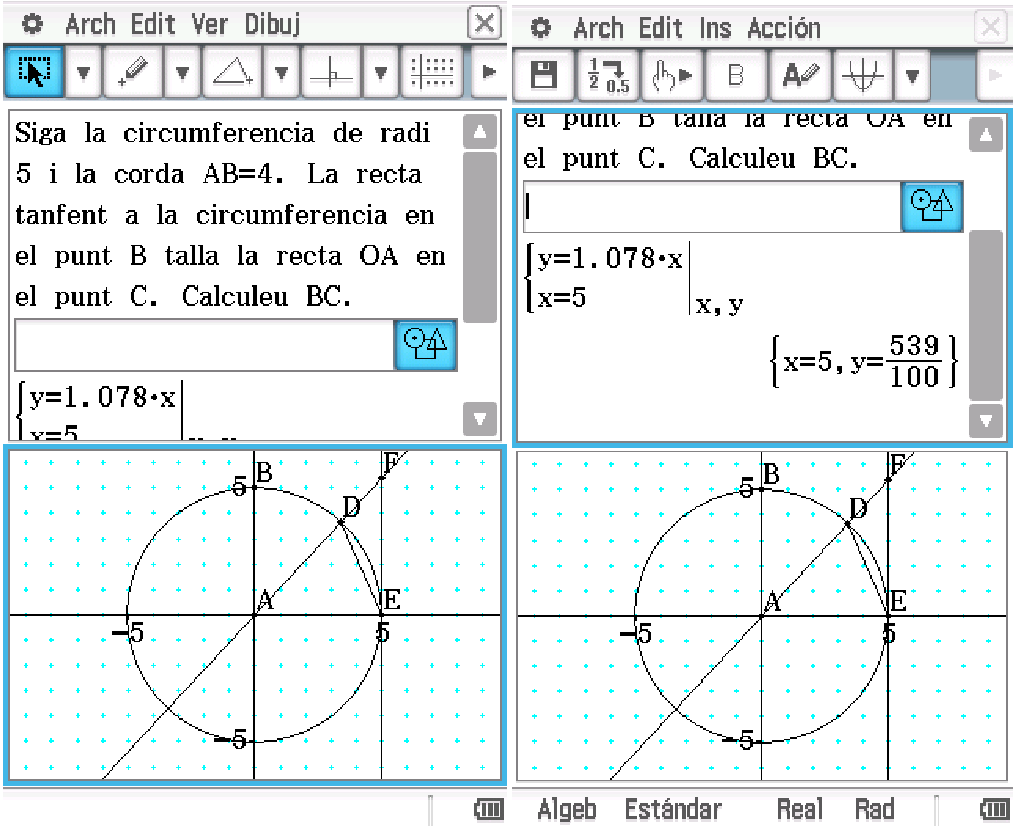
$\angle DQP = 90^o$.

Aleshores els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{Q}P$, $D\overset{\Delta}{Q}C$ són iguals.

Aleshores, $\overline{DP} = \overline{CD}$.

Problema 5:

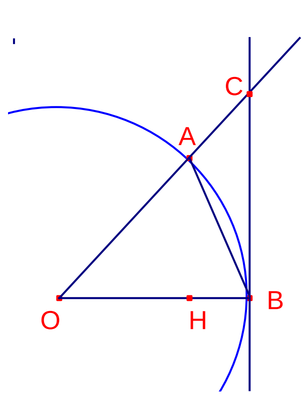
Siga la circumferència de centre O i radi 5 i la corda $\overline{AB}$ de longitud 4.
La recta tangent a la circumferència que passa per B i la recta OA s'intersecten en el punt C. Calculeu la mesura del segment $\overline{BC}$.



Solució 1:

Siga H la projecció de A sobre el radi $\overline{OB}$. Siga $x = \overline{BC}$. Siga $y = \overline{OH}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAH}$:



$$\overline{AH}^2 = 5^2 - y^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAH}$:

$$\overline{AH}^2 = 5^2 - (5-y)^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$5^2 - y^2 = 4^2 - (5-y)^2$. Resolent l'equació:

$$y = \frac{17}{5} \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$$\overline{AH} = \frac{4\sqrt{11}}{5} \qquad (4)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{OAH}$, $\overset{\Delta}{OCH}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

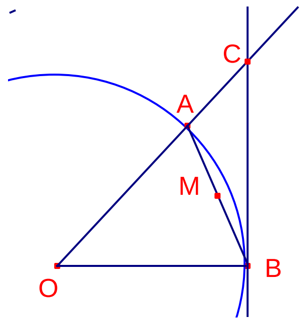
$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{OH}}$. $\quad \dfrac{x}{5} = \dfrac{\frac{4\sqrt{21}}{5}}{\frac{17}{5}}$. Resolent l'equació: $x = \overline{BC} = \dfrac{20\sqrt{21}}{17} \approx 5.39$.

Solució 2:

Siga $x = \overline{BC}$. Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$. Siga $\alpha = \angle MOB$.

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$.

$\angle AOB = 2\alpha$.



Aplicant raons trigonomètriques a triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{x}{5} \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{21}}{1-\frac{4}{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{17} \qquad (6)$$

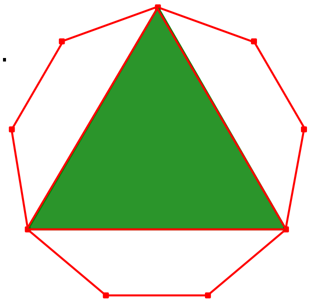
Igualant les expressions (5) (6):

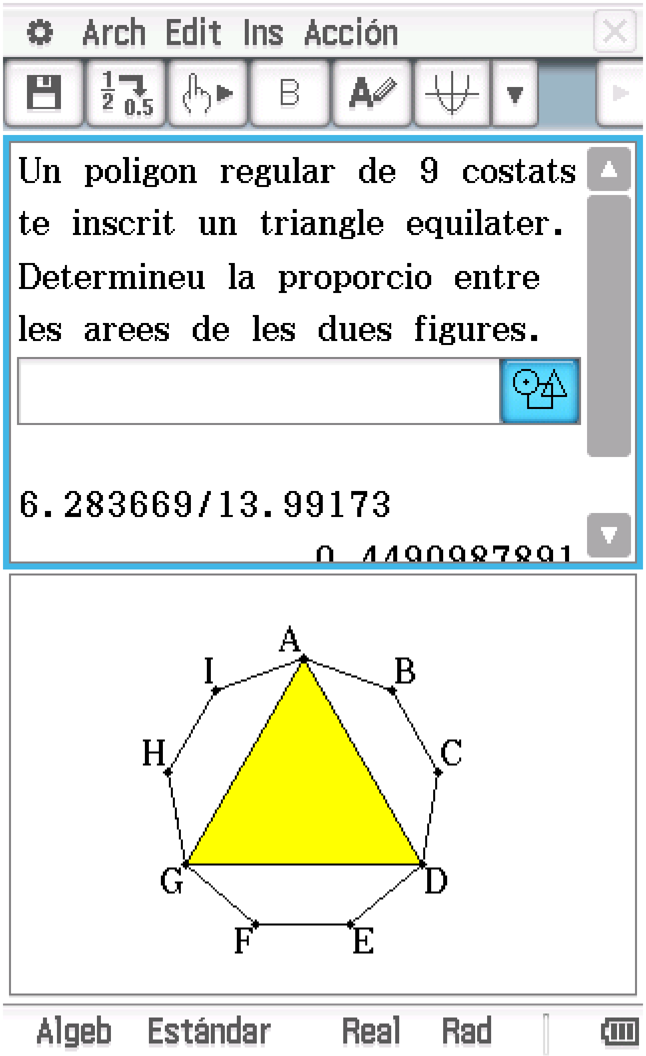
$\frac{x}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{17}$. Resolent l'equació:

$x = \overline{BC} = \frac{20\sqrt{21}}{17}$.

Problema 6:

Un polígon regular de 9 costats té inscrit un triangle equilàter.
Determineu la raó de proporcionalitat de les àrees de les dues figures.





Solució:

Siga l'eneàgon ABCDEFGHI de centre O i radi de la circumferència circumscrita $\overline{OA} = r$.

Siga $\overset{\Delta}{CFI}$ el triangle inscrit en l'eneàgon.

$\angle AOB = \dfrac{360^o}{9} = 40^o$, $\angle IOC = \dfrac{360^o}{3} = 120^o$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

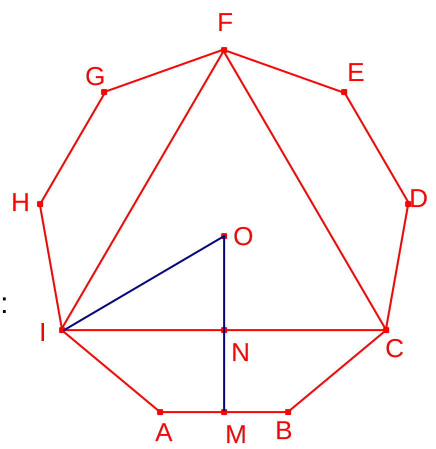
Siga N el punt mig del costat $\overline{IC}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$\overline{AB} = 2r \cdot \cos 70^o$, $\overline{OM} = r \cdot \sin 70^o$

L'àrea de l'eneàgon és:

$$S_9 = \frac{9\overline{AB} \cdot \overline{OM}}{2} = \frac{9}{2} 2r^2 \sin 70^o \cdot \cos 70^o = \frac{9}{2} r^2 \sin 40^o .$$



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{INO}$:

$\overline{IC} = 2r \cdot \cos 30º$, $\overline{ON} = r \cdot \sin 30º$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CFI}$ és:

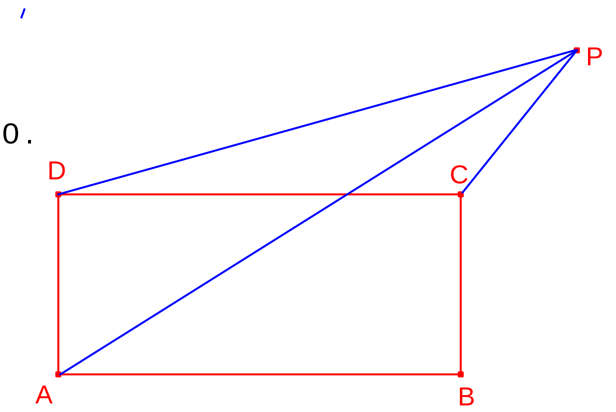
$$S_3 = \frac{3\overline{IC} \cdot \overline{ON}}{2} = \frac{3}{2} 2r^2 \sin 30º \cdot \cos 30º = \frac{3}{2} r^2 \sin 60º .$$

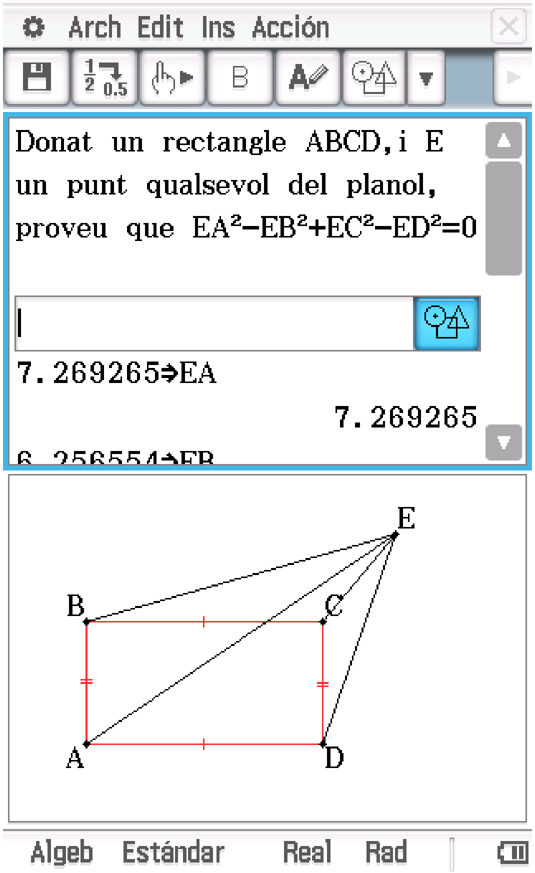
La proporció entre les àrees és:.

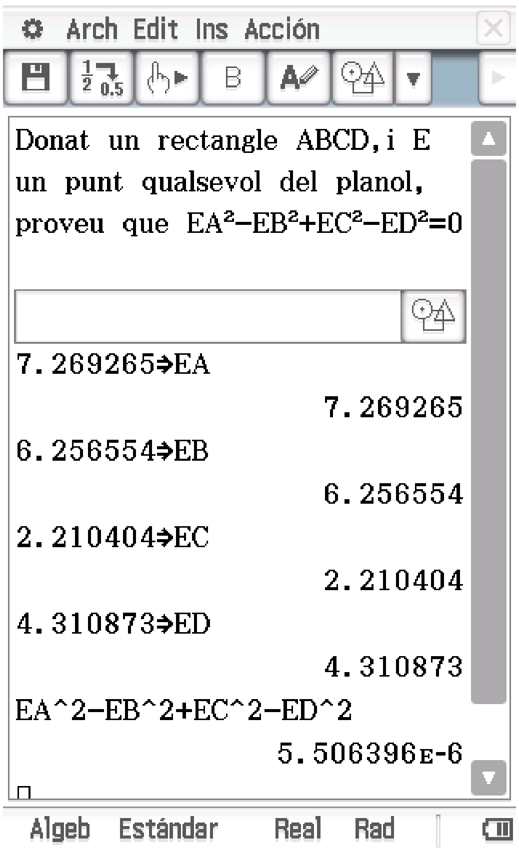
$$\frac{S_3}{S_9} = \frac{\frac{3}{2} r^2 \sin 60º}{\frac{9}{2} r^2 \sin 40º} = \frac{\sqrt{3}}{6 \sin 40º} \approx 0'4491 .$$

Problema 7:

Donat un rectangle ABCD i P un punt qualsevol del plànol, proveu que $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 = 0$.





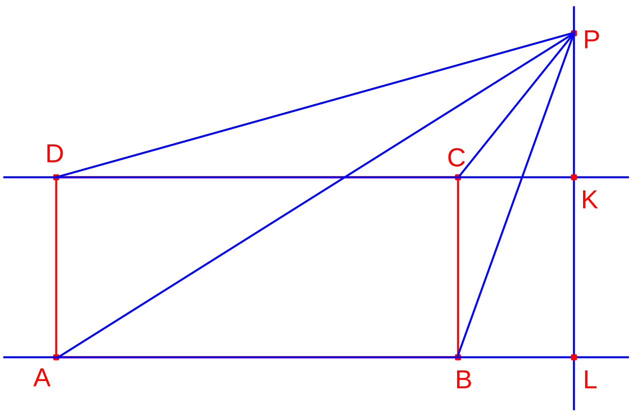


Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$.

Siga K la projecció P sobre la recta DC.

Siga L la projecció de P sobre la recta AB.



Siga $\overline{BL} = x$, $\overline{PL} = y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALP}$:

$\overline{PA}^2 = (a + x)^2 + y^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLP}$:

$\overline{PB}^2 = x^2 + y^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKP}$:

$\overline{PC}^2 = x^2 + (y-b)^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKP}$:

$\overline{PD}^2 = (a-x)^2 + (y-b)^2$.

Aleshores, $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 = 0$.

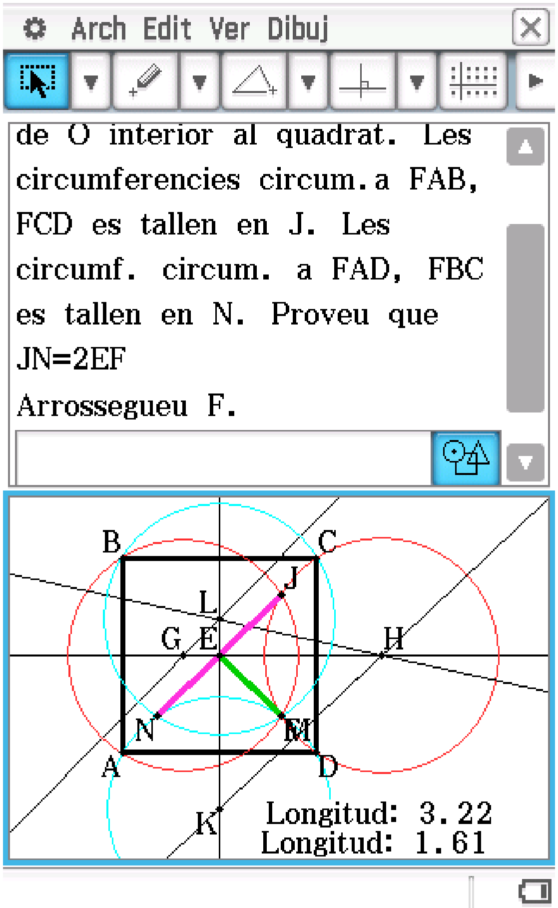
Problema 8:

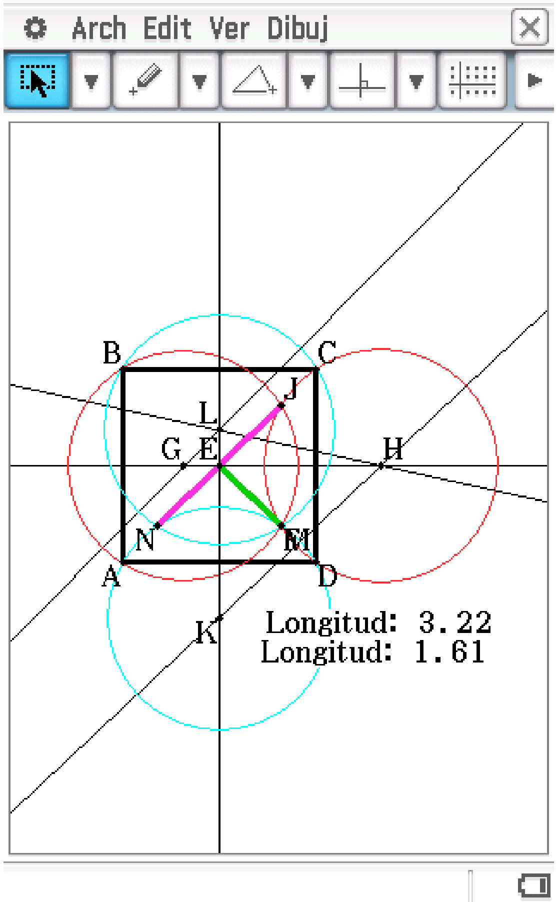
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga P un punt interior al quadrat distint de O.

Les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{PAB}$, $\overset{\Delta}{PCD}$ s'íntersecten en els punts P, Q.

Les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{PAD}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ s'íntersecten en els punts P, R.

Proveu que $\overline{QR} = 2 \cdot \overline{OP}$.





Solució:

Siga O_1 el centre de la circumferència $\overset{\Delta}{PAB}$.

Siga O_2 el centre de la circumferència $\overset{\Delta}{PCD}$.

O, O_1, O_2 pertanyen a la mediatriu del costat $\overline{AB}$.

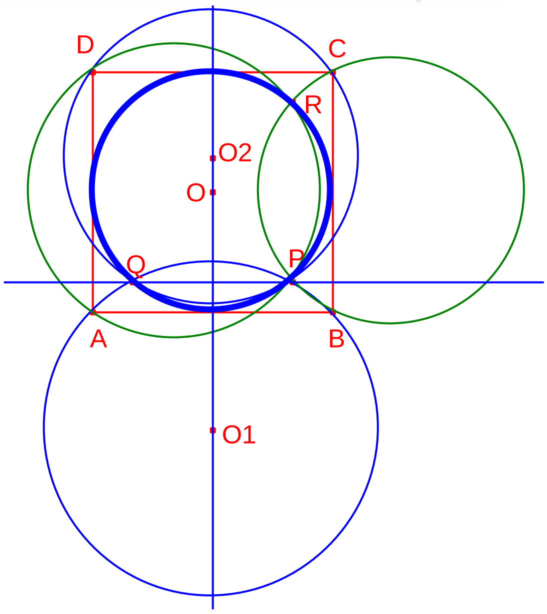
La recta PQ és perpendicular a la recta que uneix els centres

PQ és paral·lel al costat $\overline{AB}$.

La recta mediatriu segment $\overline{PQ}$ passa pels centres O_1, O_2.

La recta mediatriu al costat $\overline{AB}$ és recta mediatriu del segment $\overline{PQ}$.

O pertany a la recta mediatriu del segment $\overline{PQ}$, aleshores:



$\overline{OP} = \overline{OQ}$.

Anàlogament: $\overline{PR}$ és paral·lel al costat $\overline{BC}$ i $\overline{OP} = \overline{OR}$

$\angle QPR = 90^{o}$.

O és centre de la circumferència que passa per P, Q, R.

$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR}$, $\angle QPR = 90^{o}$, aleshores, $\overline{QR}$ és un diàmetre.

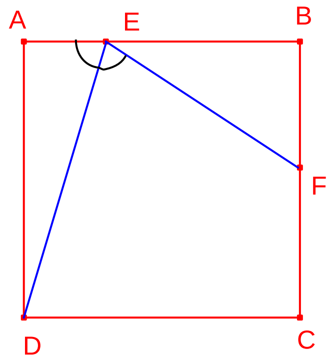
O, Q, R estan alineats.

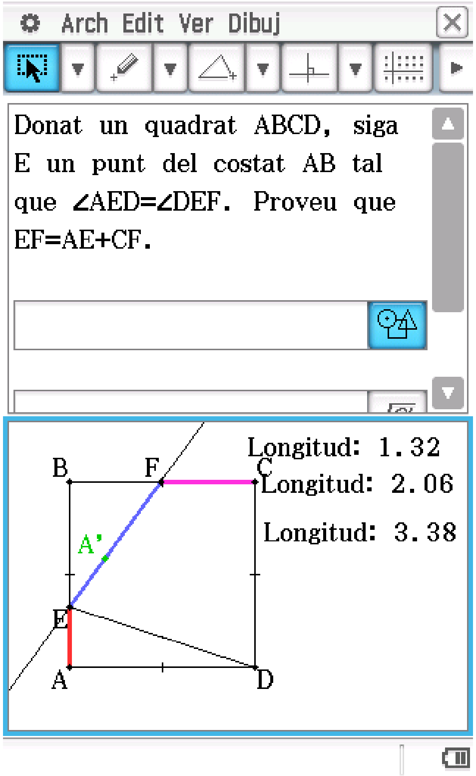
Aleshores, $\overline{QR} = 2 \cdot \overline{OP}$.

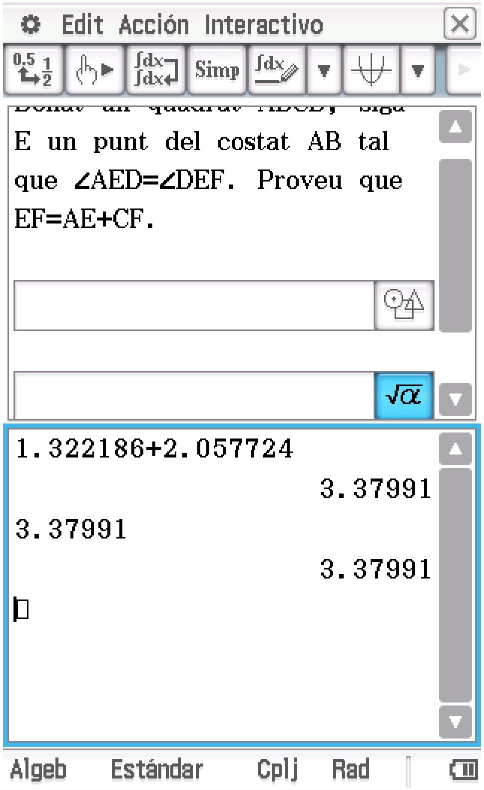
Problema 9:

Donat el quadrat ABCD, siga E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\angle AED = \angle DEF$.

Proveu que $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{CF}$.







Solució:

Siga P la projecció de D sobre el segment $\overline{EF}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}$, $\overset{\Delta}{DPE}$ són iguals (LAA).

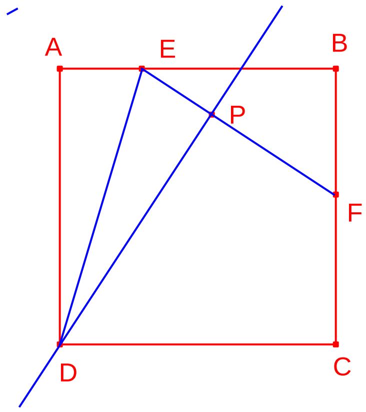
Aleshores, $\overline{AD} = \overline{DP}$, $\overline{AE} = \overline{EP}$.

$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{DP}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DPF}$, $\overset{\Delta}{DCF}$ (LLA).

Aleshores, $\overline{CF} = \overline{PF}$.

$\overline{EF} = \overline{EP} + \overline{PF} = \overline{AE} + \overline{CF}$.



Bibliografia:

GÚSIEV, V. i altres, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscou, 1989.

SHARIGUIN, I., *Problemas de geometría. Planimetría*. Editorial Mir. Moscou, 1986.

GREITZER, S.L. *Olimpiadas MatemáticasI.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 2. Madrid. 1994.

KLAMKIN, M.S *Olimpiadas Matemáticas II.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 12. Madrid. 1998.

AA.VV. *Matemáticas Recurrentes.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid. 1998.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. *Concurso intercentres de matemáticas*. Ed. Nivola. Madrid. 2006.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J.. *Desafíos de geometría 1.* Nivola. Madrid. 2007.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J.. *Desafíos de geometría 2*. Nivola. Madrid. 2008.

GARCÍA ARDURA, M. *Problemas gráficos y numéricos de geometria*. Ed Hernando. Madrid 1963.

GARCÍA ARDURA, M. *Ejercicios y problemas de trigonometria*. Ed Hernando. Madrid 1964.

SÁNCHEZ-RUBIO. RIPOLLÉS AMELA. *Manual de mátematicas para preparación olímpica.* Ed. Universitat Castelló. Castelló de la Plana. 2000.

KLETENIK, D. *Problemas de geometría analítica.* Moscou. 1979.

POGORÉLOV A.V. *Geometría elemental.* Ed. Mir. Moscou. 1974.

MEDVIÉDEV G.N. *Problemas de matemática. Olimpiadas y exámenes de admisión. Ed. URSS. Moscou 2010.*

LIDSKI V. i altres. *Problemas de matemáticas elementales.* Ed Mir. Coscou, 1983.

COXETER, H.S.M. *Retorno a la geometría.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid. 1994.

Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid. 1996.

Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Algebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid. 1996.

AA.VV. *Competencias Matemáticas en Estados unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid. 1996.

GARDINER, T. *Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press. 1996.

GARDINER, T. *More Mathematical Challenges.* Ed Cambridge University Press. 1997.

GARDINER, T. *Senior Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press. 2002.

PÉREZ FUENTES, R. *Olimpiada Matemética.* Ed autor. Utiel. 1998.

ANTONIO ESTEBAN, M. *Problemas de geometría.* Ed FESPM. Badajoz, 2004.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, G. *“Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos”*. Ed Sdad. Andaluza de Educación Matemática. Thales. 1996.

ZHÚKOV, a.v. i altres. *La matemática elegante. Problemas y soluciones detalladas.* Ed. Urss. Moscou. 2007.

POSAMENTIER, A.S., SALKIND, C.T. *Challenging Problems in Geometry.*Dover Publications, inc. NY. 1988.

HALMOS, PAUL. *Problèmes pour mathématiciens petits et grands.* Ed. Cassini. París. 2000.

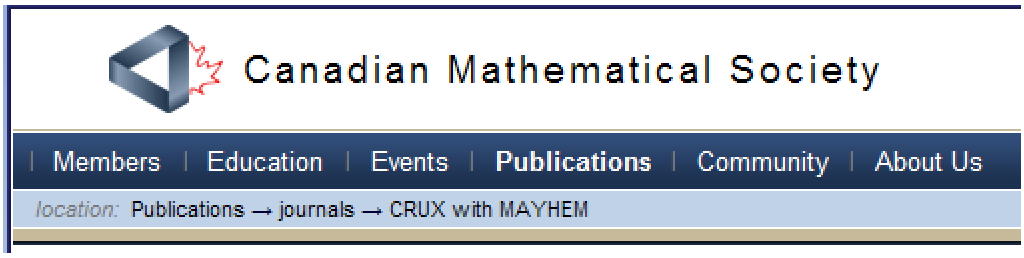
BOLD, B. *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.*Ed. Dover. N.Y. 1969.

HIDETOSHI,F. ROTHMAN,T. *Sacred mathematics. Japenese temple geometry.* Ed Princeton University. 2008.

FAURING P. i altres. *10 olimpíadas iberoamericanas de matemáticas.* Ed. OEI. Madrid. 1996.
KLETENIK, D. *Problemas de geometría analítica.* Moscou. 1979.
BRUÑO. *Geometría. Curso superior.* Ed. Bruño. Valencia. 1957 7ª Edició.
DE OLABARRIETA, L. *Apuntes de geometría y trigonometría.* Ed. El Mensajero del Corazón de Jesús. Bilbao 1942.
ROUCHÉ,E., COMBEROUSSE, CH. *Tratado de geometría elemental*. Ed.suc. Hernando. Madrid. 1915.
PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 1. Fundamentos*. Nuevas gráficas S.A. 8ª ed., Madrid, 1965
PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 2. Complementos.* Nuevas gráficas S.A., 7ª ed., Madrid, 1961.
ROANES MACIAS, E., *Introducción a la geometria.* Anaya, Madrid, 1980.
GELTNER, P.B. PETERSON, D.J. *Geometría.* Ed. Thomson editores. Mèxic. 1998.
COXETER, H.S.M. *Fundamentos de geometría.* Ed. Limusa. Mèxic. 1971.
VELASCO SOTOMAYOR, G. *Tratado de Geometría.* Ed. Limusa. Mèxic. 1983.
LEVI S. SHIVELY, PH.D. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañia editorial continental. Mèxic. 1972.
FERNÁNDEZ, i., REYES, M.E. *Geometría con el hexágono y el octógono.* Ed. Proyecto Sur. Granada. 2003.
SORTAIS, YVONNE et RENÉ. *La géométrie du triangle*. Ed Hermann. París, 2002.
ZHÚKOV, A.V. *El omnipresente número pi*. Ed Urss, Moscou. 2005.
NELSEN, R.B. *Demostraciones sin palabras.* Ed. Proyecto Sur. 2001.

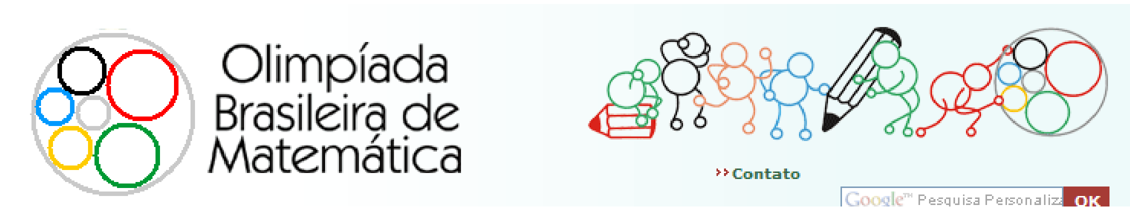
GONZÁLEZ, M. i PALENCIA,J. *Trazado geométrico.* Editorial: els autors. Sevilla.
REDÓN GÓMEZ, A. *Geometría paso a paso.* Ed. Tébar. 2000.

Pàgines Web:

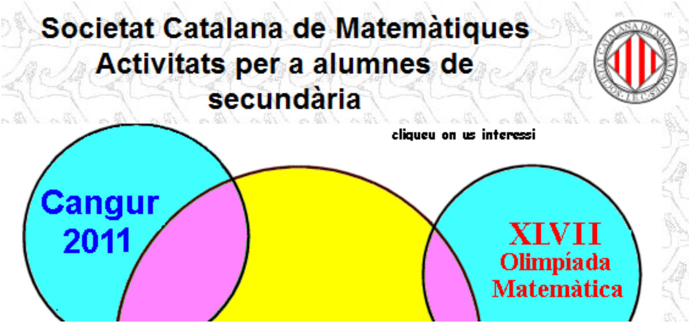


http://cms.math.ca/crux/
Revista Crux Mathematicorum, Societat Canadenca de Matemàtiques.
Problemes Olímpics de tots els nivells.
Publiquen 8 números a l'any.
La secció Mayhem (amb problemes elementals) és lliure. Aquesta secció, malauradament desapareguda.
Idioma: Anglés i francés.

http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml
Revista KöMaL. Societat Hongaresa de Física i Matemàtiques.
Problemes olímpics de tots els nivells.
Publiquen 8 números a l'any.
Idioma: Anglés i magiar.



http://www.obm.org.br/opencms/
Pàgina de l'Olimpíada brasileira de matemàtica.
Informació sobre les proves.
Revista de problemes EUREKA. Dos nivells de problemes.
Idioma: Portugués.



http://www.cangur.org/index.htm
Proves Cangur. Bases de la prova.
Són proves estatals. La Societat Catalana de Matemàtiques té una pàgina amb els enunciats
de distints anys.
Aquesta prova també és celebra al País Valencià però en distints dies que a la resta de l'estat.
Nivells: quatre nivells·3r ESO, 4t ESO, 1r Bat., 2n Bat.
Idioma: Català.

http://www.semcv.org/
Societat d'Educació matemàtica Al-Khwarizmi.
Publica la revista Problemes Olímpics.
Alguns del números es poden descarregar en format pdf.
Nivells: 2n cicle primària, 1r cicle Eso, 2n Cicle Eso.
Idioma: Català.

http://www.ricardpeiro.es/problemesolimpics/arxius/introduccio.htm

Problemes Olímpics de Geometria resolts amb el pragrama de Geometria Dinàmica Cabri Géomètre.