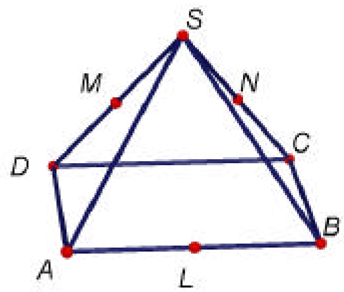
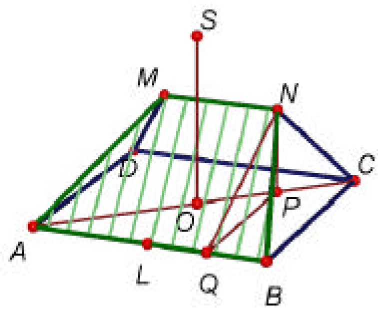
Problemes de Geometria per a l'ESO 83

821.- Les arestes de la piràmide quadrangular ABCDS regular són totes iguals a a.
Siguem L, M, N els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{SD}$ i $\overline{SC}$, respectivament.
Calculeu l'àrea del la secció de la piràmide determinada pel plànol que passa pels punts M, N, L.



Solució:
Siga O el centre del quadrat ABCD.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$, $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$\overline{OS} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aleshores, $\angle ASC = \angle BSC = 90^{o}$.

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{a}{2}$.

$\overline{MN}$, $\overline{AB}$ són paral·lels, aleshores la secció és el trapezi ABNM.
Siga P la projecció de N sobre la base ABCD.
Siga Q la projecció de N sobre l'aresta $\overline{AB}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SOC}$, $\overset{\Delta}{NPC}$ són semblants i de raó 2:1.

Aleshores: $\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{OS} = a\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\overline{PQ} = \frac{3}{4}\overline{BS} = \frac{3}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QPN}$:

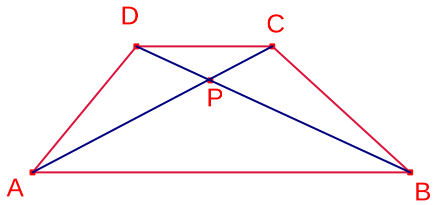
$$\overline{NQ} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{11}.$$

L'àrea del trapezi ABMN és:

$$S_{ABNM} = \frac{\overline{AB} + \overline{MN}}{2} \cdot \overline{NQ} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2}\frac{a}{4}\sqrt{11} = \frac{3\sqrt{11}}{16}a^2.$$

822.- Les bases d'un trapezi mesuren 50cm i 18cm, les diagonal 36cm i 40cm. Calculeu la seua àrea.
Kutepov 214.

Solució:
Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AB}=50$, $\overline{CD}=18$ i diagonals $\overline{AC}=36$, $\overline{BD}=40$.
Siga P la intersecció de les diagonals.
Siga $a=\overline{AP}$, $\overline{BP}=b$.



Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CDP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{50}=\frac{36-a}{18}=\frac{36}{68}, \text{ aleshores, } a=\frac{450}{17}.$$

$$\frac{b}{50}=\frac{40-b}{18}=\frac{40}{68}, \text{ aleshores, } b=\frac{500}{17}.$$

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ mitjançant la fórmula d'Heró:

$$S_{ABP}=\frac{\sqrt{\left(50+\frac{450}{17}+\frac{500}{17}\right)\left(-50+\frac{450}{17}+\frac{500}{17}\right)\left(50-\frac{450}{17}+\frac{500}{17}\right)\left(50+\frac{450}{17}-\frac{500}{17}\right)}}{4}.$$

$$S_{ABP}=\frac{90000}{289}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals al les bases:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}=\frac{36\cdot 17}{450}=\frac{34}{25}.$$

$$S_{ABC}=\frac{34}{25}\frac{90000}{289}=\frac{7200}{17}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CDA}$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals al les bases:

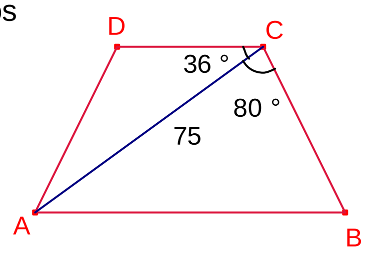
$$\frac{S_{CDA}}{S_{ABC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{18}{50}.$$

$$S_{CDA}=\frac{18}{50}\frac{7200}{17}=\frac{2592}{17}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{CDA}=\frac{7200}{17}+\frac{2592}{17}=576\text{cm}^2.$$

823.- En un trapezi isòsceles la diagonal divideix l'angle en dos angles de 36º i 80º (veure figura).
Si la diagonal mesura 75cm, determineu els costats i l'àrea.
Kutepov 181



Solució:

Siga el trapezi isòsceles ABCD de base paral·leles $a=\overline{AB}$, $\overline{CD}=b$, $\overline{AD}=\overline{BC}=c$.

Siga $\overline{AC}=75$, $\angle ACD=36^o$, $\angle ACB=80^o$.

Aleshores, $\angle CAB=36^o$, $\angle BCD=\angle ADC=116^o$, $\angle ABC=64^o$. $\angle CAD=28^o$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{a}{\sin 80^o}=\frac{75}{\sin 64^o}=\frac{c}{\sin 36^o}.$$

$$a=75\frac{\sin 80^o}{\sin 64^o}. \quad a\approx 82'18cm.$$

$$c=75\frac{\sin 36^o}{\sin 64^o}. \quad c\approx 49'05cm.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\frac{b}{\sin 28^o}=\frac{75}{\sin 116^o}.$$

$$b=75\frac{\sin 28^o}{\sin 116^o}. \quad b\approx 39'18cm.$$

Aplicant la fórmula trigonomètrica de l'àrea:

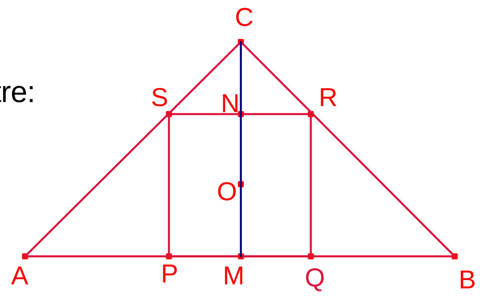
$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}a\cdot 75\cdot\sin 36^o+\frac{1}{2}b\cdot 75\cdot\sin 36^o.$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}75^2\cdot\sin 36^o\left(\frac{\sin 80^o}{\sin 64^o}+\frac{\sin 28^o}{\sin 116^o}\right)\approx 2674'85cm^2.$$

824.- En un triangle isòsceles s'ha inscrit un quadrat d'àrea una unitat i un dels costats està en la base del triangle.
Determineu l'àrea del triangle si el centre del quadrat és el baricentre del triangle.
Potapov, pàgina 352, problema 25

Solució:
Siga el quadrat PQRS d'àrea 1 i centre O.
$\overline{PQ}=1$.

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, amb $\overline{PQ}$ sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{RS}$ del quadrat.
O és el baricentre del triangle. Per la propietat del baricentre:

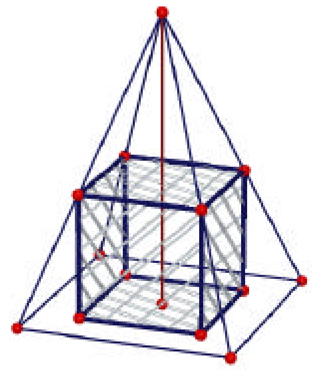


$\overline{CO}=2\cdot\overline{OM}=1$.
$\overline{CN}=\frac{1}{2}$, $\overline{MC}=\frac{3}{2}$.
$\overline{NR}=\frac{1}{2}$.

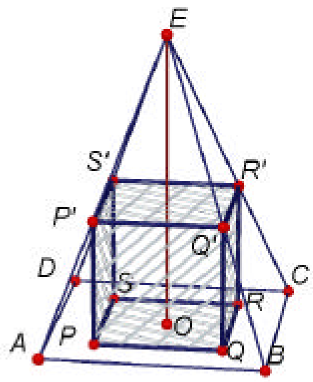
El triangle $\overset{\Delta}{NRC}$ és rectangle i isòsceles.
El triangles $\overset{\Delta}{NRC}$, $\overset{\Delta}{MBC}$ són semblants. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ és rectangle i isòsceles.
$\overline{MB}=\overline{MC}=\frac{3}{2}$.
$\overline{AB}=2\overline{MB}=3$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MC}}{2}=\frac{3\cdot\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{4}.$$

825.- Una piràmide regular quadrangular l'altura és el doble que l'aresta de la base. Té inscrit un cub tal que una cara del cub pertany a la base de la piràmide i els vèrtexs de la cara oposada pertanyen a les arestes laterals de la piràmide. Determineu la proporció entre el volum del cub i el de la piràmide.



Solució:



Siga ABCDE piràmide regular quadrangular de base quadrada ABCD $\overline{AB}=a$.

Siga O el centre de la base. $\overline{OE}=2a$.

El volum de la piràmide ABCDE és:

$$V_{\text{piràmide}}=\frac{1}{3}a^2 2a=\frac{2}{3}a^3.$$

Siga PQRSP'Q'R'S' el cub tal que PQRS pertany a la base ABCD i P'Q'R'S' a les arestes laterals.

Siga $\overline{PQ}=b$ aresta del cub.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\overline{AO}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{POQ}$:

$$\overline{PO}=\frac{\sqrt{2}}{2}b.\ \overline{PP'}=b.$$

$$\overline{AP}=\overline{AO}-\overline{PO}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b).$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APP'}$, $\overset{\Delta}{AOE}$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{PP'}}{\overline{OE}}.$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{b}{2a}.$$ Simplificant:

$$3b=2a.$$

$$b=\frac{2}{3}a.$$

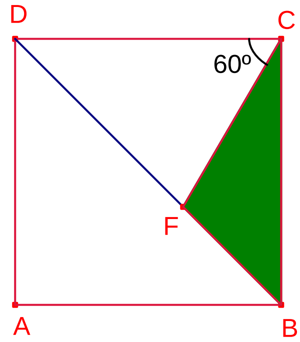
El volum del cub PQRSP'Q'R'S' és:

$$V_{\text{cub}}=\left(\frac{2}{3}a\right)^3.$$

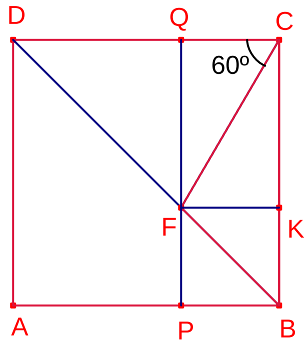
Determineu la proporció entre el volum del cub i el de la piràmide és:

$$\frac{V_{\text{cub}}}{V_{\text{piràmide}}}=\frac{\left(\frac{2}{3}a\right)^3}{\frac{2}{3}a^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

826.- Donat el quadrat ABCD de costat 2 i el punt F en la diagonal $\overline{BD}$ tal que $\angle DCF = 60^o$, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCF}$.
Concurso Primavera 2013. Nivell 4, p6



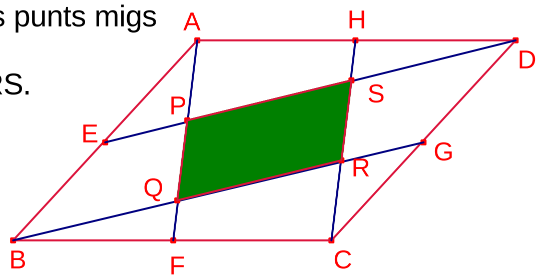
Solució:
Siguen P, Q les projeccions de F sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.
Siga K la projecció de F sobre el costat $\overline{CB}$.
$\angle DBC = 45^o$
Siga $x = \overline{FK}$.
$\overline{CQ} = \overline{PB} = x$.



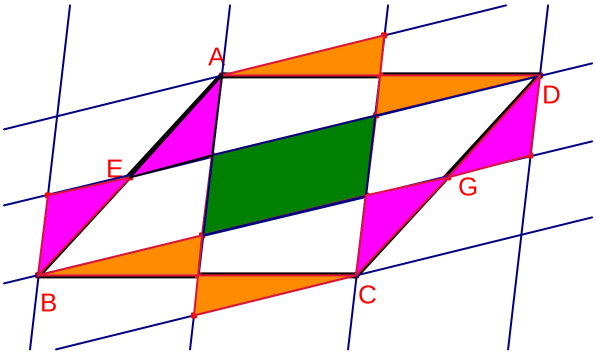
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQF}$:
$\overline{QF} = x\sqrt{3}$.
El triangle $\overset{\Delta}{BPF}$ és rectangle i isòsceles:
$\overline{PF} = \overline{PB} = x$.
$\overline{PF} + \overline{QF} = \overline{BC} = 2$.
$x + x\sqrt{3} = 2$. Resolent l'equació:
$x = \sqrt{3} - 1$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCF}$ és:

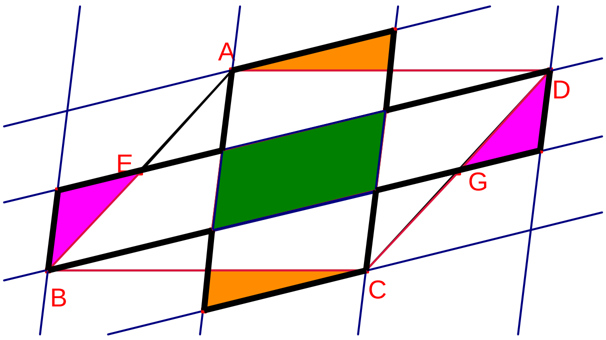
$$S_{BCF} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{FK}}{2} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} = \sqrt{3} - 1 \approx 0'732\text{cm}^2.$$

827.- Siga ABCD és un paral·lelogram i E, F, G, H els punts migs dels costats.
Calculeu la proporció entre les àrees de ABCD i PQRS.
Concurso Primavera 2013. Nivell 4, p8



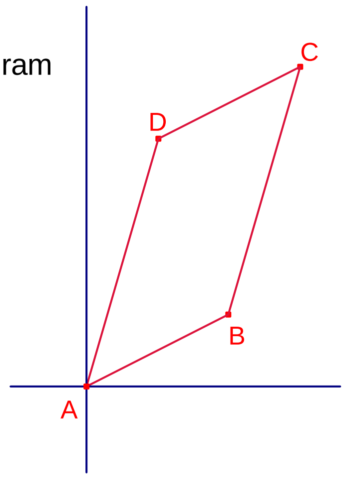
Solució:



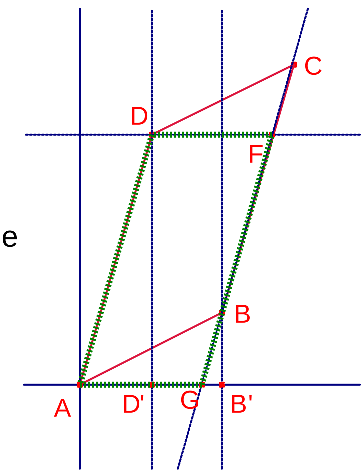


5:1

828.- Les coordenades del paral·lelogram ABCD són $A(0,0)$, $B(20,10)$, $D(10,y)$ determineu el valor y si l'àrea del paral·lelogram és 600.
Concurso Primavera 2013. Nivell 4, p18



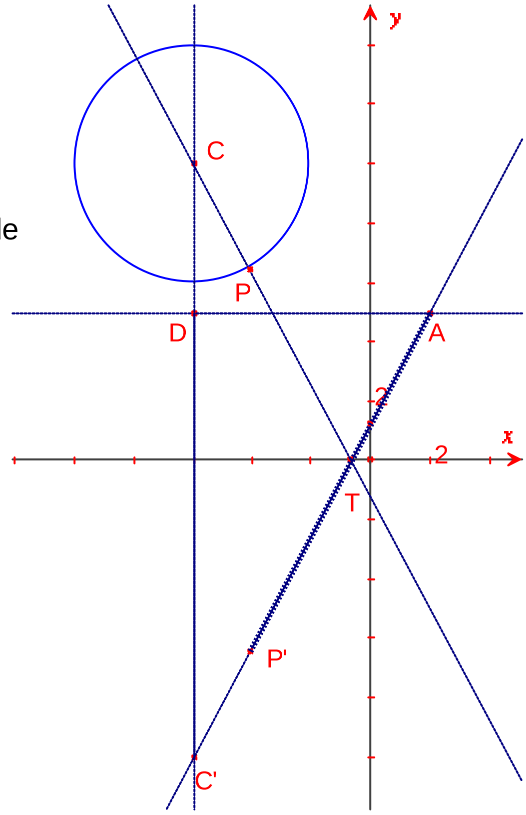
Solució:
Siga D' la projecció de D sobre l'eix d'abscisses.
Siga B' la projecció de B sobre l'eix d'abscisses.
La recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passa per D talla la recta BC en el punt F.
La recta BC talla l'eix d'abscisses en el punt G



Notem que els triangles $\overset{\Delta}{AFC}$, $\overset{\Delta}{AGB}$ són iguals.
Les àrees dels paral·lelograms ABCD i AGFD són iguals.
$\overline{AD'} = 10$, $\overline{DD'} = y$, $\overline{BB'} = 10$.
Siga $x = \overline{GB}$.
$\overline{AG} = \overline{AB'} - \overline{GB'} = 20 - x$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ADD'}$, $\overset{\Delta}{GBB'}$ són semblants aplicant el teorema de Tales:
$\frac{x}{10} = \frac{10}{y}$.
$x = \frac{100}{y}$.
L'àrea del paral·lelogram ABCD és 600, aleshores:
$S_{ABCD} = S_{AGFD} = \overline{AG} \cdot \overline{DD'} = 600$
$(20 - x)y = 600$.
$\left(20 - \frac{100}{y}\right)y = 600$. Resolent l'equació:
$y = 35$.

829.- Determineu la distància del camí més curt que partint del punt $A(2,5)$ passa per un punt de l'eix d'abscisses i acaba en un punt de la circumferència la circumferència d'equació $(x+6)^2+(y-10)^2=16$

Concurso Primavera 2013. Nivell 4, p24



Solució:

La circumferència $(x+6)^2+(y-10)^2=16$ té centre $C(-6,10)$ i radi 4.

Suposem resolt el problema:

Si T és el punt de l'eix d'abscisses que compleix la propietat.

La recta que passa pel punt P de la circumferència de mínima distància de T a la circumferència passa pel centre C.

La mínima distància és la distància del punt A al punt simètric P' de P respecte de l'eix d'abscisses.

El punt P' està en la recta AC'.

Les coordenades del punt C' són:

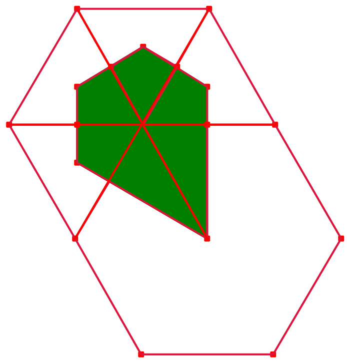
$C'(-6,-10)$.

$AC'=\sqrt{8^2+15^2}=17$.

$\overline{C'P'}=\overline{CP}=4$.

$\overline{AP'}=\overline{AC'}-\overline{C'P'}=17-4=13$.

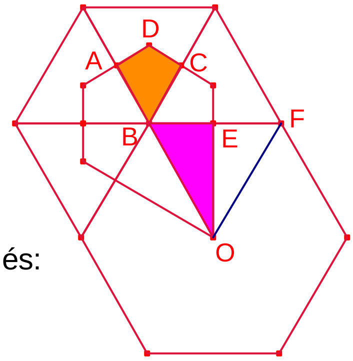
830.- Sobre un hexàgon regular s'han adossat 4 triangles equilàters.
Amb els centres dels 4 triangles i de l'hexàgon s'ha forma un pentàgon.
Determineu la proporció entre les àrees del pentàgon i de l'hexàgon regular.



Solució:

El cometa ABCD la seua àrea és la tercera part del triangle $\overset{\Delta}{OBF}$.

El triangle $\overset{\Delta}{OBE}$ la seua àrea és la meitat del triangle $\overset{\Delta}{OBF}$.



L'àrea de l'hexàgon regular és:
$S_6 = 6 \cdot S_{OBF}$
L'àrea del pentàgon és:

$$S_5 = 4 \cdot S_{OABCD} + 2S_{OBE} = 4\frac{1}{3}S_{OBF} + 2\frac{1}{2}S_{OBF} = \frac{7}{3}S_{OBF}.$$

La proporció entre les àrees del pentàgon i de l'hexàgon regular és:

$$\frac{S_5}{S_6} = \frac{\frac{7}{3}S_{OBF}}{6 \cdot S_{OBF}} = \frac{7}{18}.$$