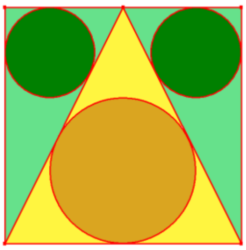
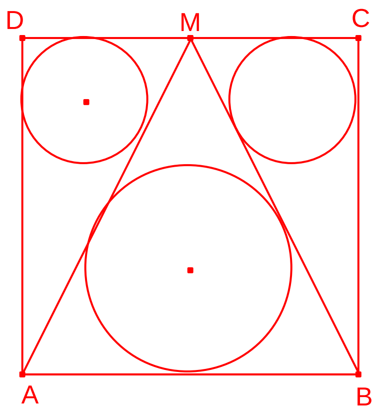
Problemes de Geometria per a l'ESO 222

2211.- La figura està formada per un quadrat i s'ha dibuixat el punt mig d'un costat.
Sobre els tres triangles formats s'han dibuixat les circumferències inscrites.
Calculeu la proporció entre el radi de la circumferència gran i una de les menudes.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és igual a la meitat de l'àrea del quadrat.

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}c^2 = \frac{\overline{AB} + \overline{AM} + \overline{BM}}{2}r$$

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{c + c\sqrt{5}}{2}r$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}c$$

Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADM}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADM}$ és igual a la quarta part de l'àrea del quadrat.

$$S_{ADM} = \frac{1}{4}c^2 = \frac{\overline{AD} + \overline{DM} + \overline{AM}}{2}s$$

$$\frac{1}{4}c^2 = \frac{c + \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{5}}{2}c}{2}s$$

$$c^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}cs$$

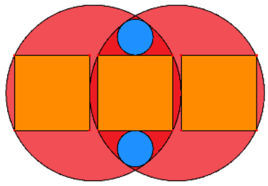
Resolent l'equació:

$$s = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}c$$

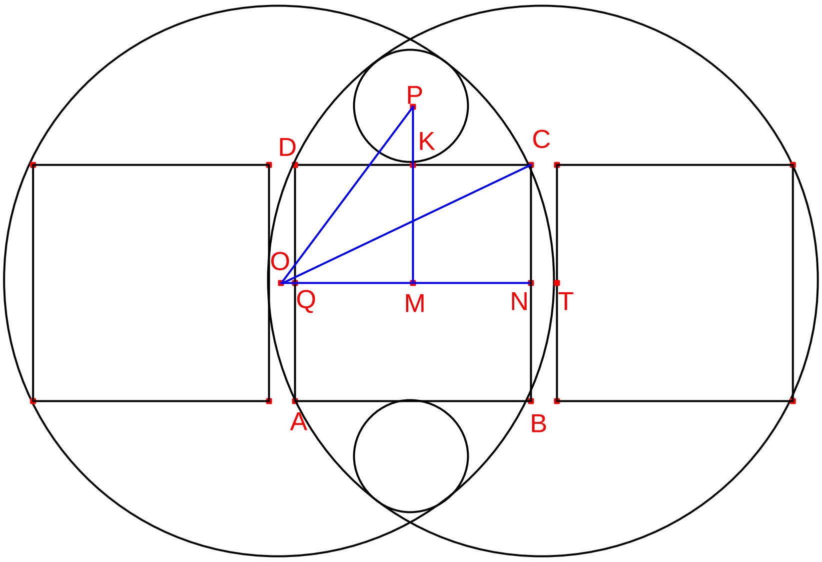
La proporció entre els radis és:

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{\frac{3 - \sqrt{5}}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

2212.- En dues circumferències d'igual radi R secants s'han inscrit tres quadrats iguals.
El quadrat central està inscrit en la intersecció de les dues circumferències.
Els quadrats laterals són tangents a les dues circumferències.
Dues circumferències iguals, són tangents a les circumferències de radis R i als costat del quadrat central.
Determineu la mesura del costat del quadrat i el radi de la circumferència tangent.
Sangaku, Temple Suwa Nagano. 1879



Solució:



Siga O el centre de la circumferència de l'esquerra de radi R.
Siga ABCD el quadrat central de costat $\overline{AB} = c$

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AD}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga T el punt de tangència de la circumferència de l'esquerra i el quadrat de la dreta.
Siga $a = \overline{NT}$

$2c + 3a = 2R$, aleshores, $a = \frac{2(R-c)}{3}$

$$\overline{OC} = R, \overline{NC} = \frac{c}{2}, \overline{ON} = R - a = \frac{R + 2c}{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONC}$

$$R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{R + 2c}{3}\right)^2$$

Simplificant:

$$25c^2 + 16Rc - 32R^2 = 0$$

$$25\left(\frac{c}{R}\right)^2 + 16\frac{c}{R} - 32 = 0$$

Resolent l'equació:

$$c = \frac{-8 + 12\sqrt{6}}{25}R$$

$$a = \frac{22 - 8\sqrt{6}}{25}R$$

Siga P el centre de la circumferència superior i r el seu radi.

$\overline{OM} = R - \frac{c}{2} - a = \frac{7+2\sqrt{6}}{25}R$, $\overline{OP} = R - r$, $\overline{MP} = \frac{c}{2} + r = \frac{-4+6\sqrt{6}}{25} + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$

$$(R-r)^2 = \left(\frac{7+2\sqrt{6}}{25}R\right)^2 + \left(\frac{-4+6\sqrt{6}}{25} + r\right)^2$$

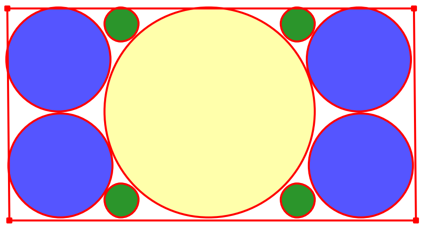
Simplificant:

$$\frac{42+12\sqrt{6}}{25}Rr = \frac{64+4\sqrt{6}}{125}R^2$$

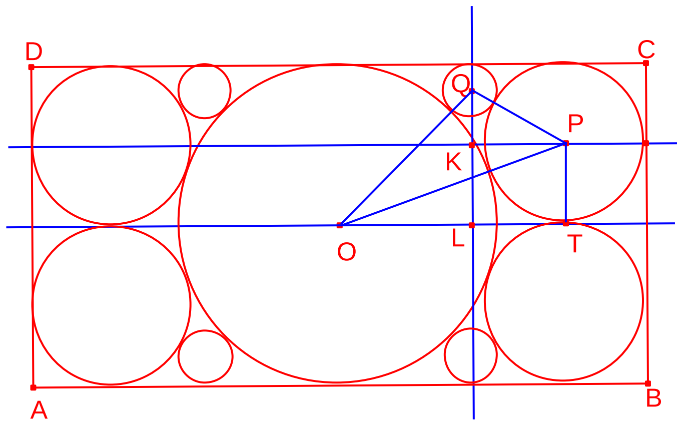
Resolent l'equació:

$$r = \frac{8-2\sqrt{6}}{15}R$$

2213.- En un rectangle s'ha dibuixat una circumferència central tangent als costats superior i inferior, de radi R
Quatre circumferències són tangents exterior a la circumferència i tangents als costats del rectangle.
Dues circumferències són tangents als costats superior i a dues circumferències.
Dues circumferències són tangents als costats inferior i a dues circumferències.
Determineu les mesures dels costats i dels radis de les circumferències.



Solució:
Siga el rectangle exterior ABCD.
$\overline{AD} = 2R$
Siga O el centre de la circumferència central de radi R.
El radi de les quatre circumferències dels cantons és $\frac{R}{2}$
Siga P el centre de la circumferència tangent a dos costats



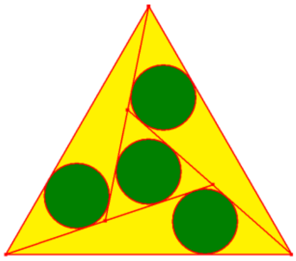
$\overline{OP} = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}, \overline{PT} = \frac{R}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$
$\overline{OT} = R\sqrt{2}$
El costat $\overline{AB}$ del rectangle és:
$\overline{AB} = 2\left(\overline{OT} + \frac{R}{2}\right) = \left(2\sqrt{2} + 1\right)R$

Siga Q el centre de la circumferència tangent a dues circumferències i a un costat.
Siga s el seu radi
Siga la recta r que passa per P paral·lela a la recta AB
Siga la recta s que passa per Q paral·lela a la recta AD.
Siga K la intersecció de les rectes r, s.
Siga L la intersecció de les recta OT, s.

$\overline{OQ} = R + s, \overline{LQ} = R - s$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLQ}$
$\overline{OL} = 2\sqrt{Rs}$

$\overline{PK} = R\sqrt{2} - 2\sqrt{Rs}, \overline{QK} = \frac{R}{2} - s, \overline{PQ} = \frac{R}{2} + s$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$
$\left(\frac{R}{2} + s\right)^2 = \left(\frac{R}{2} - s\right)^2 + \left(R\sqrt{2} - 2\sqrt{Rs}\right)^2$
Simplificant:
$s^2 - 6Rs + R^2 = 0$
$\left(\frac{s}{R}\right)^2 - 6\frac{s}{R} + 1 = 0$
Resolent l'equació, $s = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)R$

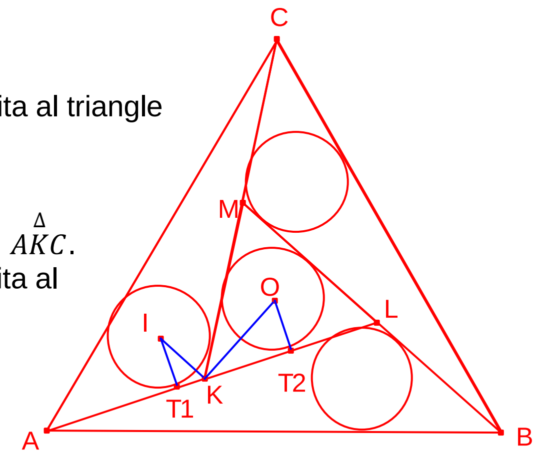
2214.- La figura està formada per un triangle equilàter exterior dividit en 4 triangles.
Un central equilàter i els altres tres iguals.
En els quatre triangles s'han inscrit quatre circumferències que són iguals.
Calculeu el radi de les quatre circumferències.
Sangaku. Prefectura Aichi. Temple Hikiuma 1797.



Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.

Siga el triangle equilàter interior $\overset{\Delta}{KLM}$
Siga O en centre dels dos triangles equilàters.
Siga T_2 el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle equilàter interior $\overset{\Delta}{KLM}$ i el costat $\overline{KL}$



Siga I en centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AKC}$.
Siga T_1 el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AKC}$ i el costat $\overline{AK}$

Siga $r = \overline{IT_1} = \overline{OT_2}$ radi de les circumferències inscrites.

$\angle AKC = 120°, \angle AKI = 60°, \angle OKL = 30°$

Siga $x = \overline{AK}, y = \overline{CK}$

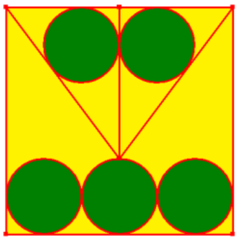
$$\overline{KT_1} = \frac{x + y - c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} r$$
$$\overline{KT_2} = \frac{y - x}{2} = \sqrt{3} r$$

Sumant i restant les dues expressions:
$$y = \frac{4\sqrt{3}}{3} r + \frac{c}{2}$$
$$x = \frac{c}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} r$$

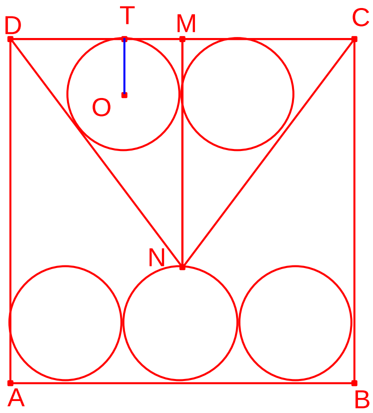
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AKC}$
$$c^2 = x^2 + y^2 + xy$$

$$c^2 = \left(\frac{c}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} r\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} r + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} r\right)\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} r + \frac{c}{2}\right)$$
Simplificant:
$$4r^2 + \sqrt{3} cr - \frac{1}{4} c^2 = 0$$
$$\frac{r}{c} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{8}$$

2215.- Dins d'unt quadrat s'han dibuixat cinc circumferències.
Tres són iguals i tangents a un costat.
Dues són inscrites en dos triangles.
Proveu que les cinc circumferències tenen el mateix radi.



Solució:

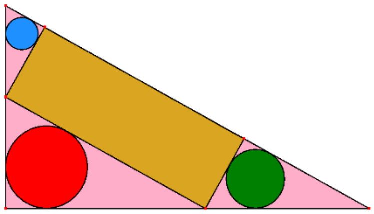


Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
Siga r el radi de les tres circumferències inferiors.
$c = 6r$
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.
La mediatriu del costat $\overline{CD}$ talla la circumferència inferior central en el punt N.
$\overline{MN} = c - 2r = 4r$, $\overline{DM} = \frac{c}{2} = 3r$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMN}$.
$\overline{DN} = 5r$

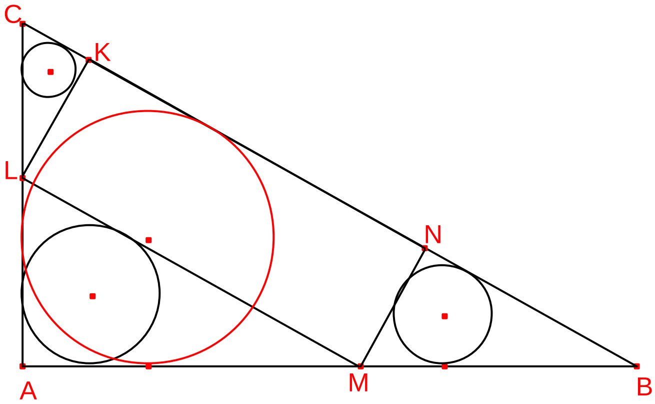
Siga $s = \overline{PT}$ el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMN}$.
$$s = \overline{TM} = \frac{\overline{DM} + \overline{MN} - \overline{DN}}{2} = \frac{3r + 4r - 5r}{2} = r$$

Aleshores, les cinc circumferències tenen el mateix radi.

2216.- Un rectangle està inscrit en un triangle rectangle formant tres triangles rectangles.
En els tres triangles rectangles formats, s'han inscrit tres circumferències de radis r_1, r_2, r_3 en ordre creixent.
Proveu que si el rectangle és el d'àrea màxima inscrit en el triangle rectangle, aleshores, $r_3{}^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2$



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$
Aplicant el teorema de Pitàgores $a^2 = b^2 + c^2$
Siga KLMN el rectangle inscrit en el triangle rectangle, $\overline{KN} = x, \overline{KL} = y, \overline{AP} = t$,

Els triangles rectangles $\overset{,\Delta}{KLC}, \overset{\Delta}{NBM}, \overset{\Delta}{AML}$ són semblants al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen r_1, r_2, r_3 els radis de les circumferències inscrites als triangles $\overset{,\Delta}{KLC}, \overset{\Delta}{NBM}, \overset{\Delta}{AML}$, respectivament.
b

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'àrea del triangle rectangle KLMN és:
$S_{KLMN} = xy$
Aplicant el teorema de Tales

$$\frac{\overline{AP}}{x} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{y}{b - \overline{AP}} = \frac{c}{a}$$

$x = \frac{a}{b}\overline{AP}, y = \frac{c}{a}(b - \overline{AP})$. Aleshores, l'àrea del rectangle KLMN és:
$S(t) = \frac{c}{b}t(b - t)$. La funció és una paràbola convexa. El mínim s'assoleix quan $t = \frac{b}{2}$, és a dir, $\overline{LM}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant el teorema de Tales els triangles $\overset{,\Delta}{KLC}, \overset{\Delta}{ABC}$:
$\frac{r_1}{\frac{b}{2}} = \frac{r}{a}$, aleshores, $r_1 = \frac{b}{2a}r$.

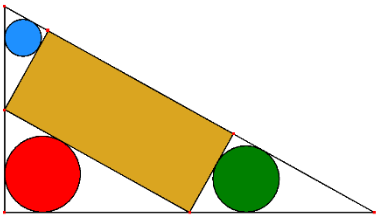
Aplicant el teorema de Tales els triangles $\overset{,\Delta}{NBM}, \overset{\Delta}{ABC}$:

$$r_2 = \frac{c}{2a}$$

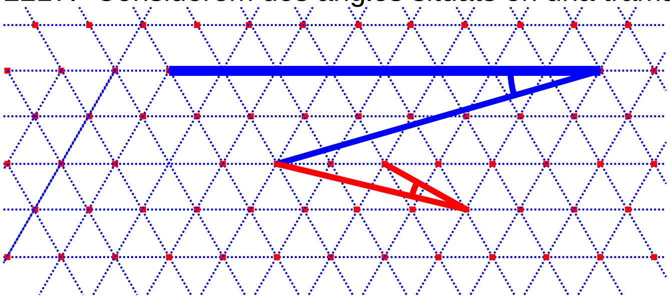
Aplicant el teorema de Tales els triangles $\overset{,\Delta}{AML}, \overset{\Delta}{ABC}$:

$$r_3 = \frac{1}{2}r$$

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 = \frac{b^2}{4a^2}r^2 + \frac{c^2}{4a^2}r^2 = \frac{1}{4}r^2 = r_3{}^2$$

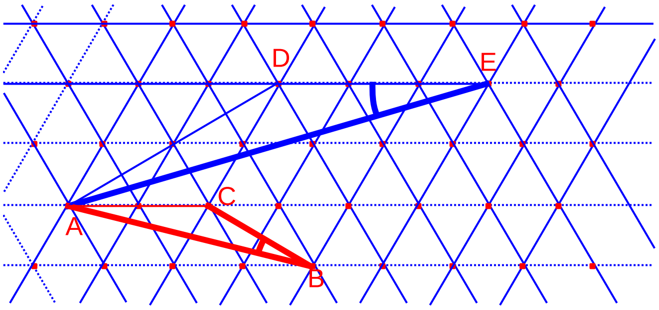


2217.- Considerem dos angles situats en una trama de triangles equilàters (isogonal)



Proveu que els dos angles són iguals.
Crux Mathematicorum MA30.

Solució:
Considerem el costats dels triangles equilàters unitaris.
Considerem els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AED}$,

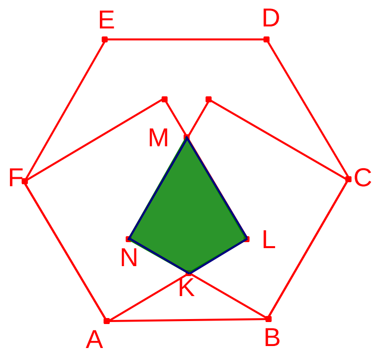


$\angle ACB = \angle ADE = 120°$

$\overline{AC} = 2, \overline{AD} = 2\sqrt{3}$
$\overline{BC} = \sqrt{3}, \overline{DE} = 3$
$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \sqrt{3}$

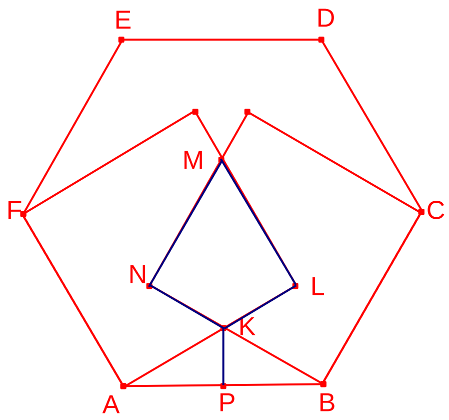
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AED}$ són semblants i de raó $1{:}\sqrt{3}$
Aleshores, $\angle ABC = \angle AED$

2218.- Donat l'hexàgon regular ABCDEF, s'han dibuixats dos quadrats interiors a l'hexàgon sobre els costats $\overline{BC}, \overline{AF}$. Determineu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos quadrats i l'àrea de l'hexàgon.



Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon regular ABCDEF.
Siga KLMN el quadrilàter format pe la intersecció dels dos quadrats.
KLMN és un cometa.
$\angle KAB = \angle FAB - \angle FAK = 120° - 90° = 30°$
$\angle NKL = 120°$

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APK}$:

$$\overline{AK} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

$$\overline{KL} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$$\overline{LM} = \overline{KL}\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)c$$

L'àrea del quadrilàter KLMN és:

$$S_{KLMN} = \overline{KL} \cdot \overline{LM} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)c^2 = \left(\frac{-6+4\sqrt{3}}{3}\right)c^2$$

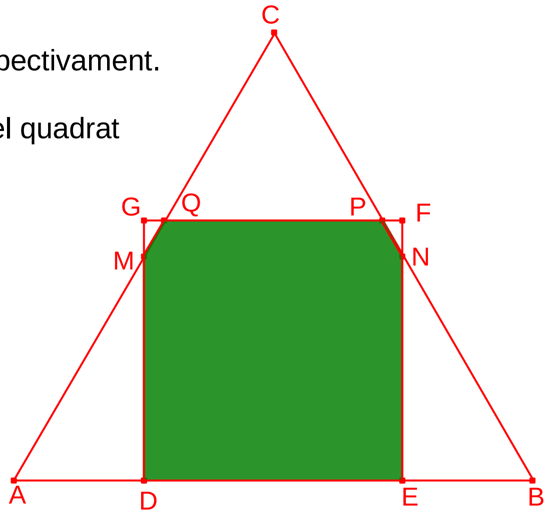
L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és:

$$S_H = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_H} = \frac{\frac{-6+4\sqrt{3}}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{9}$$

2219.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguem M, N els punts migs dels costats $\overline{AC}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga el quadrat DEFG que conté els punts M, N.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la intersecció del quadrat i el triangle i l'àrea del triangle.



Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat del triangle equilàter.

$\overline{AM} = \overline{BN} = \frac{c}{2}$

Aleshores, $\overline{AD} = \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{c}{4}$

Per tant, $\overline{DE} = \frac{c}{2}$

Siguen P, Q les interseccions del quadrat i del triangle.

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$$

$$\overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

$$\overline{CQ} = \overline{PQ} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)c$$

$$\overline{GM} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}c$$

Àrea de l'hexàgon DENPQM és igual a l'àrea del rectangle DENM més l'àrea del trapezi MNPQ:

$$S_{DEMPQM} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + \frac{\frac{1}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{2}\frac{2-\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{24-7\sqrt{3}}{48}c^2$$

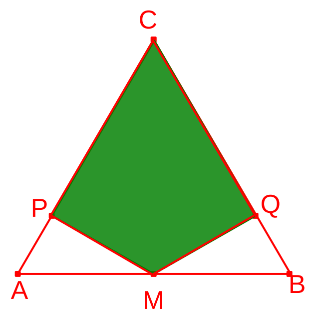
L'àrea del triangle és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

La proporció entre l'àrea de la intersecció del quadrat i el triangle i l'àrea del triangle és:

$$\frac{S_{DEMPQM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{24-7\sqrt{3}}{48}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{8\sqrt{3}-7}{12}$$

2220.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguem M, el punt mig del costats $\overline{AB}$.
Siguem P, Q les projeccions del punt M sobre els costats $\overline{AC}, \overline{BC}$, respectivament
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter PMQC i el triangle.



Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat del triangle equilàter.

$\overline{AM} = \frac{c}{2}$

$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{c}{4}$

$\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$

$\overline{CP} = c - \frac{c}{4} = \frac{3}{4}c$

L'àrea del quadrilàter PMQC és:

$$S_{PMQC} = \overline{CP} \cdot \overline{PM} = \frac{3}{4}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c = \frac{3\sqrt{3}}{16}c^2$$

L'àrea del triangle és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter PMQC i el triangle és:

$$\frac{S_{PMQC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{4}$$