Problemes d'aplicacions de derivades

Problema 1

Determineu l'equació de la recta tangent i normal a la paràbola $y = x^2 - 4x + 3$ en el punt $x = 4$.

Problema 2

Determineu el pendent de la recta tangent a la paràbola $y = x^2 - 7x + 12$ en el punt $x = 2$. En quins punts el pendent serà 3.

Problema 3

En quin punt de la corba $y = 3x^2 - 5x + 1$ té una recta tangent paral·lela a la recta d'equació $y = 7x - 3$.

Problema 4

Determineu el valor de a a fi que la corba $y = 2x^3 - 3x^2 + a$ i la recta $y = 12x - 1$ siguen tangents. Calculeu el punt de tangència.

Problema 5

Determineu un punt de la corba $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ en el qual la recta tangent siga paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

Problema 6

Determineu la recta normal a la hipèrbola $y = \dfrac{1}{x}$ en el punt $(1, 1)$.

Problema 7

Siga la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \le 1 \\ 5x^2 - 10x + 7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) Demostreu que la funció f(x) és derivable en $x = 1$ i calculeu $f'(1)$.

b) Calculeu $f'(x)$.

c) Determineu la recta tangent i normal a la corba en $x = 1$.

d) Proveu que la funció $f'(x)$ no és derivable en $x = 1$.

Problema 8

Determineu l'equació de la recta que passa pels punts $A(1, 2)$, $B(3, n)$ essent n el valor de la derivada de la funció $y = 3x^2 - 6x - 1$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

Problema 9

Determineu m a fi que el pendent de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{mx + 1}{2x + m}$ en $x = 1$ siga -1.

Problema 10

Determineu els punts de la corba $y = \frac{x}{1-x^2}$ en què la recta tangent té inclinació de 45º.

Problema 11

La recta d'equació $y = 6x + a$ és tangent a la corba $y = \frac{bx-1}{bx+1}$ en el punt $x = 0$.
Determineu a i b.

Problema 12

Donada la funció $y = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$, determineu els punts en què la recta tangent és paral·lela a la recta d'equació $2x + y + 2 = 0$.

Problema 13

En quins punts de la corba $y = x^3 - 2x^2 - 6x$ té pendent -2.

Problema 14

Determineu els valors a, b, c de la funció $f(x) = x(ax^2 + bx + c)$ a fi que tinga un punt d'inflexió en $(-2, 12)$ i en aquest punt la recta tangent a la corba tinga equació $10x + y + 8 = 0$.

Problema 15

Siga la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Determineu a, b sabent que f(x) és derivable en R.
b) Determineu la recta tangent i la recta normal a la gràfica de f(x) en el punt $x = 3$.
c) Determineu la recta tangent i la recta normal a la gràfica de f(x) en el punt $x = 2$.

Problema 16

Siga la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

a) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció f(x).
b) Determineu les asímptotes.
c) Dibuixeu la gràfica.

Problema 17

Siga $f: R \to R$ i $g: R \to R$ funcions definides per $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = c \cdot e^{-(x+1)}$
Les gràfiques f i g és tallen en el punt $(-1, 2)$ i tenen en aquest punt la mateixa recta tangents.

a) Calculeu els valors de a, b, c.
b) Determineu l'equació d'aquesta recta tangent.

Problema 18

Donada la funció $f: R \to R$ definida per $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica en el seu punt d'inflexió.

Problema 19

Siga $f: [0, 4] \to R$ definida per $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$,

a) Determineu a, b, c sabent que f(x) és contínua en l'interval $[0, 4]$, derivable en l'interval obert $]0, 4[$ i que $f(0) = f(4)$.
b) En quin punt de l'interval s'anul·la derivada de la funció.

Problema 20

Siga $f: R \to R$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{bx^2 + c}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Determineu les constants a, b i c sabent que f(x) és derivable i que la recta tangent a la gràfica f(x) en el punt d'abscissa $x = 1$ té pendent 3.

Problema 21

Siga $f: R \to R$ la funció definida per $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Determineu els intervals de creixement i decreixement i els extrems locals.
b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica f(x) en el punt d'inflexió d'abscissa negativa.

Problema 22

Siga $f: [0, 5] \to R$ definida per $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$, derivable en $[0, 5]$.

a) Determineu a i b.
b) Determineu la recta tangent a la corba f(x) en $x = 2$

Problema 23

Donada la funció $f:]0, +\infty[\to R$ definida per $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$, se sap que la recta tangent a la gràfica en el punt d'abscissa $x = 1$ ve donada per $y = -2$.

a) Calculeu a i b.
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció f(x).

Problema 24

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la paràbola $y = x^2$ que és paral·lela a la recta $-4x + y + 3 = 0$.
b) Determineu les equacions de les rectes tangents a la paràbola $y = x^2$ que passen pel punt $(2, 0)$.

Solucions:

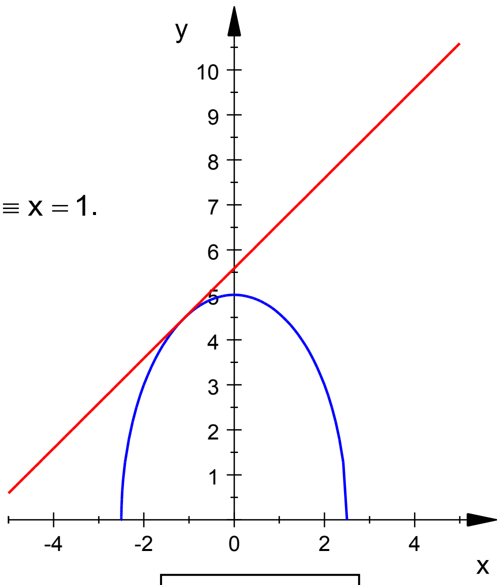
Problema 1: $r_T \equiv y = 4x - 13$, $r_N \equiv y = -\dfrac{1}{4}x + 4$.

Problema 2: El pendent en $x = 2$ és -3. El punt de la corba que té pendent 3 és $(5, 2)$.

Problema 3: El punt és $(2, 3)$.

Problema 4: Té dues solucions $a = -8$ i el punt $(-1, -13)$. $a = 19$ i el punt $(2\ 23)$.

Problema 5: El punt és $\left(\dfrac{-\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{5}\right)$.



Problema 5

Problema 6: $r_N \equiv y = x$.

Problema 7: $f'(1) = 0$. $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 10x - 10 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $r_T \equiv y = 2$, $r_N \equiv x = 1$.

Problema 8: $n = 0$, $r \equiv y = -x + 3$.

Problema 9: $m = -1$.

Problema 10: En els punts $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Problema 11: $a = -1, b = 3$.

Problema 12: El punt és $(-4, 1)$.

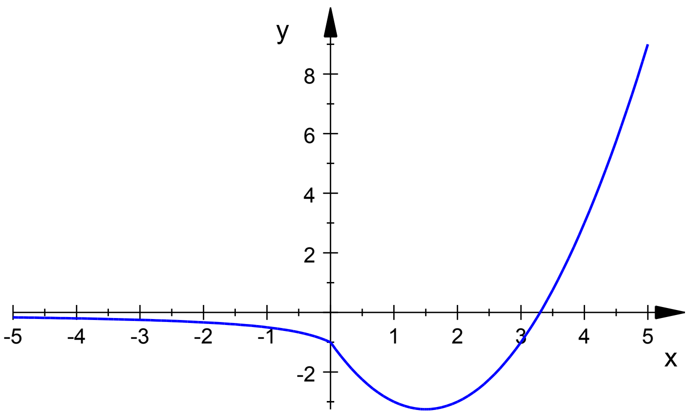
Problema 13: En els punts $(2. -12)$, $\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{76}{27}\right)$.

Problema 14: $a = 1, b = 6, c = 2$.

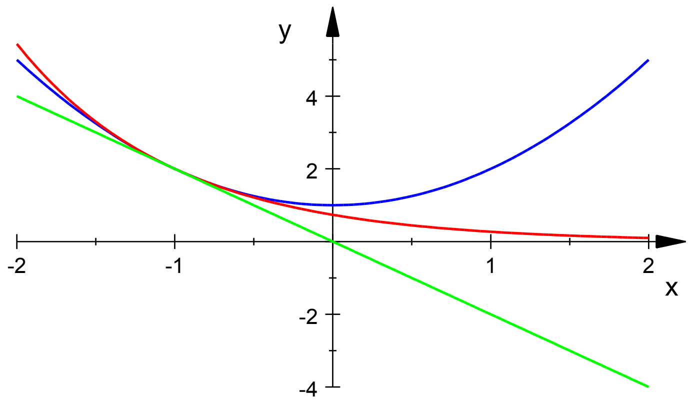
Problema 15: a) $a = 2, b = -7$. b) $r_T \equiv y = 13x - 13$, $r_N \equiv y = -\dfrac{1}{13}x + \dfrac{341}{13}$.

c) $r_T \equiv y = 11x - 8$, $r_N \equiv y = -\dfrac{1}{11}x + \dfrac{156}{11}$.

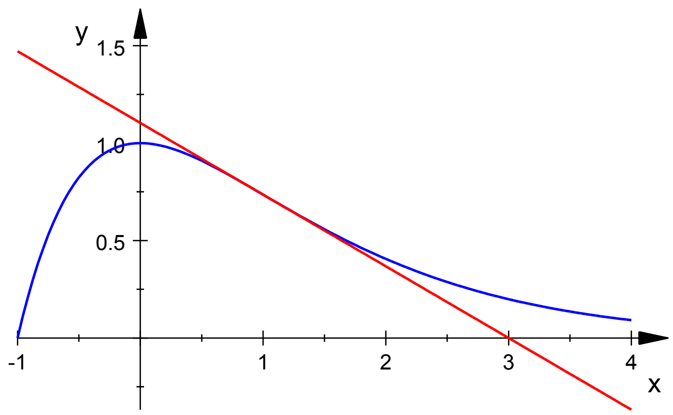
Problema 16: La funció f(x) és contínua en R i derivable en $R \sim \{0\}$. $y = 0$ és asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.



Problema 17: a) $a=0, b=1, c=2$. b) La recta tangent és $r_T \equiv y=-2x$.



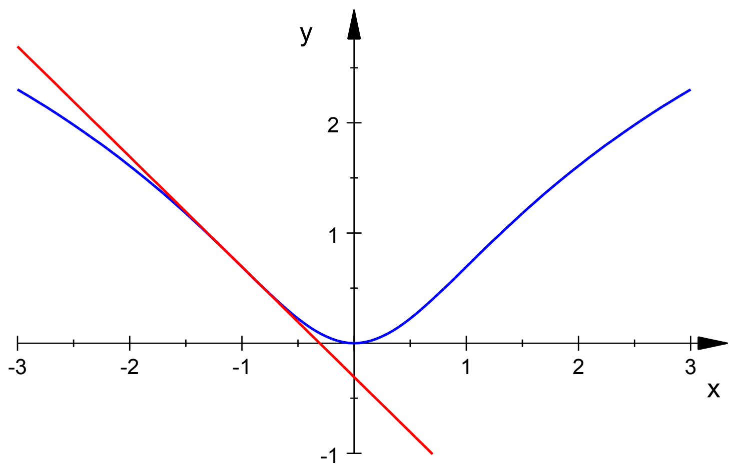
Problema 18:El punt d'inflexió és $\left(1,\dfrac{2}{e}\right)$, la recta tangent és $r_T \equiv y=\dfrac{-1}{e}x+\dfrac{3}{e}$.



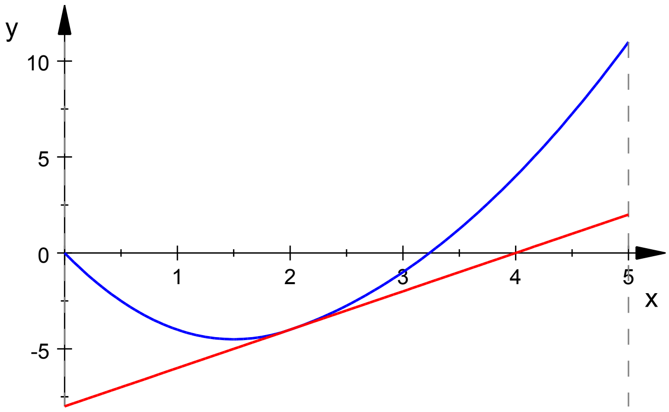
Problema 19:a) $a=-3, b=5, c=1$. b) La derivada s'anul·la en $x=\dfrac{3}{2}$

Problema 20 : $a=0, b=4, c=0$.

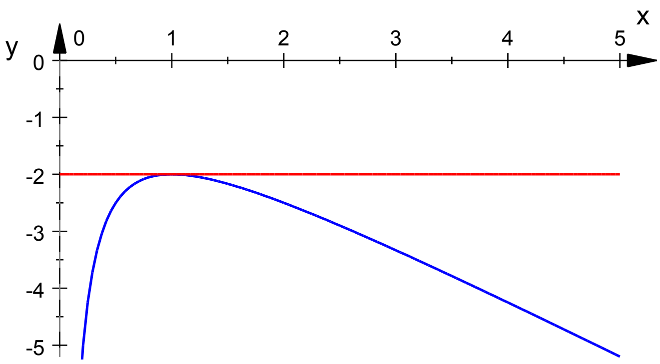
Problema 21:a) En $]0,+\infty[$ és estrictament creixent. En $]-\infty,0[$ és estrictament decreixent. b) $r_T \equiv y-\ln 2=-1(x+1)$.



Problema 22:a) $a = -6, b = 2$. b) $r_T \equiv y + 4 = 2(x - 2)$.



Problema 23:a) $a = -1, b = -1$. b) . En $]0, 1[$ és estrictament creixent. En $]1, +\infty[$ és estrictament decreixent, $(1, -2)$.



Problema 24:a) $y = 4x - 4$. b) $y = 0$, $y = 8x - 16$.