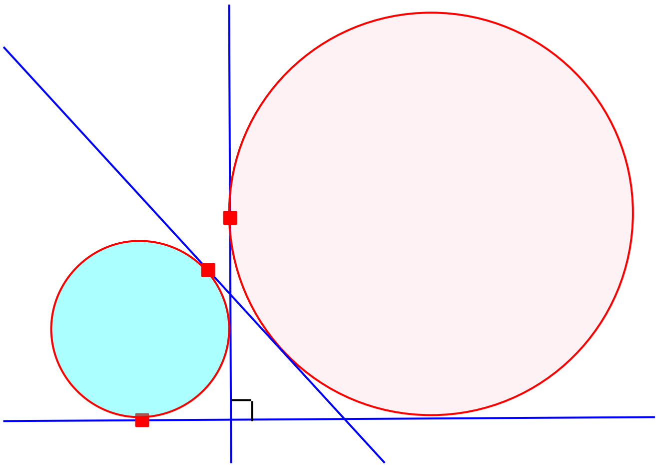
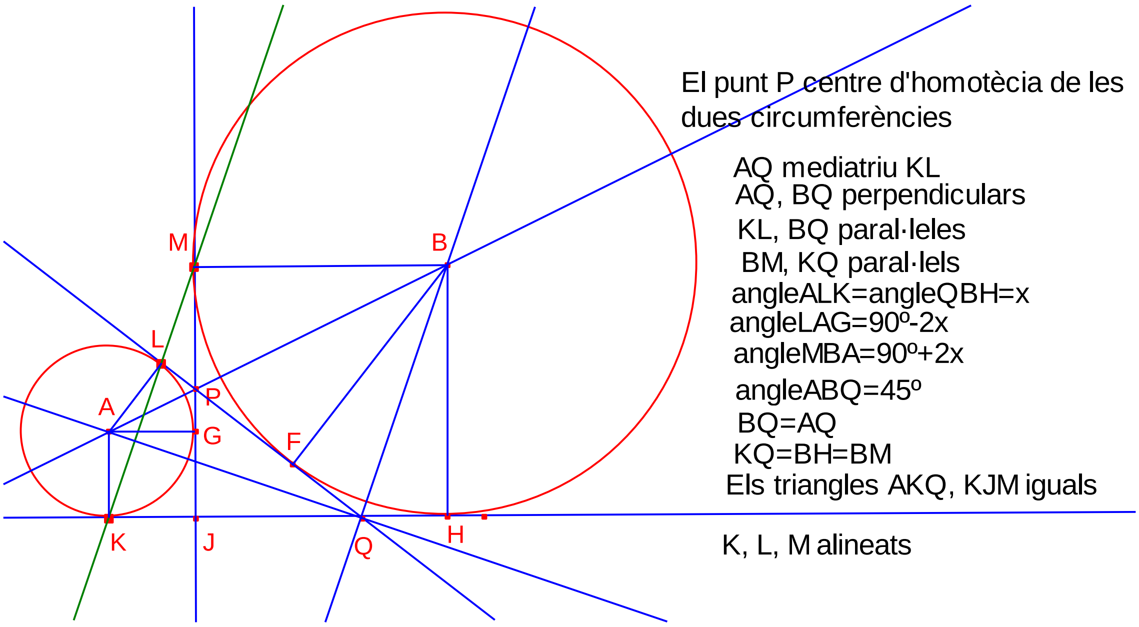
Problemes de Geometria per a l'ESO 535

5341.- La figura està formada per dues circumferències i tres tangents.
Proveu que els tres punts de tangència estan alineats.



Solució:

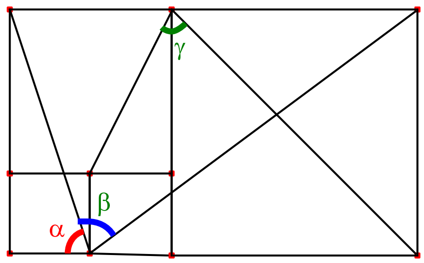


El punt P centre d'homotècia de les dues circumferències

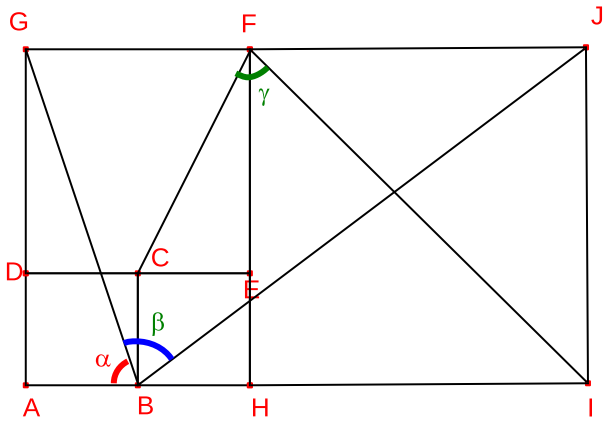
AQ mediatriu KL
AQ, BQ perpendiculars
KL, BQ paral·leles
BM, KQ paral·lels
angleALK=angleQBH=x
angleLAG=90º-2x
angleMBA=90º+2x
angleABQ=45º
BQ=AQ
KQ=BH=BM
Els triangles AKQ, KJM iguals

K, L, M alineats

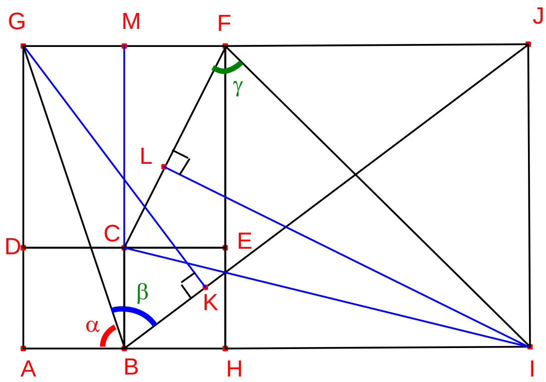
5342.- La figura està formada per quatre quadrats.
Calculeu la proporció de la mesura dels angles $\alpha : \beta : \gamma$



Solució1:
$\overline{AB} = 1, \overline{EF} = 2, \overline{AG} = 3$
Siga $x = \angle JBI, \angle CFE = y$
$\tan x = \frac{3}{4}, \tan y = \frac{1}{2}$
$\tan \alpha = 3$
$\tan \beta = \tan\big(180° - (\alpha + x)\big) = -\tan(\alpha + x) =$
$$= -\frac{3 + \frac{3}{4}}{1 - 3 \cdot \frac{3}{4}} = 3$$
$\tan \gamma = \tan(45° + y) = -\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{2}} = 3$
$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 1 : 1$



Solució 2:

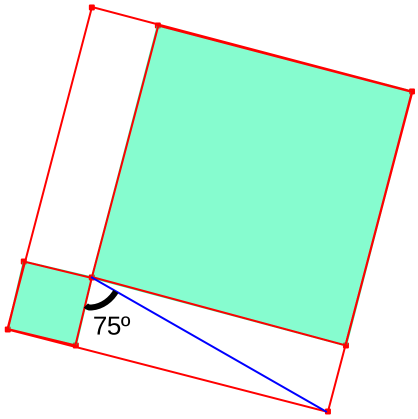


AB=1, DE=, HI=3
BJ=5
[BJG]=5·3/2 = 5·GK/2
GK=3
Els triangles GAB, GKB iguals
α = β
[CFI]=[BHJM]-([MFC]+[BIC]=15/2-(1+2)=9/2
[CFI]=CF·LI/2=sqrt(5)/2 · LI = 9/2
LI=(9/5)·sqrt(5)

FI=3·sqrt(2), BG=sqrt(10)

AG/BG = LI/FI
β = γ

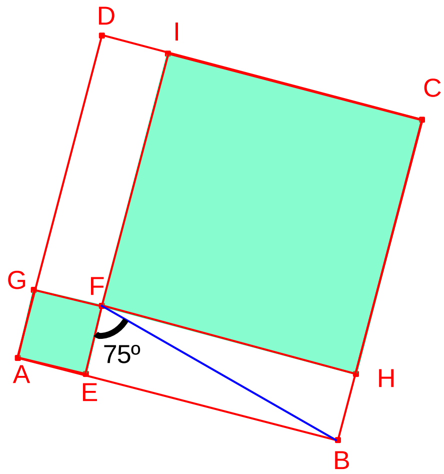
5343.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



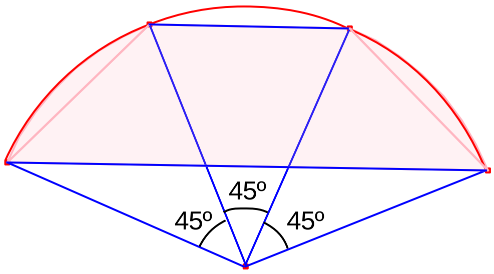
Solució:

Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = 1$
Siga el quadrat $FHCI$ de costat $\overline{FH} = a$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1 + a$
$a = \tan 75° = 2 + \sqrt{3}$
La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat $ABCD$ és:

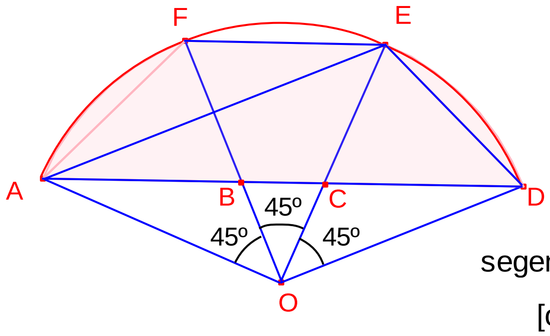
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{1 + a^2}{(1 + a)^2} = \frac{1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2}{\left(3 + \sqrt{3}\right)^2} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{12 + 6\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$



5344.- La figura està formada per un sector de 145º
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:



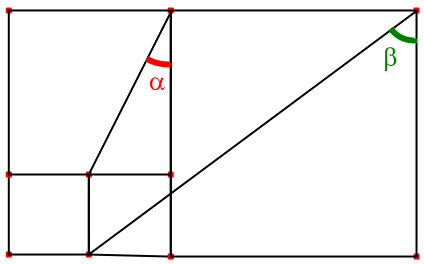
AngleDAE=45º/2
angleDAO=45º/2
angleEAO=45º

AE, OD paral·lels
[AED]=[AEO]
[CDE]=[ACO]
segemencircular FE=segmentcircular ED

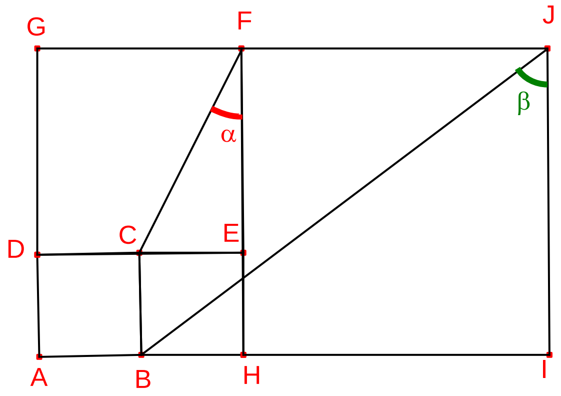
[ombrejada]=sector(O,90º)
[total]=sector(O, 135º)

[ombrejada]/[total]=2/3

5345.- La figura està formada per quatre quadrats.
Calculeu la proporció de la mesura dels angles $\alpha : \beta$



Solució 1:



$\overline{AB} = 1, \overline{EF} = 2, \overline{AG} = 3$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

$\tan\beta = \frac{4}{3}$

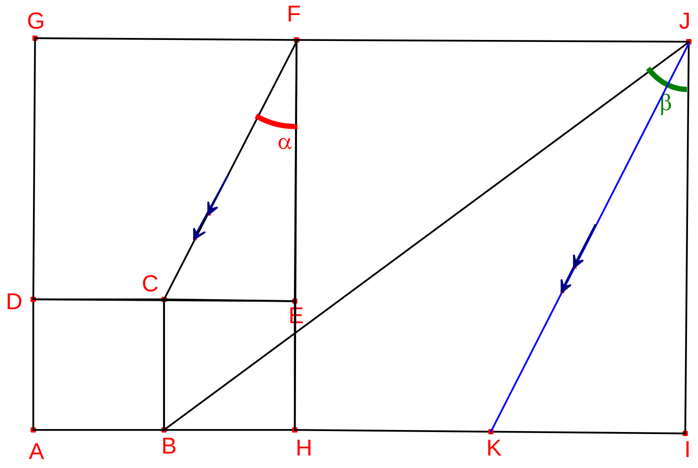
$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \tan\alpha$$

$\beta = 2\alpha$

Aleshores:

$\alpha : \beta = 1 : 2$

Solució 2:



AB=1

DE=2

HI=IJ=3

BI=4

BJ=5

KI=3/2, BK=4-3/2=5/2

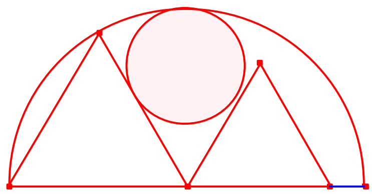
KI/JI = BK/BJ= 1/2

JK bisectriu angleBJI

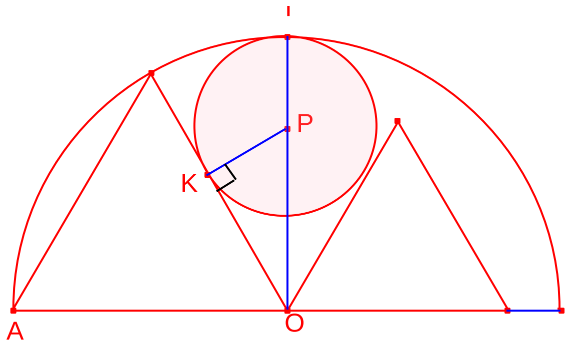
$\beta - \alpha = \alpha$

$\alpha : \beta = 1 : 2$

5346.- La figura està formada per un semicercle que conté dos triangles equilàters i un cercle.
Calculeu la proporció entre l’àrea del cercle i l’àrea del semicercle.



Solució:

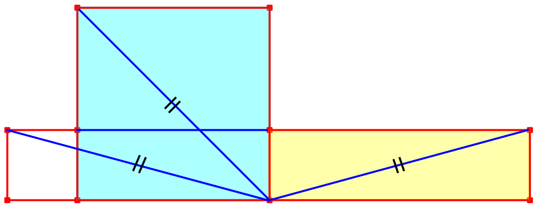


OA=OT=R
PT=PK=r
OP=R-r
angleKOP=30º

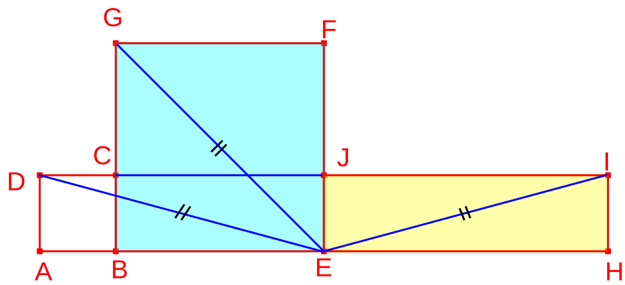
r/(R-r) = 1/2
r=R/3

[ombrejada]/[semicercle]=r²/(2R²)=2/9

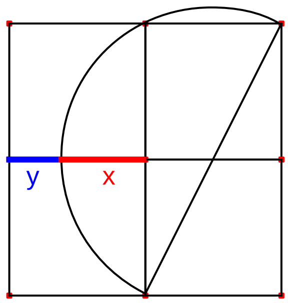
5347.- La figura està formada per dos quadrats i un rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat blau i l'àrea del rectangle groc.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el rectangle $EHIJ$ de costats $\overline{EH} = a, \overline{HI} = c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EJI}$:
$\overline{EI} = \sqrt{a^2 + c^2}$
Els triangles rectangle $\overset{\Delta}{DAE}, \overset{\Delta}{EJI}$ són iguals.
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = a - c$
$\overline{GE} = (a - c)\sqrt{2}$
$\sqrt{a^2 + c^2} = (a - c)\sqrt{2}$
Elevant al quadrat:
$a^2 + c^2 = 2(a^2 + c^2 - 2ac)$
Simplificant:
$a^2 + c^2 - 2ac = 2ac$
$(a - c)^2 = 2ab$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{BEFG}}{S_{EHI}} = \frac{(a - c)^2}{ac} = 2$



5348.- La figura està formada per quatre quadrats iguals i una semicircumferència.
Calculeu la proporció $x : y$



Solució:
Siga $\overline{AE} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBC}$:

$\overline{EC} = \sqrt{5}$

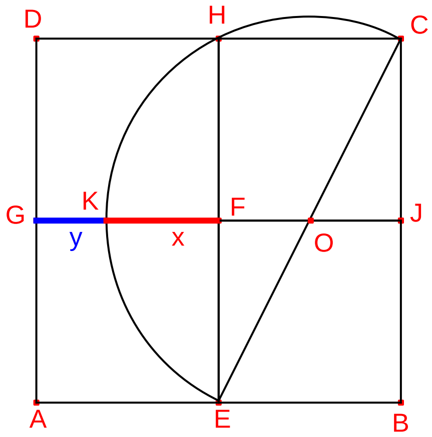
$\overline{OC} = \overline{OK} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{EB} = \frac{1}{2}$

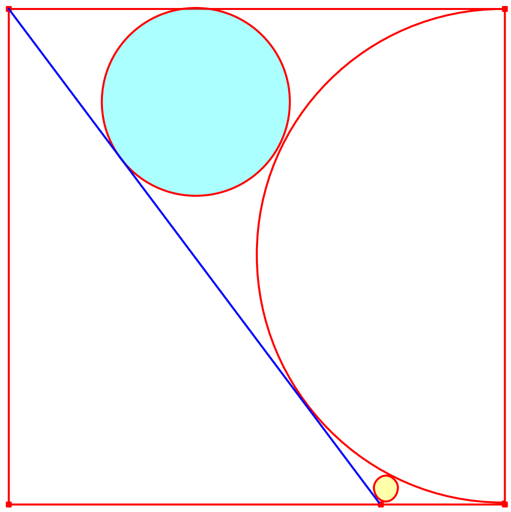
$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$

$y = 1 - x = 1 - \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi - 1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$

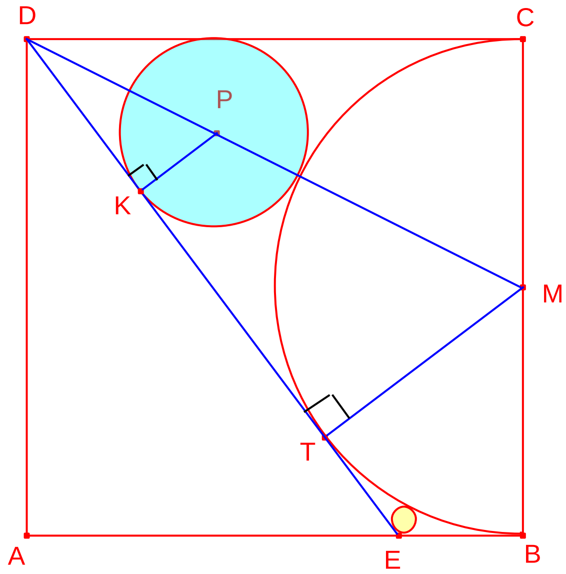
$\frac{x}{y} = \Phi$



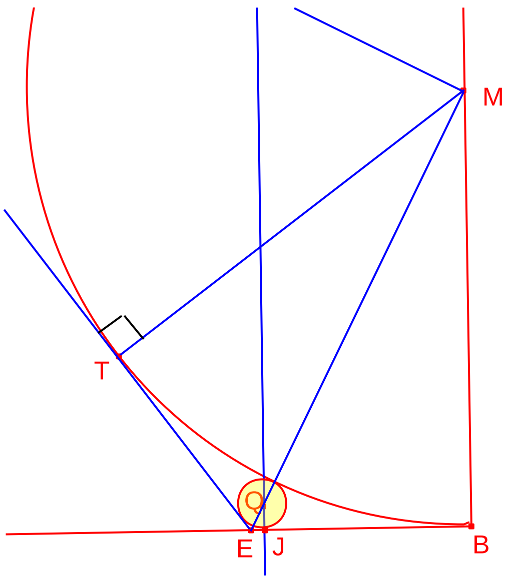
5349.- La figura està formada per un quadrat, una semicircumferència sobre un costat, un segment tangent a la semicircumferència i dues circumferències.
Calculeu la proporció entre les àrees del cercle blau i del cercle groc.



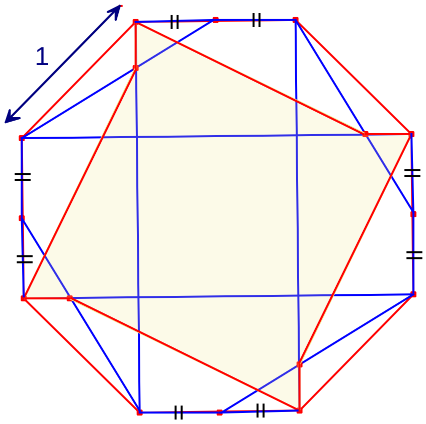
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
$\overline{DT} = \overline{DC} = 2$
$\overline{DM} = \sqrt{5}$
Siga $\overline{ET} = \overline{EB} = a$
$\overline{AE} = 2 - a, \overline{DE} = 2 + a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAE}$:
$(2 + a)^2 = (2 - a)^2 + 4$
Resolent l'equació:
$a = \frac{1}{2}$
Siga la circumferència de centre P i radi $r = \overline{PK}$
Els triangles $\overset{\Delta}{DCM}, \overset{\Delta}{DTM}$ són iguals. Aleshores, DM és bisectriu de $\angle CDE$.
Per tant P pertany a la recta DM.
Els triangles $\overset{\Delta}{DQP}, \overset{\Delta}{DTM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - (1 + r)}$
Resolent l'equació:
$r = \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\Phi^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$



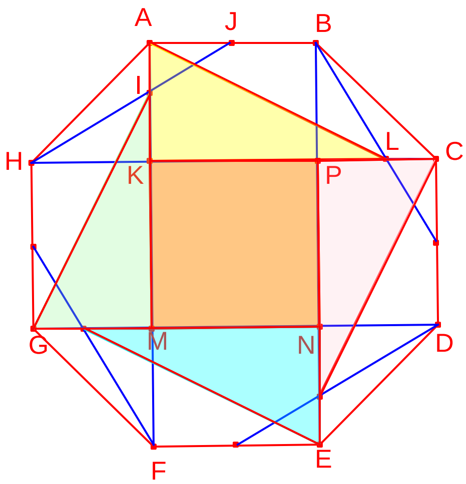
Siga la circumferència de centre Q i radi $s = \overline{QJ}$
$\overline{ME} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \overline{MQ} = 1 + s, \overline{EJ} = \frac{s}{2}, \overline{QE} = \frac{s\sqrt{5}}{2}$
$\frac{\sqrt{5}}{2}s + 1 + s = \frac{\sqrt{5}}{2}$
$s = \frac{\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{2}}{\Phi + \frac{1}{2}} = \frac{2 - \Phi}{\Phi(2\Phi + 1)} = \frac{-1 + \Phi}{\Phi^2(2\Phi + 1)} = \frac{1}{\Phi^6}$
La proporció d'àrees entre els dos cercles:
$\frac{S_{blava}}{S_{groga}} = \frac{r^2}{s^2} = \Phi^8$



5350.- La figura està formada per un octògon regular de costat 1, quatre diagonals i quatre segments.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:



HK=AK=sqrt(2)/2

CH=1+sqrt(2)

AI=LC=x

Els triangles JAI, HKI són semblant

x/(1/2) = (sqrt(2)/2-x)/ (sqrt(2)/2)

x=(2-sqrt(2)/2

KL=CH-(HK+LC)=sqrt(2)

[AKL]=(1/2)·sqrt(2)/2·sqrt(2)=1/2

[ombrejada]=4·[AKL]+[KMNP]=3