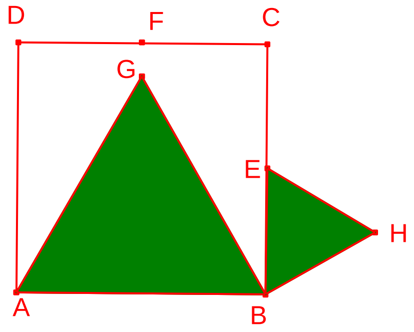
Problemes de Geometria per a l'ESO 169

1681.- Siga el quadrat ABCD.

Siga E el punt mig del costat $\overline{BC}$ i F el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Construïm els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABG}$ i $\overset{\Delta}{BEH}$ de forma que G pertany a l'interior del quadrat i H a l'exterior.

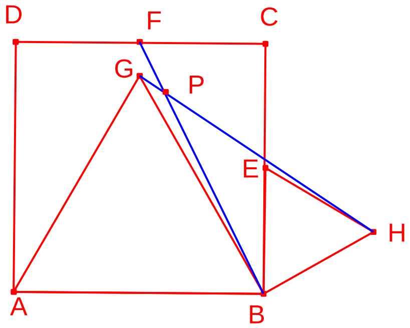
Determineu l'angle agut entre les rectes BF i GH.



Solució:

Siga P la intersecció dels segments $\overline{BF}$, $\overline{GH}$.

Siga $\alpha = \angle BPH$ l'angle que cerquem.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCF}$, $\overset{\Delta}{GBH}$ són iguals.

Siga $\beta = \angle FBC = \angle GHB$.

$\angle GPB = 180º - \alpha$.

$\angle GBP = 30º - \beta$.

Els angles del triangle $\overset{\Delta}{BPG}$ sumen 180º:

$\beta + 180 - \alpha + 30º - \beta = 180º$.

Resolent l'equació:

$\alpha = 30º$.

1682.- Siguen dos hexàgons ABCDEF i PQRSTU que tots els seus angles interns mesuren 120º cadascun.

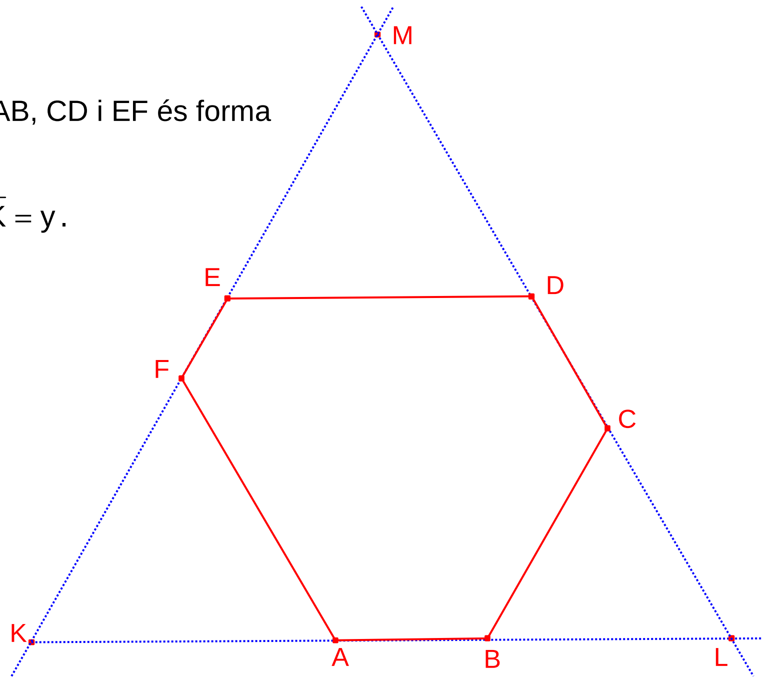
a) Si $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$, $\overline{BC} = 8$ i $\overline{EF} = 3$ determineu el perímetre de l'hexàgon ABCDEF.

b) Si $\overline{PQ} = 3$, $\overline{QR} = 4$, $\overline{RS} = 5$ i $\overline{TU} = 1$, determineu el valor de $\overline{ST} + \overline{PU}$.

Solució:

a)

La intersecció dos a dos de les rectes AB, CD i EF és forma el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.



Siga $\overline{DE} = \overline{DM} = \overline{EM} = x$, $\overline{AF} = \overline{AK} = \overline{FK} = y$.

$\overline{BC} = \overline{BL} = \overline{CL} = 8$.

$\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{KM}$, aleshores:

$13 + y = 13 + x = x + y + 3$.

Resolent el sistema:

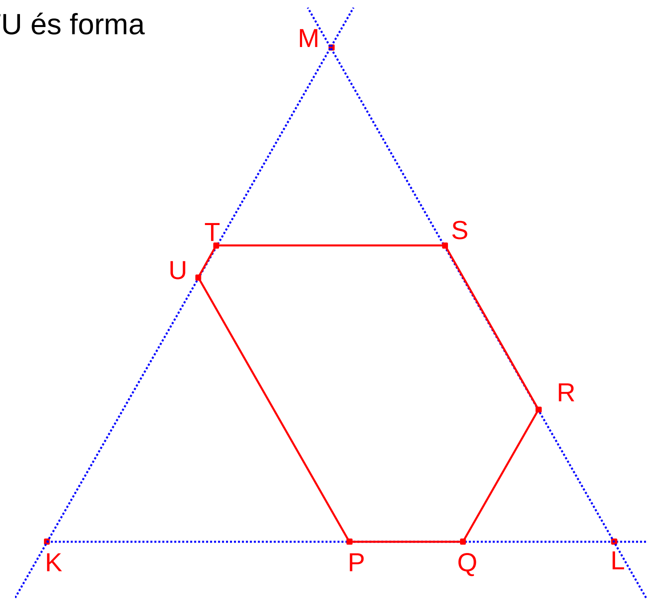
$x = y = 10$.

El perímetre de l'hexàgon ABCDEF és:

$P_{ABCDEF} = 21 + x + y = 41$.

b)

La intersecció dos a dos de les rectes PQ, RS i TU és forma el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.



Siga $\overline{TS} = \overline{SM} = \overline{TM} = x$, $\overline{PU} = \overline{PK} = \overline{UK} = y$.

$\overline{QR} = \overline{QL} = \overline{RL} = 4$.

$\overline{KL} = \overline{LM} = \overline{KM}$, aleshores:

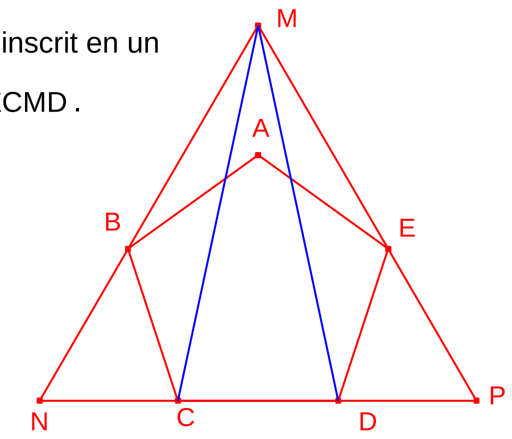
$7 + y = 9 + x = x + y + 1$.

Resolent el sistema:

$x = 6, \ \ y = 10$.

$\overline{ST} + \overline{PU} = x + y = 6 + 8 = 14$.

1683.- En la figura es mostra un pentàgon regular ABCDE inscrit en un triangle equilàter $\overset{\Delta}{MNP}$. Determineu la mesura de l'angle $\angle CMD$.



Solució:

$\overline{BE} = \overline{CE} = \overline{ME}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MCE}$ és isòsceles.

$\angle BEC = 36^{o}$, aleshores:

$\angle MEC = 36^{o} + 60^{o} = 96^{o}$.

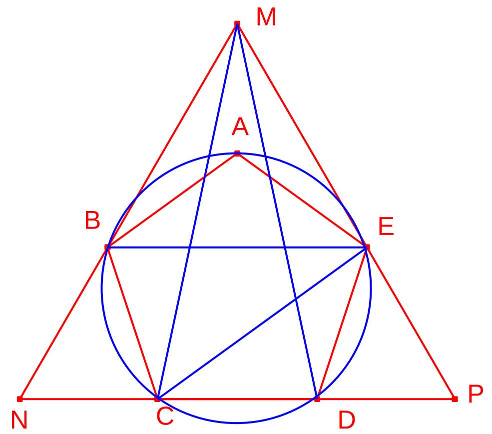
$\angle CME = \dfrac{180^{o} - 96^{o}}{2} = 42^{o}$.

$\angle CME = \angle BMD$.

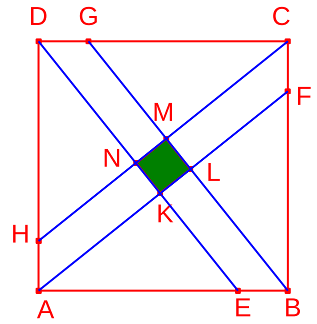
$\angle CME + \angle BMD = 60^{o} + \angle CMD$.

$42^{o} + 42^{o} = 60^{o} + \angle CMD$. Resolent l'equació:

$\angle CMD = 24^{o}$.



1684.- L'àrea del quadrat ABCD és 1.
Determineu l'àrea de la regió ombrejada si els punts indicats sobre els costats divideixen cada costat en dos segments en raó n:1.
Calendari Matemàtic, desembre 2015.



Solució:

L'àrea del quadrat ABCD és 1, aleshores, el costat $\overline{AB}=1$.

Siguen $\overline{BE}=x$, $\overline{AE}=nx$.

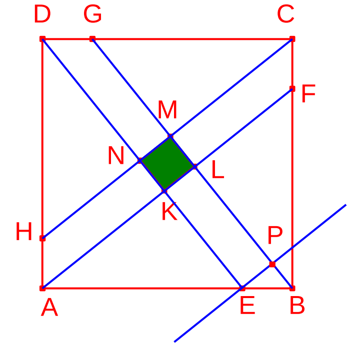
$(1+n)x=1$.

$$x=\frac{1}{1+n}.$$

KLMN és un quadrat.

Siga $\overline{KL}=c$ costat del quadrat KLMN.

Siga P la projecció de E sobre el segment $\overline{BG}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}$, $\overset{\Delta}{EPB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAE}$:

$$\overline{DE}=\sqrt{(nx)^2+((1+n)x)^2}=x\sqrt{2n^2+2n+1}.$$

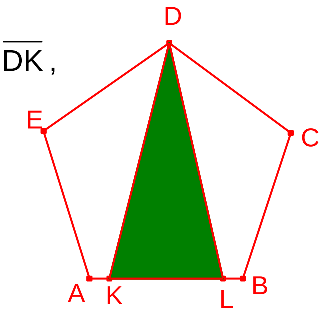
Aplicant el teorema de Tales als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}$, $\overset{\Delta}{EPB}$:

$$\frac{c}{x}=\frac{(1+n)x}{x\sqrt{2n^2+2n+a}}.$$

$$c=\frac{1+n}{\sqrt{2n^2+2n+a}}x=\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n+a}}.$$

La proporció entre les àrees dels quadrats KLMN i ABCD és:

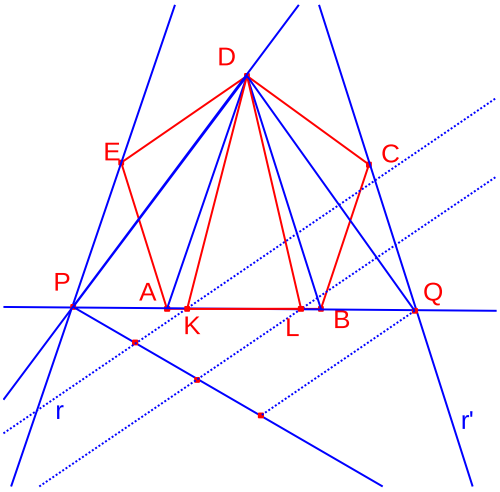
$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}}=\frac{c^2}{1}=\frac{1}{2n^2+2n+1}.$$



1685.- Donat el pentàgon regular ABCDE de costat 1, els segments $\overline{DK}$, $\overline{DL}$ el divideixen en tres parts iguals.

Determineu la mesura del segment $\overline{KL}$.

Solució:



$\overline{AK} = \overline{LB}$.

$\overline{AB} = 1$, $\overline{BE} = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Transformem el pentàgon regular ABCDE en un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQD}$ d'igual àrea.

Procediment:

a) Pel punt E tracem una paral·lela r al segment $\overline{AD}$ que talla la recta AB en el punt P.

Notem que les àrees dels triangle $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ADP}$ són iguals.

b) Pel punt C tracem una paral·lela r' al segment $\overline{BD}$ que talla la recta AB en el punt Q.

Notem que les àrees dels triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{BQD}$ són iguals.

Aleshores, les àrees del pentàgon ABCDE i el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQD}$ són iguals.

c) Dividirem el segment $\overline{PQ}$ en tres parts iguals.

d) El segment central $\overline{KL}$ és el que cerquem.

Notem que $\angle EPA = \angle DAB = 72^o$. $\angle PAE = 72^o$.

Aleshores, $\angle PEA = 36^o$.

$\angle AEB = 36^o$.

Aleshores, $\angle PEB = 72^o$.

Aleshores, $\overline{PB} = \overline{BE} = \Phi$.

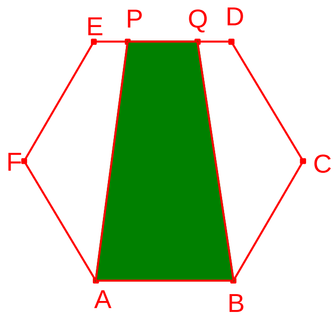
$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PB} - \overline{AB} = 2\Phi - 1 = \sqrt{5}$.

Aleshores, $\overline{KL} = \dfrac{1}{3}\overline{PQ} = \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$.

1686.- Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat 1.

Siguen els punts P Q del costat $\overline{DE}$.

Determineu la mesura del segment $\overline{PQ}$ tal que l'àrea del quadrilàter ABQP és la meitat de l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon regular. Siga O el centre de l'hexàgon regular.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{OM} = c\sqrt{3}.$$

Siga $\overline{PQ} = x$.

L'àrea de l'hexàgon regular és igual a l'àrea de 6 triangles equilàters de costat c:

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$

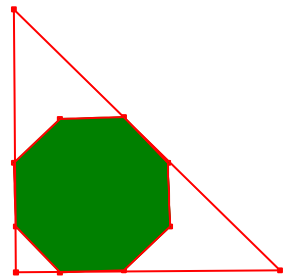
L'àrea del trapezi ABQP és:

$$S_{ABQP} = \frac{c+x}{2}\sqrt{3}c.$$

$$\frac{c+x}{2}\sqrt{3}c = \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{1}{2}c.$$



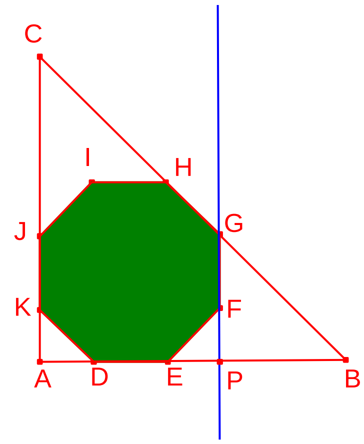
1687.- En la figura, un octògon regular està inscrit en un triangle rectangle isòsceles.
Calculeu la raó de proporcionalitat entre els perímetres i les àrees de l'octògon regular i el triangle.

Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle rectangle isòsceles, $A = 90^{\circ}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Siga DEFGHIJK l'octògon regular de costat $\overline{DE} = c$.

Siga P la projecció de G sobre el catet $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADK}$:

$$\overline{AD} = \overline{EP} = \overline{PF} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBG}$ és isòsceles, aleshores:

$$\overline{PB} = \overline{PG} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c. \quad \overline{AB} = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{BC} = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\,c.$$

El perímetre de l'octògon és:

$$P_{DEFGHIJK} = 8c.$$

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$P_{ABC} = 2\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)c + \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\,c = \left(7 + 5\sqrt{2}\right)c.$$

La proporció entre els perímetres és:

$$\frac{P_{DEFGHIJK}}{P_{ABC}} = \frac{8c}{\left(7 + 5\sqrt{2}\right)c} = 8\left(5\sqrt{2} - 7\right).$$

L'àrea de l'octògon regular és igual a l'àrea del quadrat de costat $\overline{AP}$ menys l'àrea del quadrat de costat c:

$$S_{DEFGHIJK} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 c^2 - c^2 = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)c^2$$

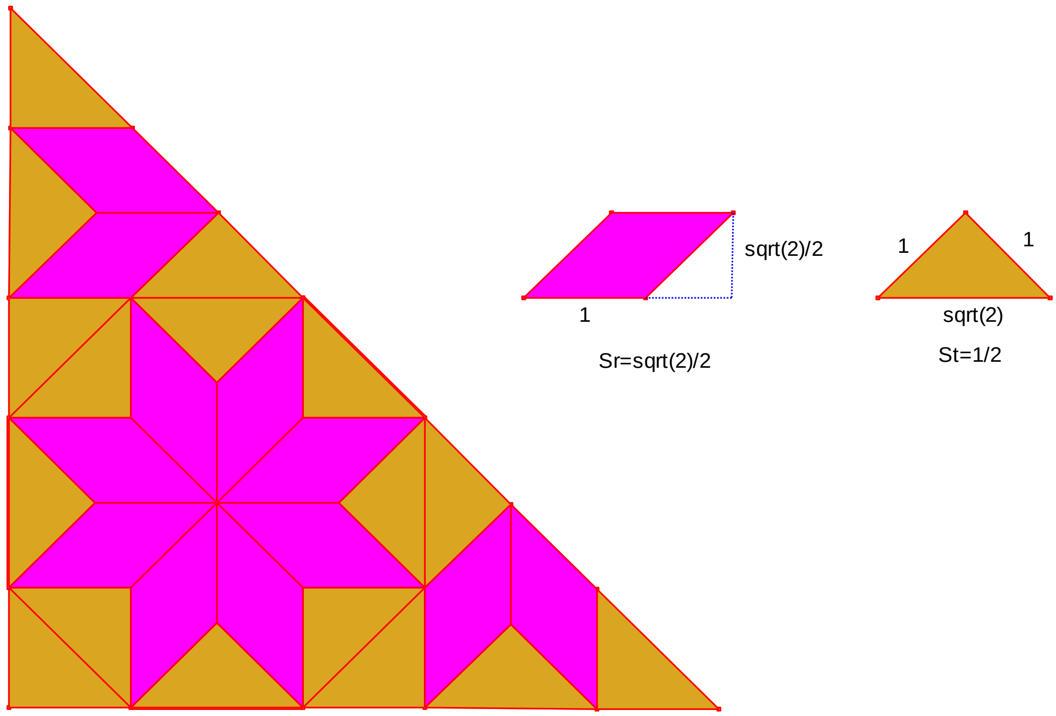
L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 c^2 = \frac{1}{4}\left(17 + 12\sqrt{2}\right)c^2.$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{DEFGHIJK}}{S_{ABC}} = \frac{2\left(1 + \sqrt{2}\right)c^2}{\frac{1}{4}\left(17 + 12\sqrt{2}\right)c^2} = 8\left(5\sqrt{2} - 7\right).$$

Solució d'Isabel Font:



L'àrea de l'octògon està formada per 8 triangles menuts i 8 rombres.

$$S_{\text{octògon}} = 8 \cdot S_t + 8 \cdot S_r = 8\frac{1}{2} + 8\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\left(1+\sqrt{2}\right).$$

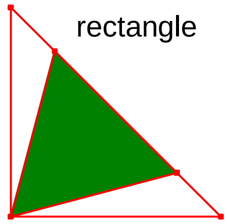
L'àrea del triangle exterior està formada per 17 triangles menuts i 12 rombres.

$$S_{\text{triangle}} = 17 \cdot S_t + 8 \cdot S_r = 17\frac{1}{2} + 12\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17+12\sqrt{2}}{2}.$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{\text{octògon}}}{S_{\text{triangle}}} = \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{\frac{17+12\sqrt{2}}{2}} = 8\left(-7+5\sqrt{2}\right).$$

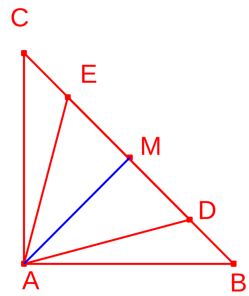
1688,- En la figura, triangle equilàter està inscrit en un triangle rectangle isòsceles.



Calculeu la raó de proporcionalitat entre els perímetres i les àrees del triangle equilàter i el triangle rectangle isòsceles.

Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle rectangle isòsceles, $A = 90^{o}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$.



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$ de costat $\overline{DE} = c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$ (punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{CM} = \overline{BM} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c. \quad \overline{BC} = c\sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

El perímetre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$ és:

$$P_{ADE} = 3c.$$

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$P_{ABC} = 2\frac{\sqrt{6}}{2}c + \sqrt{3}c = \left(\sqrt{6} + \sqrt{3}\right)c.$$

La proporció entre els perímetres és:

$$\frac{P_{ADE}}{P_{ABC}} = \frac{3c}{\left(\sqrt{6} + \sqrt{3}\right)c} = \sqrt{6} - \sqrt{3}.$$

L'àrea perímetre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$ és:

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

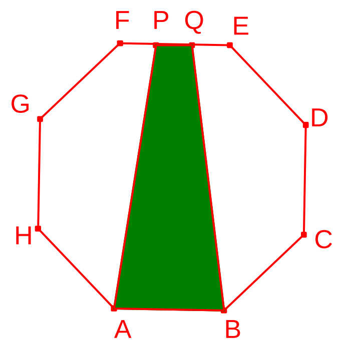
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{2}c\frac{\sqrt{6}}{2}c = \frac{3}{4}c^2.$$

La proporció entre els perímetres és:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1689.- Siga l'octògon regular ABCDEFGH de costat c.
Siguen els punts P Q del costat $\overline{EF}$.
Determineu la mesura del segment $\overline{PQ}$ tal que els segments $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ dividesca l'octògon en tres parts d'igual àrea.



Solució

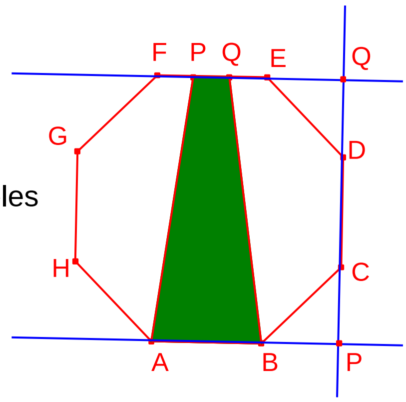
$\overline{FP} = \overline{QE}$.

Siga $\overline{PQ} = x$.

Les rectes AB i CD s'intersecten en el punt P.

Les rectes EF i CD s'intersecten en el punt Q.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APC}$:



$$\overline{PC} = \overline{QD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{PQ} = \left(1+\sqrt{2}\right)c.$$

L'àrea de l'octògon regular és igual a l'àrea d'un quadrat de costat $\overline{PQ} = \left(1+\sqrt{2}\right)c$ menys l'àrea d'un quadrat de costat c:

$$S_{ABCDEFGH} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 c^2 - c^2 = 2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2.$$

L'àrea del trapezi isòsceles ABQP és:

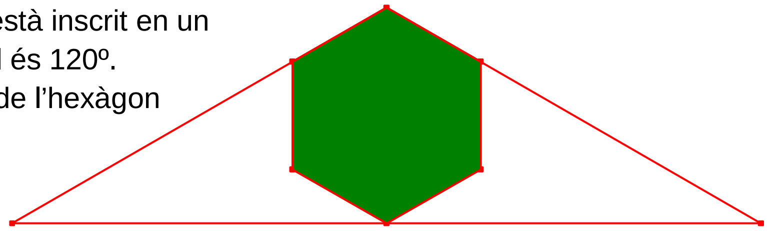
$$S_{ABQP} = \frac{c+x}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)c.$$

$$\frac{c+x}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)c = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)c^2.$$

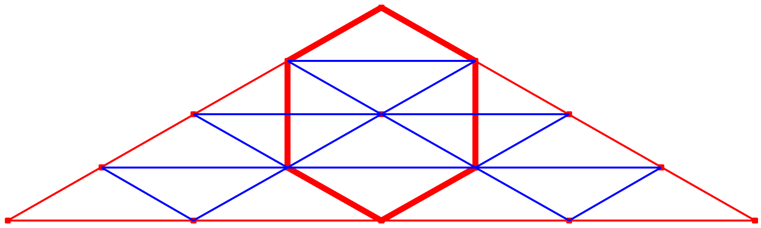
Resolent l'equació:

$$x = \overline{PQ} = \frac{1}{3}c.$$

1690.- En la figura, un hexàgon regular està inscrit en un triangle isòsceles tal que l'angle desigual és 120º. Determineu la proporció entre les àrees de l'hexàgon regular i el triangle.



Solució:



$$\frac{S_{\text{hexàgon}}}{S_{\text{triangle}}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$