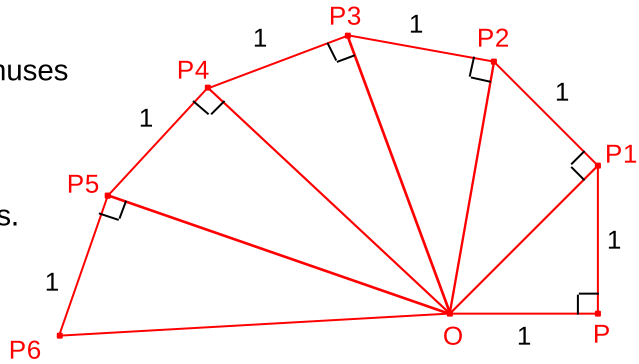
Teorema de Pitàgores i successions.

Problema 1:

En la figura, tots els triangles són rectangles en els vèrtexs $P, P_1, P_2, P_3, ...$

$1 = \overline{OP} = \overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = ... = \overline{P_iP_{i+1}}$.



a) Calculeu les mesures de les 10 primeres hipotenuses $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}, ...$ dels triangles.

b) Calculeu la mesura de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

c) Calculeu la suma de les 10 primeres hipotenuses.

d) Calculeu la suma de les àrees dels 10 primers triangles.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPP_1}$: $\overline{OP_1} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PP_1}^2}$ -

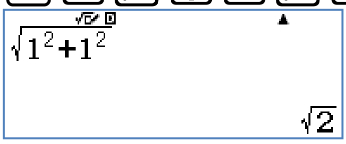
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OP_1P_2}$: $\overline{OP_2} = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OP_2P_3}$: $\overline{OP_3} = \sqrt{\overline{OP_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2}$.

a)

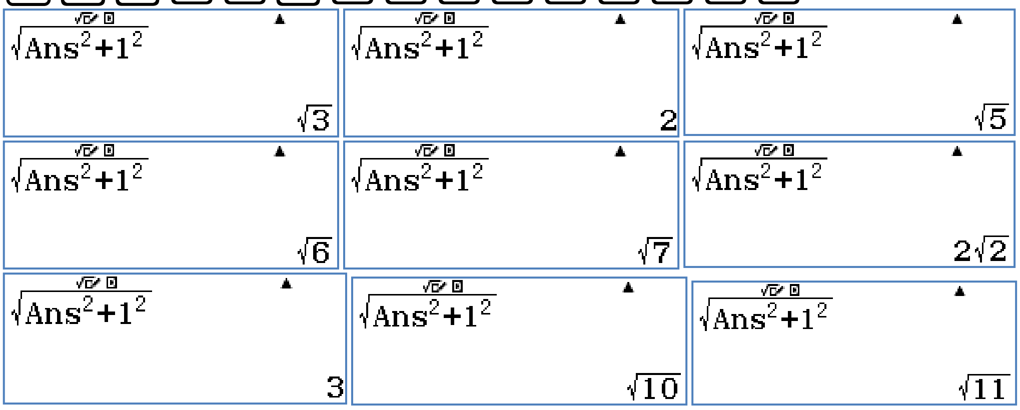
Utilitzarem la funció Ans de la calculadora.

√■ 1 x² + 1 x² =



$\overline{OP_1} = \sqrt{2}$.

√■ Ans x² + 1 x² = = = = = = = = =



La mesura de les primeres hipotenuses és:

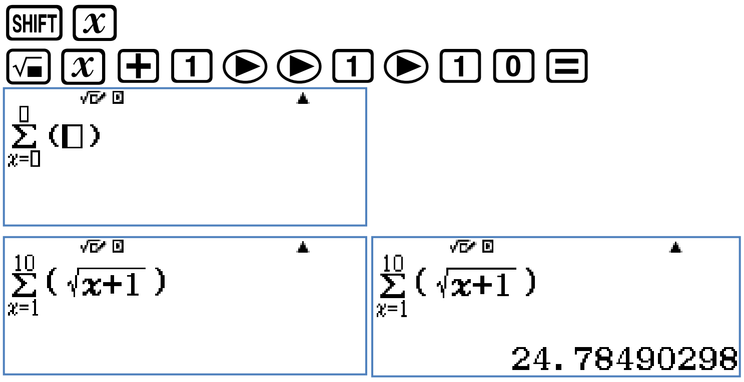
$\overline{OP_2}=\sqrt{3}, \overline{OP_3}=\sqrt{4}=2, \overline{OP_4}=\sqrt{5}, \overline{OP_5}=\sqrt{6}, \overline{OP_6}=\sqrt{7}, \overline{OP_7}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}, \overline{OP_8}=\sqrt{9}=3$

b)

$\overline{OP_n}=\sqrt{n+1}$. Es pot provar aquesta conjectura per inducció completa.

c)

Utilitzarem la funció suma se sèries finites



La suma és aproximadament, 24.78490298.

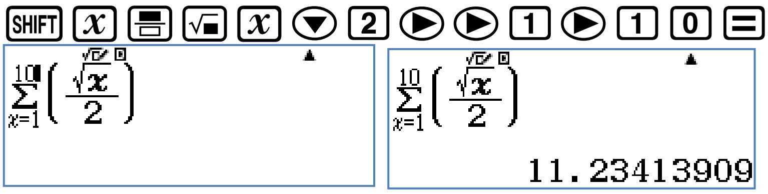
d)

Les àrees dels primers triangles són:

$$S_1=\frac{1\cdot 1}{2},\ S_2=\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2},\ S_3=\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2},\ S_4=\frac{\sqrt{4}\cdot 1}{2},\ S_5=\frac{\sqrt{5}\cdot 1}{2},\ \ldots.$$

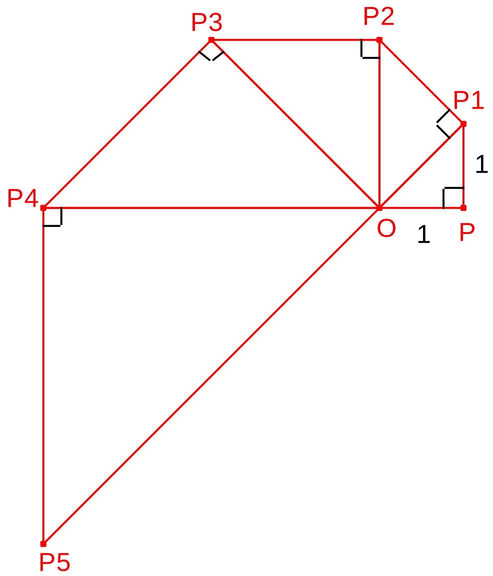
$$S_n=\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Per fer la suma de les àrees utilitzarem la funció de sumes finites de la calculadora.



La suma és aproximadament 11.23413909.

Problema 2:



En la figura, tots els triangles són rectangles en els vèrtexs $P, P_1. P_2, P_3,\ldots.$ i isòsceles. $1=\overline{OP}=\overline{PP_1}$.

a) Calculeu les mesures de les 10 primeres hipotenuses $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4},\ldots$ dels triangles.

b) Calculeu la mesura de la hipotenusa $\overline{OP_n}$.

c) Calculeu la suma de les 10 primeres hipotenuses.

d) Calculeu la suma de les àrees dels 10 primers triangles.