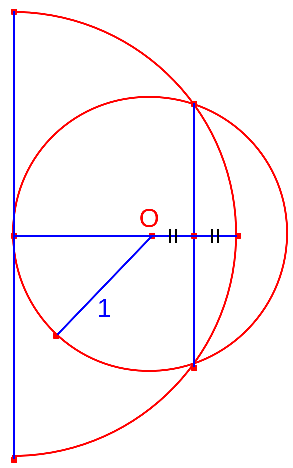
Problemes de Geometria per a l’ESO 382

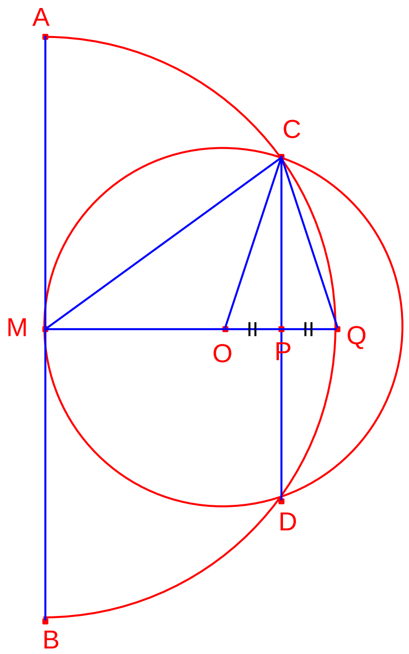
3811.- La figura està formada per una circumferència de radi 1 tangent al diàmetre d’una semicircumferència.
Calculeu el radi de la semicircumferència.



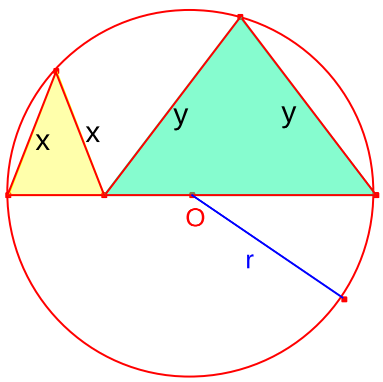
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OC} = \overline{OM} = 1$
Siga la semicircumferència de centre M i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga $\overline{OP} = \overline{PQ} = a$
$\overline{OC} = \overline{QC} = 1$
$R = 1 + 2a$
$\overline{MP} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPC}$:
$\overline{CP} = \sqrt{3a^2 + 2a}$

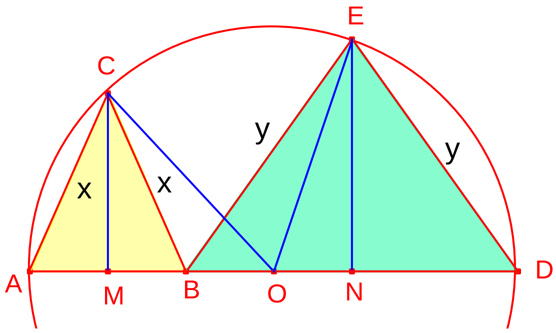
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPC}$:
$1 = a^2 + 3a^2 + 2a$
$4a^2 + 2a - 1 = 0$
$$a = \frac{-1 + \sqrt{4}}{4}$$
El radi de la semicircumferència és:
$$R = 1 + 2a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$



3812.- Sobre el diàmetre d'una circumferència de radi r, s'han dibuixat dos triangles isòsceles de costats iguals, x, y, respectivament.
Proveu que $x^2 + y^2 = 2r^2$



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = r$

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{AC} = \overline{BC} = x, \overline{AB} = 2a$

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{BDE}$ de costats $\overline{BE} = \overline{DE} = y, \overline{BD} = 2(r-a)$

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{BD}$, respectivament.

$\overline{OM} = r - a, \overline{ON} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{CMB}, \overset{\Delta}{CMO}$:

$x^2 - a^2 = r^2 - (r-a)^2$

$r^2 = x^2 - a^2 + (r-a)^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{BNE}, \overset{\Delta}{ONE}$:

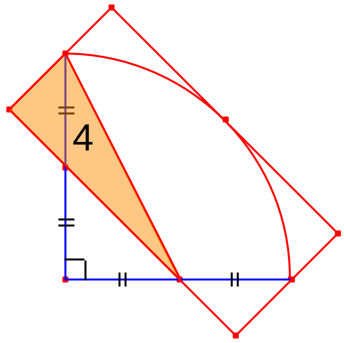
$r^2 - a^2 = y^2 - (r-a)^2$

$r^2 = y^2 + a^2 - (r-a)^2$

Sumant ambdues expressions:

$2r^2 = x^2 + y^2$

3813.- La figura està formada per un quadrant i un rectangle que té un costat tangent al quadrant.
El triangle ombrejat té àrea 4.
Calculeu l'àrea del quadrant.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 2a$
Siguen M, N els punts migs dels radi $\overline{OA}, \overline{OB}$, respectivament.
Siga el rectangle $CDEF$.

$\overline{ON} = \overline{NB} = a$

$\overline{FB} = \overline{FN} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\overline{MN} = a\sqrt{2}$

$\overline{CF} = 2 \cdot \overline{FN} + \overline{MN} = 2\sqrt{2}a$

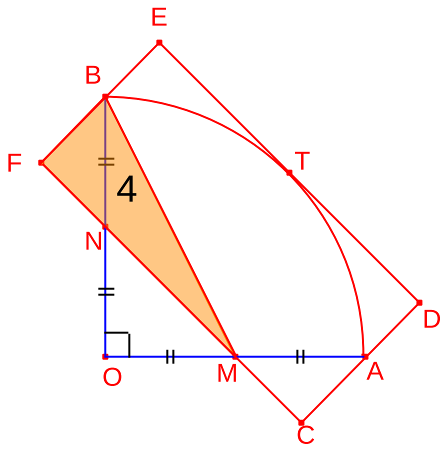
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{MFB}$ és 4:

$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot 2\sqrt{2}a = 4$

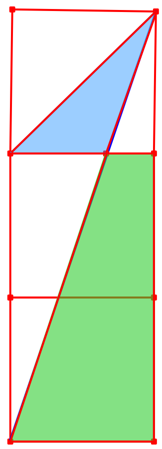
$a^2 = 4$

L'àrea del quadrant és:

$S_{quadrant} = \frac{1}{4}\pi(2a)^2 = 4\pi$



3814.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABG}, \overset{\Delta}{KFG}$ són semblants i de raó $3 : 1$

Aplicant el teorema de Tales:

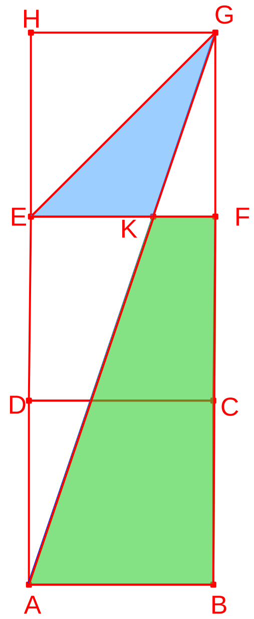
$$\overline{KF} = \frac{1}{3}, \overline{EK} = \frac{2}{3}$$

$$S_{EKG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$S_{ABFK} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{2} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

La proporció d'àrees és:

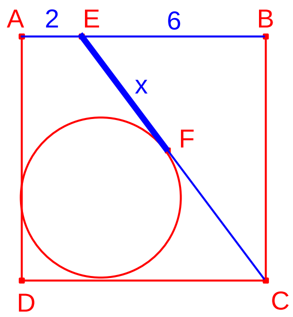
$$\frac{S_{EKG}}{S_{ABFK}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$



3815.- Siga E un punt del costat $\overline{AB}$ del quadrat $ABCD$ tal que $\overline{AE} = 2, \overline{BE} = 6$

Siga la circumferència tangent als segments $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{CE}$

Calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$



Solució:

Les rectes AD, CE s'intersecten en P.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PAE}, \overset{\Delta}{PDC}$ són semblants de raó $1:4$

Siga $\overline{AP} = a$

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{8+a} = \frac{1}{4}$$

Resolent l'equació:

$$a = \frac{8}{3}$$

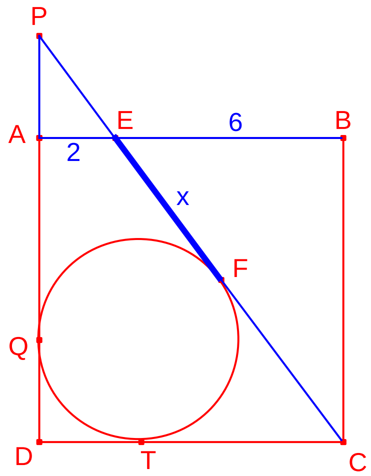
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAE}$:

$$\overline{PE} = \frac{10}{3}$$

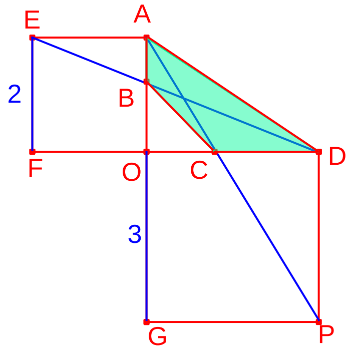
$$\overline{PC} = \frac{40}{3}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PF} = \frac{\overline{PD} + \overline{PC} - \overline{CD}}{2} = \frac{\frac{32}{3} + \frac{40}{3} - 8}{2} = 8$$

$$x = \overline{PF} - \overline{PE} = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$$



3816.- Siguen els quadrat $FOAE, GPDO$ de costats $\overline{FE} = 3, \overline{GO} = 3$.
Calculeu l'àrea del quadrilàter $ABCD$.



Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOC}, \overset{\Delta}{PDC}$ de raó $2:3$ aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{OC} = \frac{6}{5}$$

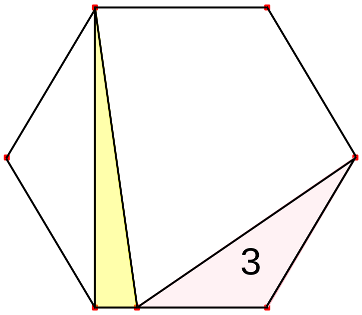
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOB}, \overset{\Delta}{DFE}$ de raó $3:5$ aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{BO} = \frac{6}{5}$$

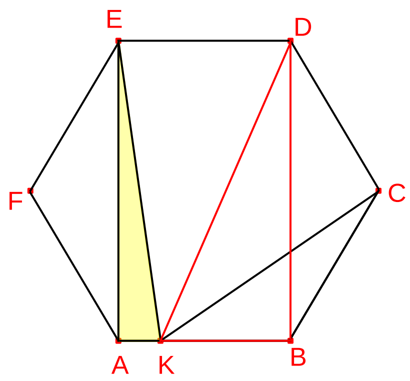
L'àrea del quadrilàter $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = S_{ODA} - S_{OCB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{57}{25}$$

3817.- L’àrea de l’hexàgon regular de la figura és 24.
L’àrea del triangle rosa és 3.
Calculeu l’àrea del triangle groc.



Solució:



[ABCDEF]=24

[KBC]=3

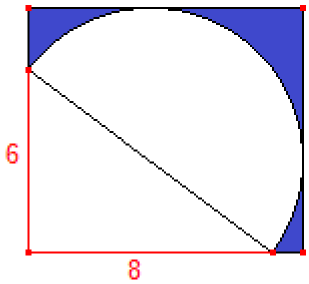
[KBD]=2·[KBC]=6

[ABD]=[ABCDEF]/3=8

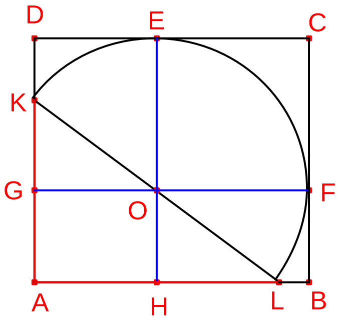
[AKE]+[KBD]=[ABD]

[AKE]=8-6=2

3818.- En un rectangle s'ha inscrit un semicercle.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:

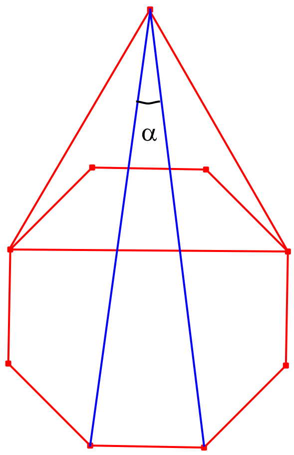


Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{KL}$

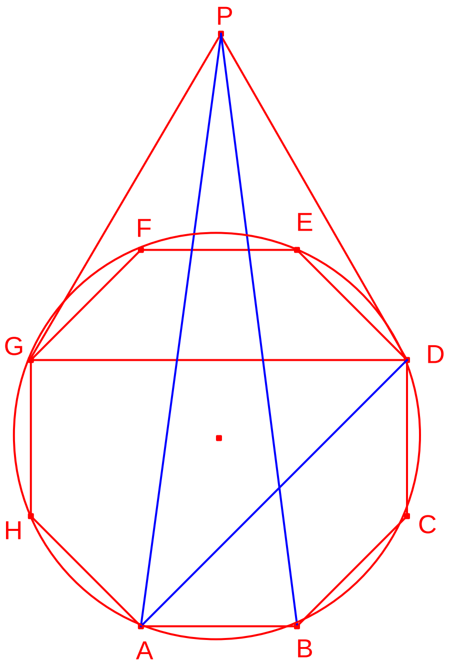
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KAL}$:
$\overline{KL} = 10$
Siguen E, F els punts de tangència del semicercle i els costats $\overline{CD}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga G la projecció de F sobre el costat $\overline{AD}$.
Siga H la projecció de E sobre el costat $\overline{AB}$
$\overline{OE} = 5, \overline{OH} = 3$
Aleshores, $\overline{AD} = 8$
$\overline{OF} = 5, \overline{OG} = 4$
Aleshores, $\overline{AB} = 9$
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 8 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 - \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 = 48 - \frac{25}{2}\pi \approx 32.2920$$

3819.- La figura està formada per un octògon regular i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l’angle α



Solució:



DG=DP

DG=AD

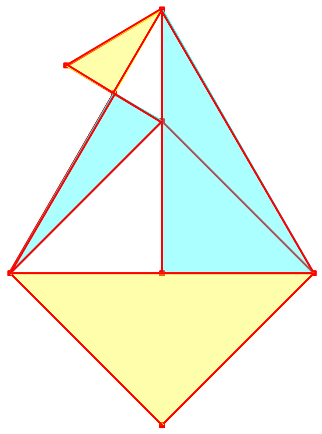
AngleADP=60º+45º

AnglePAD=75º/2

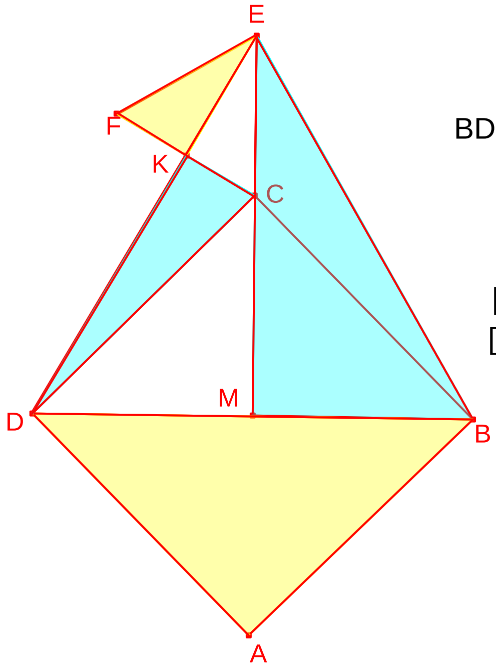
AngleDAB=45º

AngleAPB=180º-2(75º/2+45º)=15º

3820.- La figura està formada per un quadrat i dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea blava



Solució:



AB=1

BD=BE=sqrt(2), CM=sqrt(2)/2

EM=sqrt(6)/2

CE=(sqrt(6)-sqrt(2))/2

[ABD]=1/2

[FKE]=(1/2)·(sqrt(3)/4)·CE²=(-3+2·sqrt(3))/8

[Groc]=[ABD]+[FKE]=(1+2·sqrt(3))/8

[MBE]=(1/2)·(sqrt(2)/2)·(sqrt(6)/2)=sqrt(3)/4

[DCK]=(1/2)·[FDC]=(1/4)sin 30º=1/8

[Blau]=[MBE]+[DCK]=(1+2·sqrt(3))/8

[Groc]:[Blau]=1 : 1