

La circumferència

Ricard Peiró i Estruch

L'estudi de la circumferència en secundària, es basa en l'estudi algebraic de les equacions, interseccions, tangències, etc.

El treball algebraic resulta molt pesat ja que en qualsevol problema s'ha d'utilitzar sistemes d'equacions de segon grau.

Amb aquest estudi es deixa de costat la geometria. Pràcticament, no s'utilitzen construccions geomètriques.

La calculadora Casio CP400 té la possibilitat de fer qualsevol construcció: tangències, punts de tall, mediatris, així com poder calcular les equacions de rectes i circumferències, calcular radis, distàncies,... tot amb una gran facilitat i rapidesa.

He plantejat 23 problemes habituals en els cursos de primer de batxillerat i en escasses ocasions m'he recolzat en l'àlgebra per resoldre els problemes (la calculadora també té la possibilitat de resoldre'ls algebraicament).

Crec que motes vegades l'alumnat necessita d'aquesta visió gràfica, per completar les resolucions dels problemes.

Problemes

- 1.- Determineu l'equació de la circumferència de centre l'origen de coordenades i radi $R = 3$.
- 2.- Determineu l'equació de la circumferència de centre $C(2, -3)$ i radi $R = 7$.
- 3.- Determineu l'equació de la circumferència que passa per l'origen de coordenades i té centre $B(6, -8)$.
- 4.- Determineu l'equació de la circumferència que passa pel punt $A(2, 6)$ i de centre $B(-1, 2)$.
- 5.- Determineu l'equació de la circumferència de diàmetre els punts $A(3, 2)$ i $B(-1, 6)$.
- 6.- Determineu l'equació de la circumferència de centre l'origen de coordenades y la recta $3x - 4y + 20 = 0$ és tangent a la circumferència.
- 7.- Determineu l'equació de la circumferència de centre $C(1, -1)$ i la recta $5x - 12y + 90 = 0$, és tangent a la circumferència.
- 8.- Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A(3, 1)$ y $B(-1, 3)$ y el centre pertany a la recta $3x - y - 2 = 0$.
- 9.- Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 0)$.
- 10.- Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A(-1, 5)$, $B(-2, -2)$, $C(5, 5)$.
- 11.- Estudia si les equacions següents són circumferències. En cas afirmatiu determineu el centre i el radi.
 - a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.
 - b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$.
 - c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$.
 - d) $x^2 + y^2 + x = 0$.
 - e) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$.
 - f) $x^2 + y^2 + y = 0$.
- 12.- Determineu la posició relativa del punt $A(1, -2)$ i les següents circumferències:
 - a) $x^2 + y^2 = 1$.
 - b) $x^2 + y^2 = 5$.
 - c) $x^2 + y^2 = 9$.
 - d) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.
 - e) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.

13.- Determineu la posició relativa de la recta i la circumferència en els següents casos:

a) $y = 2x - 3$ y $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$.

b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ y $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.

c) $y = x + 10$ y $x^2 + y^2 = 1$.

14.- Determineu l'equació de la circumferència que passa pel punt $A(1, 0)$ i és tangent a les rectes paral·leles $2x + y + 2 = 0$, $2x + y - 18 = 0$.

15.- Determineu les coordenades de los extrems del diàmetre de la circumferència $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ que és perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.

16.- Determineu la distància mínima del punt $A(3, 9)$ a la circumferència $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$.

17.- Determineu l'equació de la recta tangent a la circumferència $x^2 + y^2 = 5$ que passa pel punt $A(-1, 2)$.

18.- Determineu l'equació de la recta tangent a la circumferència $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ que passa pel punt $A(-5, 7)$.

19.- Determineu l'equació de la circumferència de centre $C(-4, 3)$ i radi 5.
Determineu la intersecció de la recta $x - y = 0$ i la circumferència.
Determineu les equacions de les rectes tangents paral·leles a aquesta recta.

20.- Determineu les rectes tangents a la circumferència $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ en els punts de la circumferència tal que $x = 2$.

21.- Donades les circumferències $x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$,
determineu:

- a) La posició relativa de les circumferències.
- b) La línia dels centres.
- c) L'eix radical.

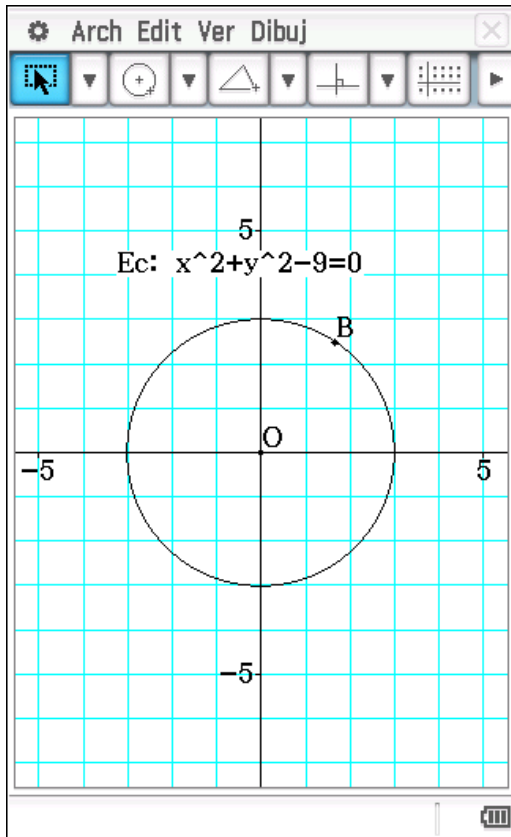
22.- Donades les circumferències $x^2 + y^2 = 9$, $225x^2 + 225y^2 - 300x + 90y - 116 = 0$,
determineu:

- a) La posició relativa de les circumferències.
- b) La línia dels centres.
- c) L'eix radical.

23.- Determineu la potència del punt $P(13, 11)$ respecte de la circumferència $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

Problema 1

Determineu l'equació de la circumferència de centre l'origen de coordenades i radi $R = 3$.



Dibuixeu el centre $O(0, 0)$.

Dibuixeu una circumferència de centre O .

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu que el radi siga 5.

En el quadre de mesures, determineu l'equació de la circumferència.

La solució és:

$$x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

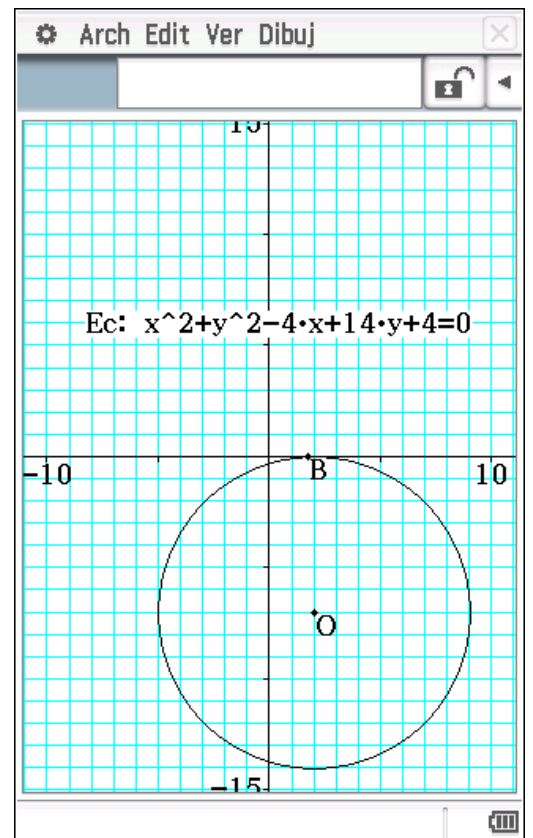
Seleccionant el punt O , en el quadre de mesures es pot canviar el centre.

Problema 2

Determineu l'equació de la circumferència de centre $C(2, -3)$ i radi $R = 7$.

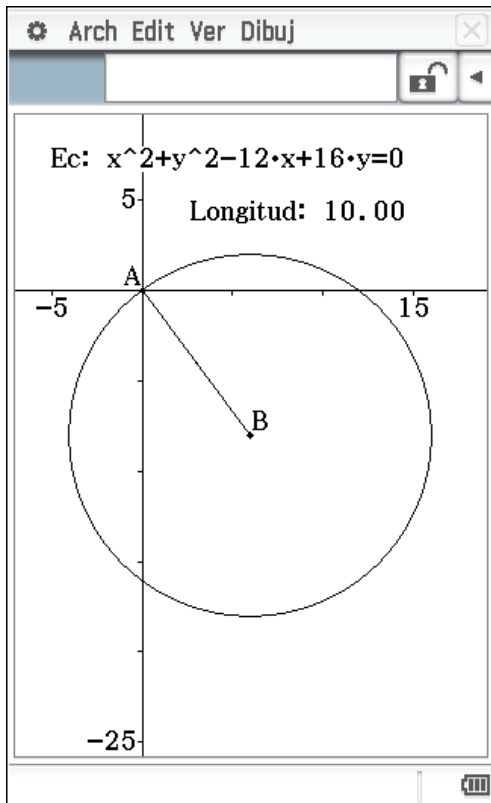
L'equació és:

$$x^2 + y^2 - 4x + 14y + 4 = 0.$$



Problema 3

Determineu l'equació de la circumferència que passa per l'origen de coordenades i té centre B(6, -8).



Dibuixeu el punt A(0, 0).

Dibuixeu el punt B(6, -8)

Dibuixeu una circumferència de centre B que passe pel punt A.

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu la seua equació i el seu radi.

L'equació és:

$$x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0.$$

El radi és:

$$r = 10.$$

Es pot seleccionar el punt A o el punt B i en el quadre de mesures canvieu els valors.

Problema 4

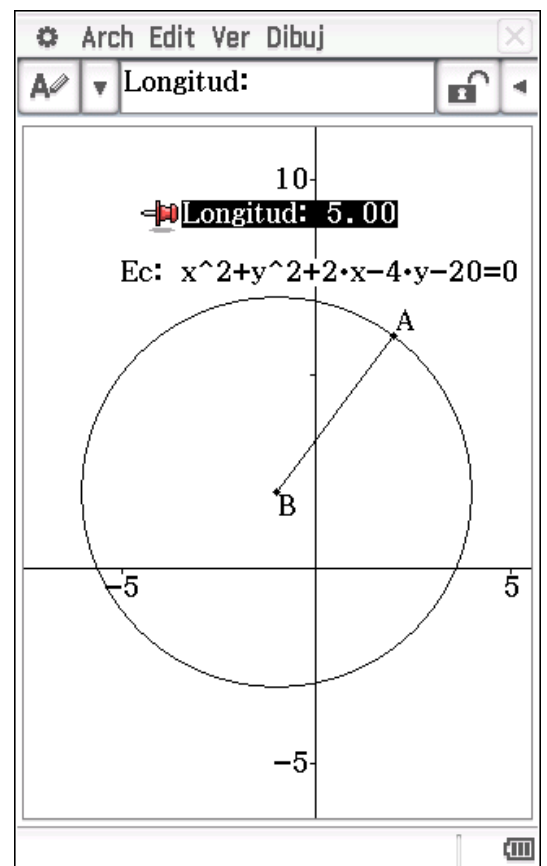
Determineu l'equació de la circumferència que passa pel punt A(2, 6) i de centre B(-1, 2).

L'equació és:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0.$$

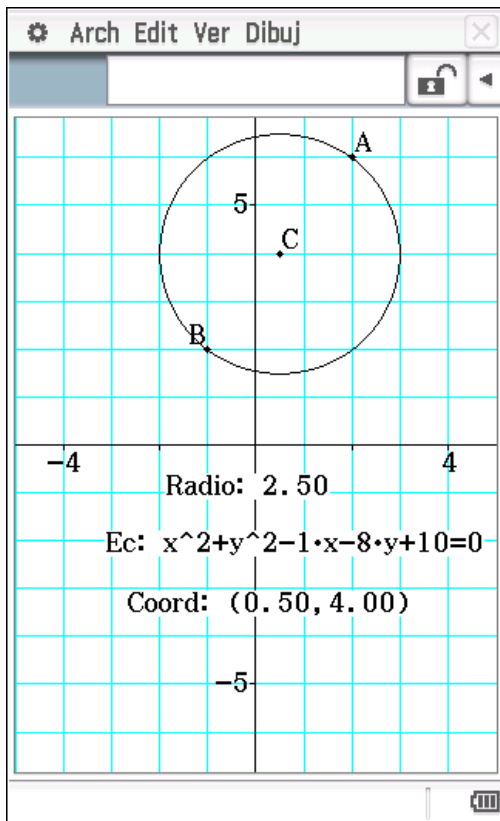
El radi és:

$$r = 5.$$



Problema 5

Determineu l'equació de la circumferència de diàmetre els punts A(3, 2) i B(-1, 6) .



Dibuixeu els punts A y B.

Seleccioneu los punts A i B dibuixeu el punt mig C.

Dibuixeu la circumferència de centre C que passa per A.

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu la seua equació i el seu radi.

L'equació és:

$$x^2 + y^2 - x - 8y + 10 = 0.$$

El radi és:

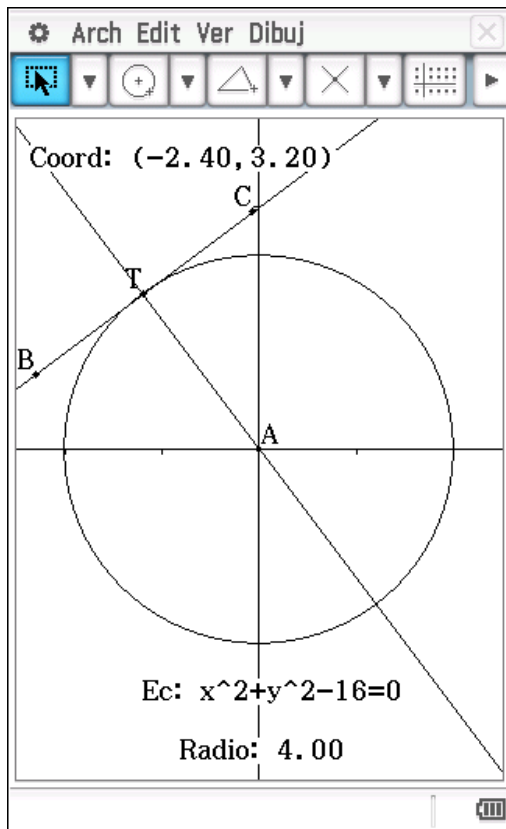
$$r = 2.5.$$

Les coordenades del centre són:

$$C(0.5, 4).$$

Problema 6

Determineu l'equació de la circumferència de centre l'origen de coordenades i la recta $3x - 4y + 20 = 0$ és tangent a la circumferència.



Dibuixeu el punt A.

Dibuixeu una recta qualsevol i en el quadre de mesures canvieu l'equació per $3x - 4y + 20 = 0$.

Dibuixeu la recta perpendicular a la recta BC que passa per A.

Dibuixeu el punt T de tangència, intersecció de les dues rectes.

Dibuixeu la circumferència de centre A que passa per T.

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu la seua equació i el seu radi.

L'equació és:

$$x^2 + y^2 - 16 = 0.$$

El radi és:

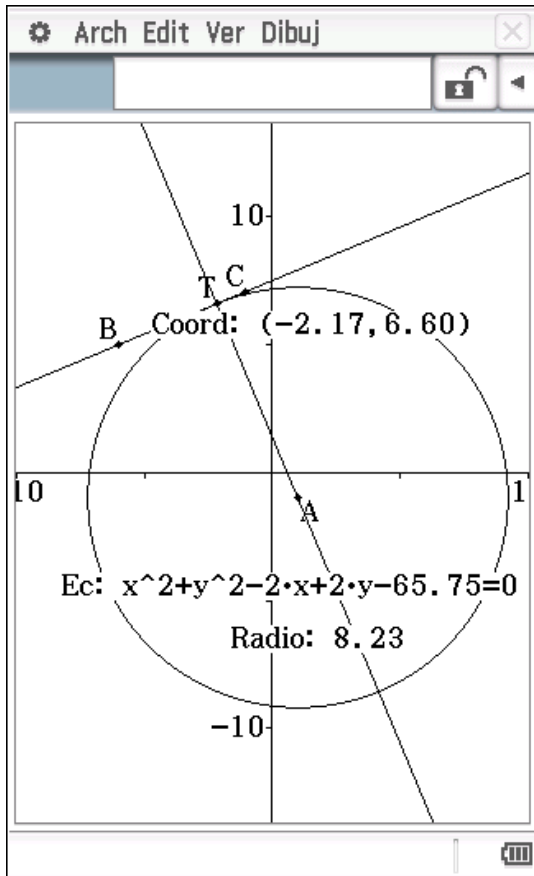
$$r = 4.$$

Les coordenades del punt T de tangència són:

$$T(-2.4, 3.2).$$

Problema 7

Determineu l'equació de la circumferència de centre $C(1, -1)$ i la recta $5x - 12y + 90 = 0$, és tangent a la circumferència.



Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu la seua equació i el seu radi.

L'equació és:

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 65.75 = 0.$$

El radi és:

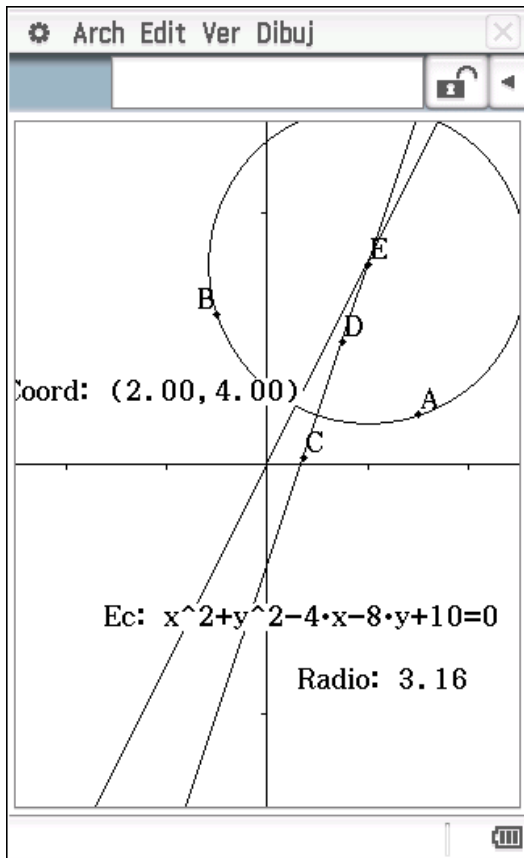
$$r \approx 8.23.$$

Les coordenades del punt T de tangència són aproximadament:

$$T(-2.17, 6.60).$$

Problema 8

Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A(3, 1)$ i $B(-1, 3)$ i el centre pertany a la recta $3x - y - 2 = 0$.



Dibuixeu los punts A y B.

Dibuixeu una recta qualsevol i en el quadre de mesures canvieu l'equació per $3x - 4y - 2 = 0$.

Seleccioneu els punts A i B i dibuixeu la recta mediatriu.

Determineu el punt intersecció E de les dues rectes (centre de la circumferència).

Dibuixeu la circumferència de centre E que passa per A.

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu la seua equació i el seu radi.

L'equació és:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0.$$

El radi és:

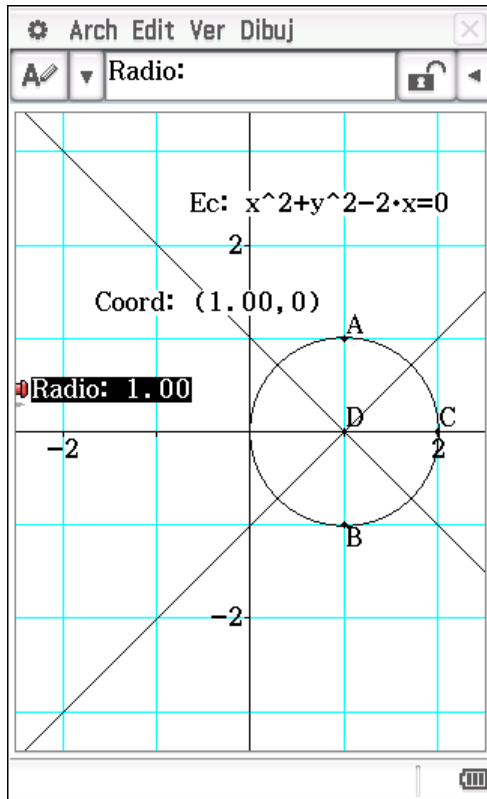
$$r \approx 3.16.$$

Les coordenades del centre E són:

$$E(2, 4).$$

Problema 9

Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 0)$.



Dibuixeu els tres punts A, B, C.
Seleccioneu els punts A, C i dibuixeu la recta mediatriu.
Seleccioneu els punts B, C i dibuixeu la recta mediatriu.
Determineu la intersecció D de les dues rectes (centre de la circumferència).
Dibuixeu la circumferència de centre D que passa per A.

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu la seua equació i el seu radi.

L'equació és: $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

El radi és: $r = 1$.

Les coordenades del centre D són: $D(1, 0)$.

Problema 10

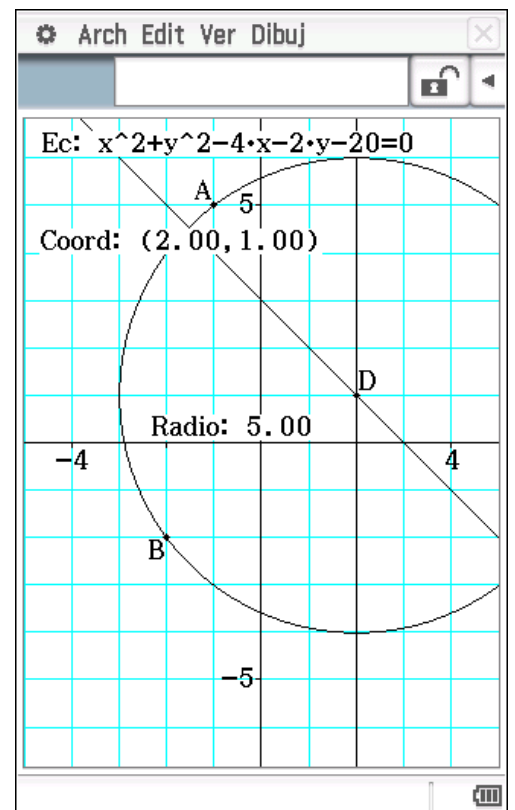
Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A(-1, 5)$, $B(-2, -2)$, $C(5, 5)$.

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu la seua equació i el seu radi.

L'equació és: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

El radi és: $r = 5$.

Les coordenades del centre D són: $D(2, 1)$.



Problema 11

Estudia si les equacions següents són circumferències. En cas afirmatiu determineu el centre i el radi.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$.

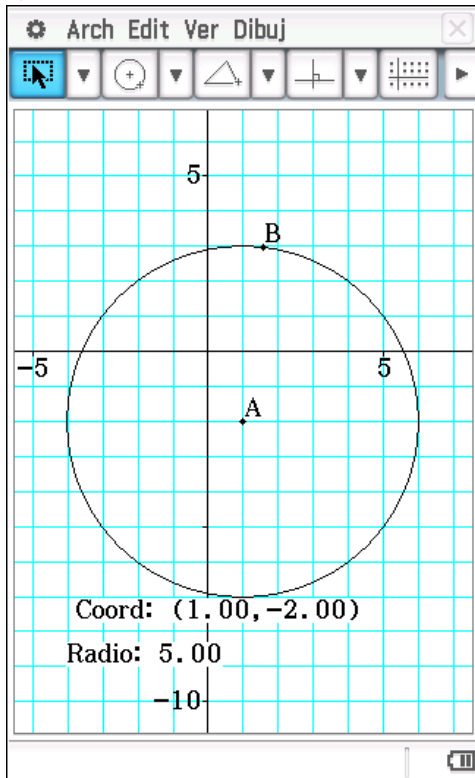
c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$.

d) $x^2 + y^2 + x = 0$.

e) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$.

f) $x^2 + y^2 + y = 0$.

a)



Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre A.

Seleccioneu la circumferència.

En el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

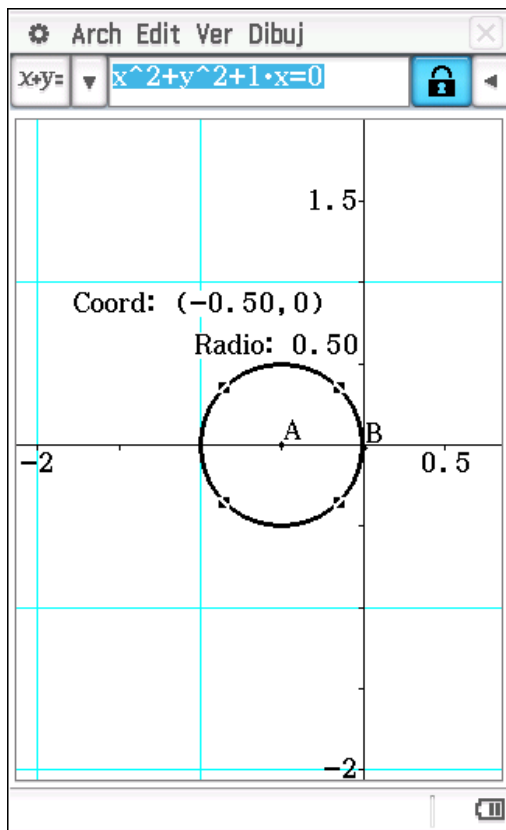
Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu el seu radi.

El radi és: $r = 5$.

Seleccioneu el punt A i en el quadre de mesures determineu les coordenades del centre:

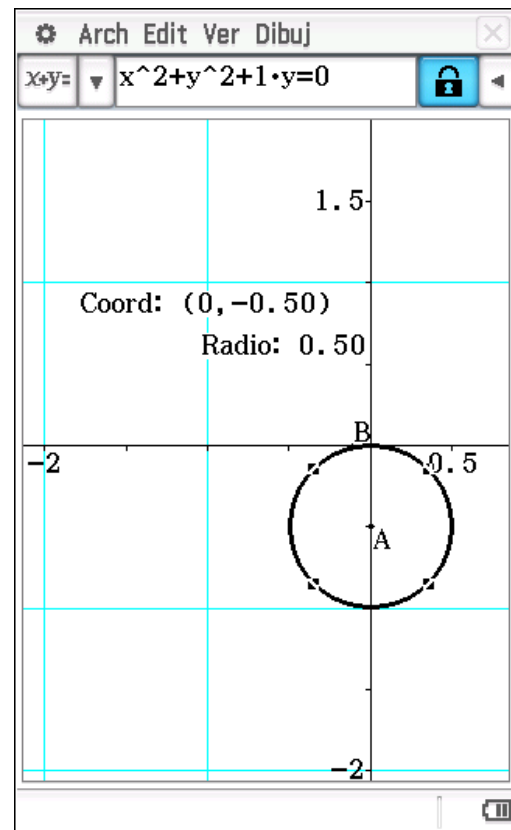
$A(1, -2)$.

Si repetim el procés en els apartats b) c) i e) la calculadora no pot dibuixar la circumferència amb la qual cosa deduïm que en aquests apartats no són circumferències.



d)

El radi és: $r = 0.5$.
Les coordenades del centre són:
 $A(-0.5, 0.2)$.



f)

El radi és: $r = 0.5$.
Les coordenades del centre són:
 $A(0, -0.5)$.

Problema 12

Determineu la posició relativa del punt $A(1, -2)$ i les següents circumferències:

a) $x^2 + y^2 = 1$.

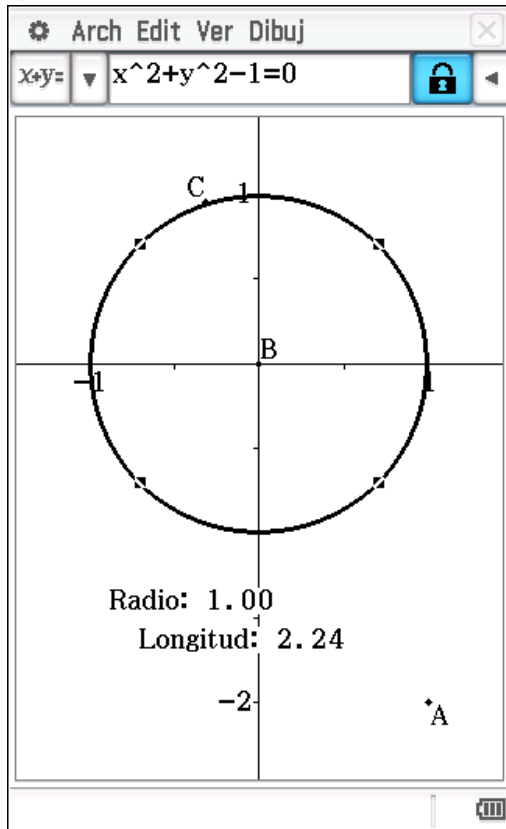
b) $x^2 + y^2 = 5$.

c) $x^2 + y^2 = 9$.

d) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.

e) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.

a)



Dibuixeu el punt A

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre B.

En el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 = 1$.

Seleccioneu la circumferència i en el quadre de mesures determineu el seu radi.

El radi és: $r = 1$.

Seleccioneu el punt B i en el quadre de mesures determineu les coordenades del centre:

$B(0, 0)$.

Seleccioneu els punts A, B. En el quadre de mesures determineu la distància de A a B:

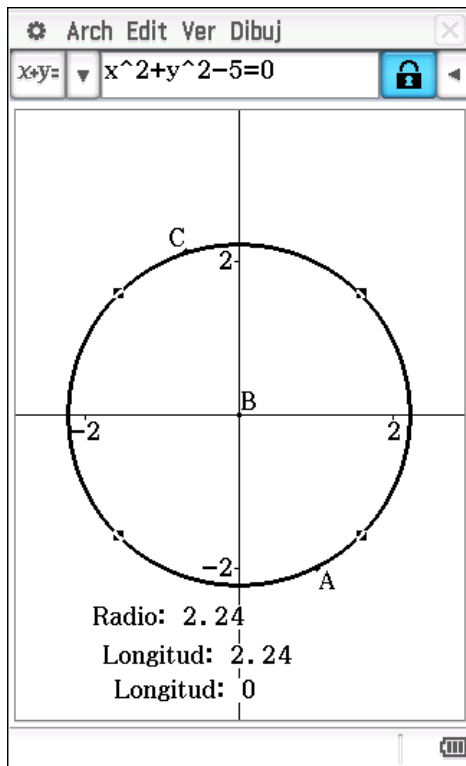
$\overline{AB} = 2.24$

Aleshores A és exterior a la circumferència, el que ja observem visualment.

Si seleccionem la circumferència i el punt A, en el quadre de mesures podem consultar si A pertany a la circumferència o també la distància entre el punt A i la circumferència.

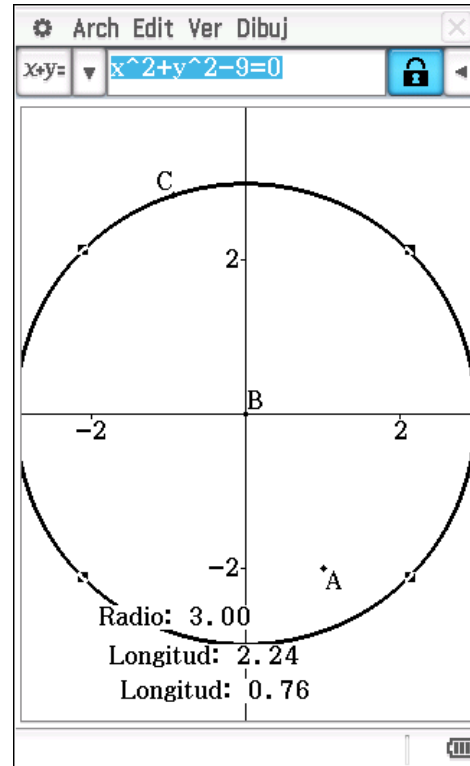
Repetim el procés amb els altres apartats:

b)



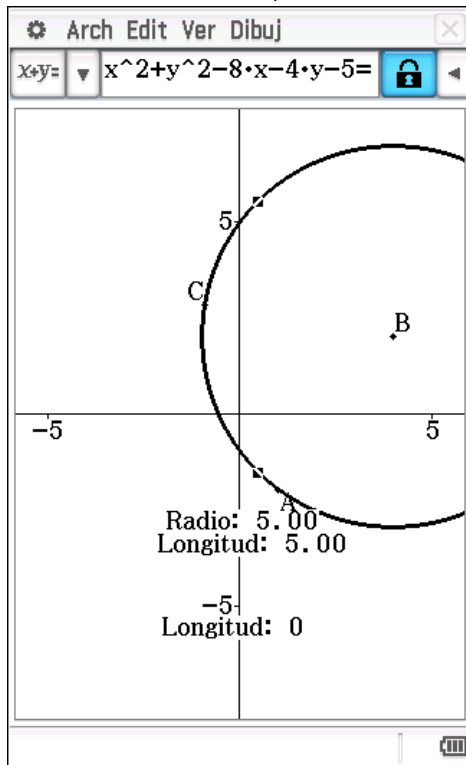
El radi és: $r = 2.24$. $AB = 2.24$
 El punt A és de la circumferència

c)



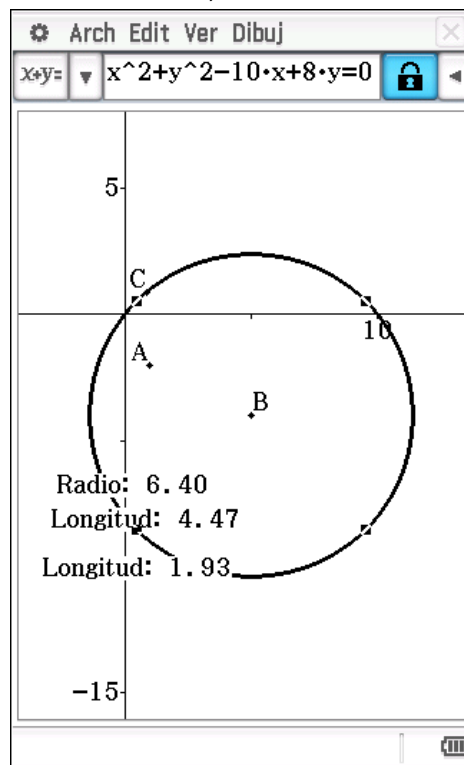
El radi és: $r = 3$. $AB = 2.24$
 El punt A és interior a la circumferència

d)



El radi és: $r = 5$. $AB = 5$
 El punt A és de la circumferència

e)



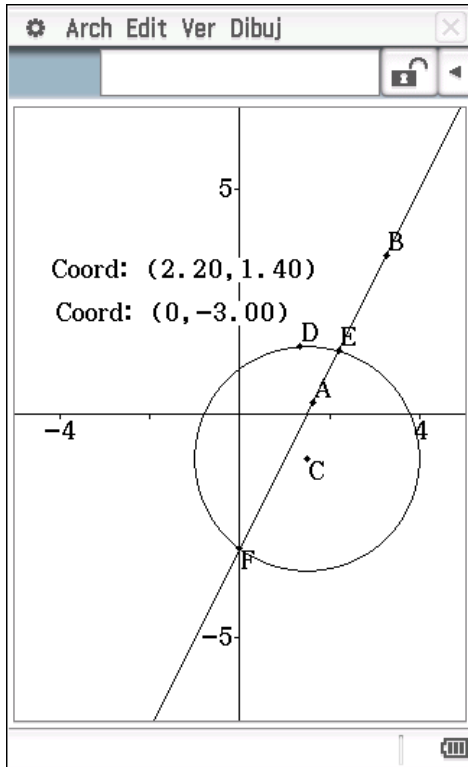
El radi és: $r = 6.4$. $AB = 4.47$
 El punt A és interior a la circumferència

Problema 13

Determineu la posició relativa de la recta i la circumferència en els següents casos:

- a) $y = 2x - 3$ y $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$.
b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ y $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.
c) $y = x + 10$ y $x^2 + y^2 = 1$.

a)



Dibuixeu una recta qualsevol i en el quadre de mesures canvieu l'equació per $y = 2x - 3$.

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre B. En el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$.

Seleccioneu la recta i la circumferència i calculeu els punts d'intersecció.

Si seleccionem els punts E i F. En el quadre de mesures podem calcular les seues coordenades.

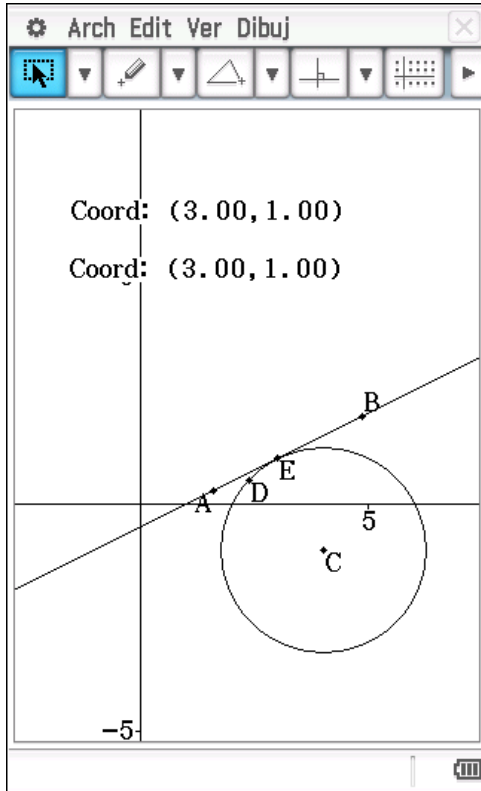
La recta és secant a la circumferència i els punts d'intersecció són:

$E(2.20, 1.40)$, $F(0, -3)$.

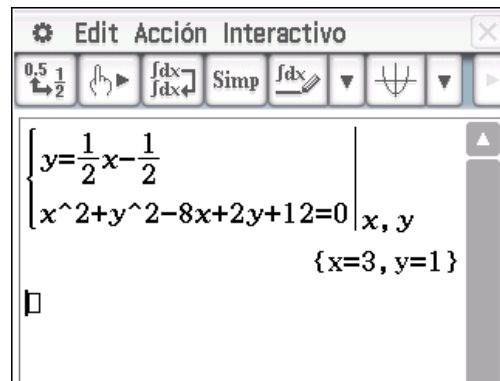
Si obrim el menú principal podem resoldre el sistema format per la recta i la circumferència i veure que el sistema té dues solucions:

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ x^2+y^2-3x+2y-3=0 \end{cases} \Big|_{x, y}$$
$$\left\{ \left\{ x=0, y=-3 \right\}, \left\{ x=\frac{11}{5}, y=\frac{7}{5} \right\} \right\}$$

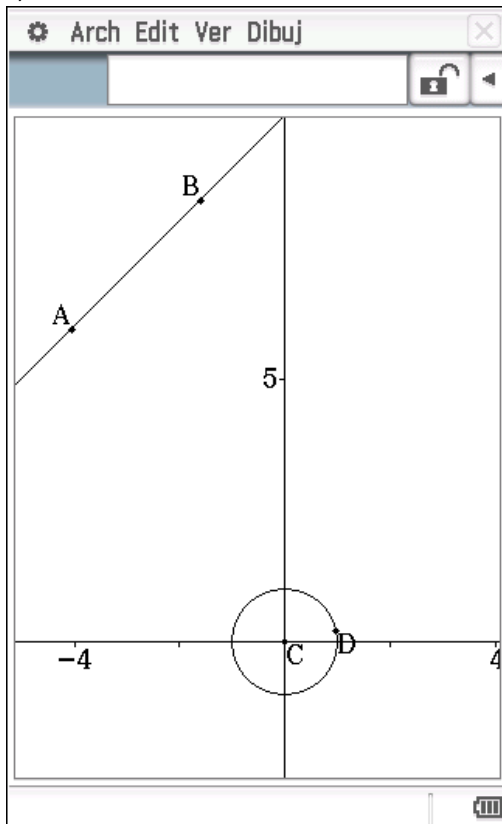
b)



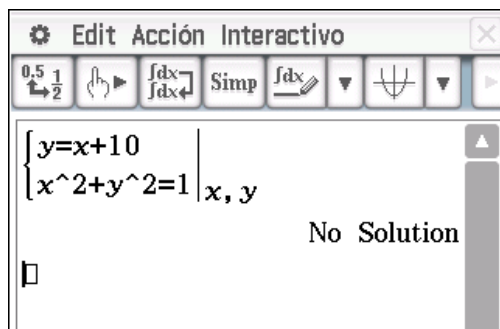
Recta tangente a la circumferència.



c)

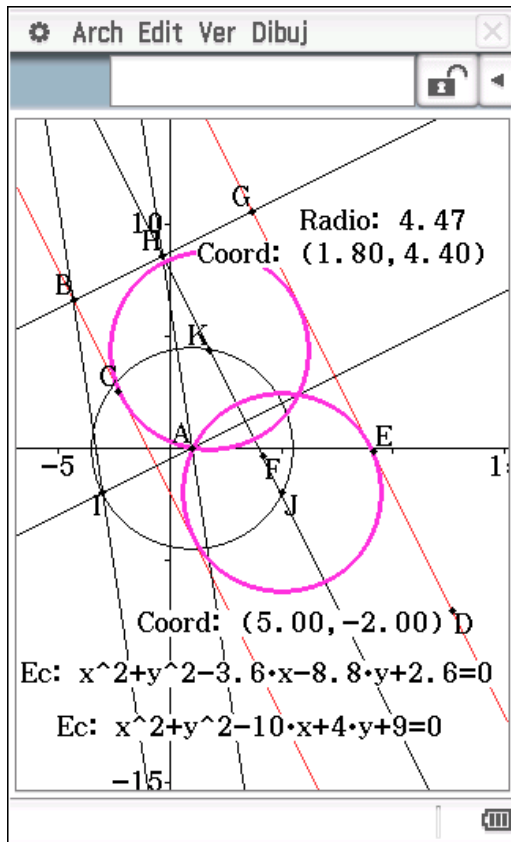


Recta exterior a la circumferència.



Problema 14

Determineu l'equació de la circumferència que passa pel punt $A(1,0)$ i és tangent a les rectes paral·leles $2x + y + 2 = 0$, $2x + y - 18 = 0$.



Dibuixeu el punt A.

Dibuixeu una recta qualsevol BC i en el quadre de mesures canvieu l'equació per $2x + y + 2 = 0$.

Dibuixeu una recta qualsevol DE i en el quadre de mesures canvieu l'equació per $2x + y - 18 = 0$.

Seleccioneu els punts B, E i dibuixeu el punt mig F del segment \overline{BE} .

Dibuixeu la recta que passa per F i és paral·lela a BC (paral·lela mitjana de les rectes BC i DE). En aquesta recta es troba el centre de les circumferències que cerquem.

Dibuixeu la recta perpendicular a BC que passa per B que talla la paral·lela mitjana en el punt H. Notem que \overline{BH} és la mesura del radi de les circumferències que cerquem.

Dibuixeu el paral·lelogram BHAI.

Dibuixeu la circumferència de centre A que passa per I.

Aquesta circumferència talla la paral·lela mitjana en els punts K, J, centres de les circumferències que cerquem.

Dibuixeu la circumferència de centre K que passa per A.

Dibuixeu la circumferència de centre J que passa per A.

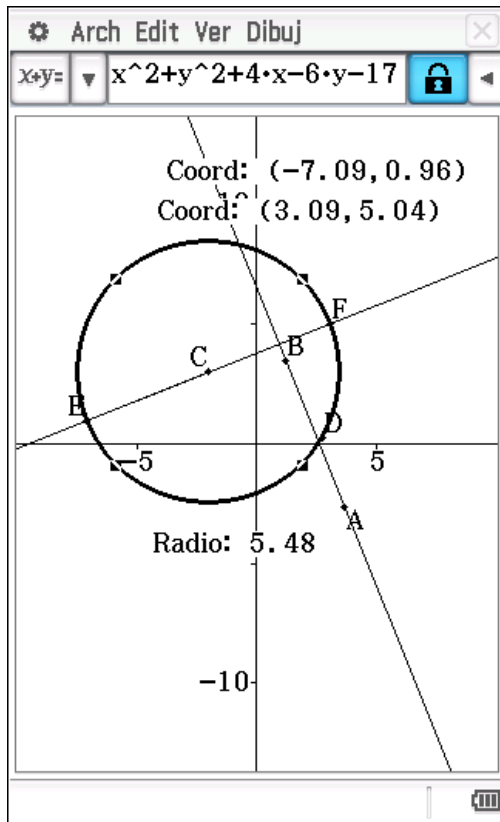
Les equacions de les circumferències que cerquem són:

$$x^2 + y^2 - 3.6x - 8.8y + 2.6 = 0. \text{ (la de centre K)}$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0. \text{ (la de centre J)}$$

Problema 15

Determineu les coordenades dels extrems del diàmetre de la circumferència $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ que és perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.



Dibuixeu una recta qualsevol AB i en el quadre de mesures canvieu l'equació per $5x + 2y - 13 = 0$.

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre C, en el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$.

Seleccioneu el punt C i la recta AB i dibuixeu la recta perpendicular a AB que passa per C.

Seleccioneu la recta anterior i la circumferència i determineu les interseccions E i F que formen el diàmetre \overline{EF} .

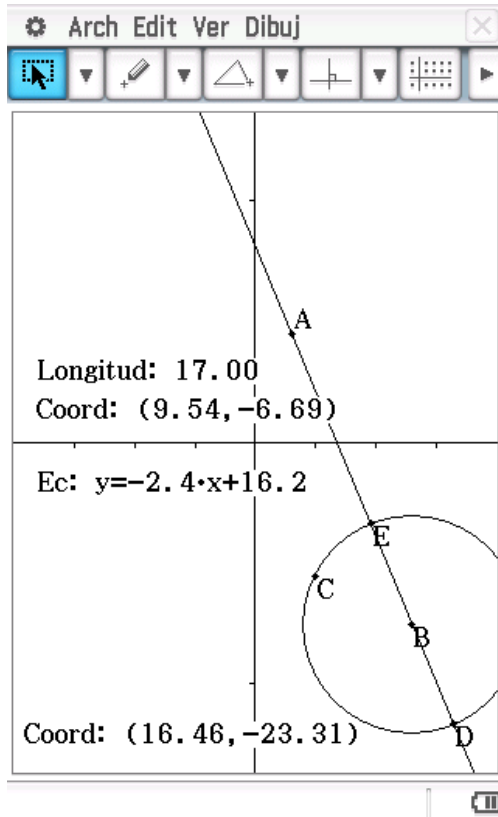
Seleccioneu el punt E. En el quadre de mesures determineu les coordenades: E(-7.09, 0.96).

Seleccioneu el punt F. En el quadre de mesures determineu les coordenades: F(3.09, 5.04).

Problema 16

Determineu la distància mínima del punt $A(3, 9)$ a la circumferència

$$x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0.$$



Dibuixeu el punt A.

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre B. En el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$.

Dibuixeu la recta AB.

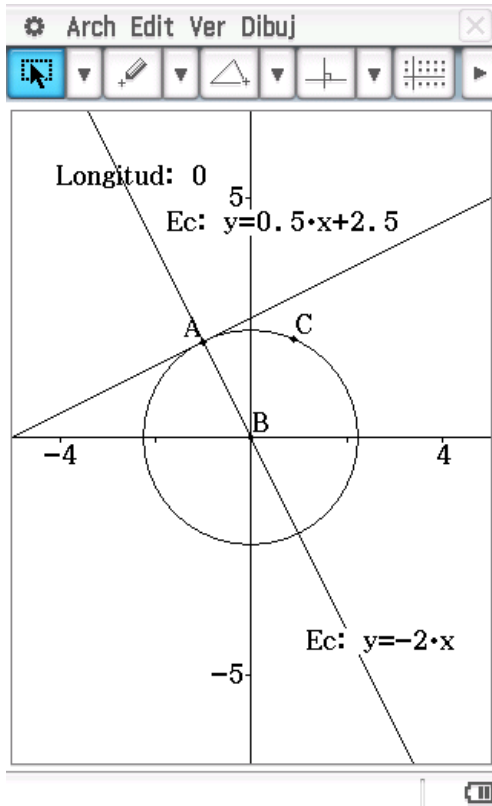
Seleccioneu la recta i la circumferència i calculeu els punts d'intersecció.

Seleccioneu els punts A, E i en el quadre de mesures calculeu la seua distància.

$$\overline{AE} = 17.$$

Problema 17

Determineu l'equació de la recta tangent a la circumferència $x^2 + y^2 = 5$ que passa pel punt $A(-1, 2)$.



Dibuixeu el punt A.

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre B. En el quadre de mesures canviu l'equació per $x^2 + y^2 = 5$.

Dibuixeu la recta AB.

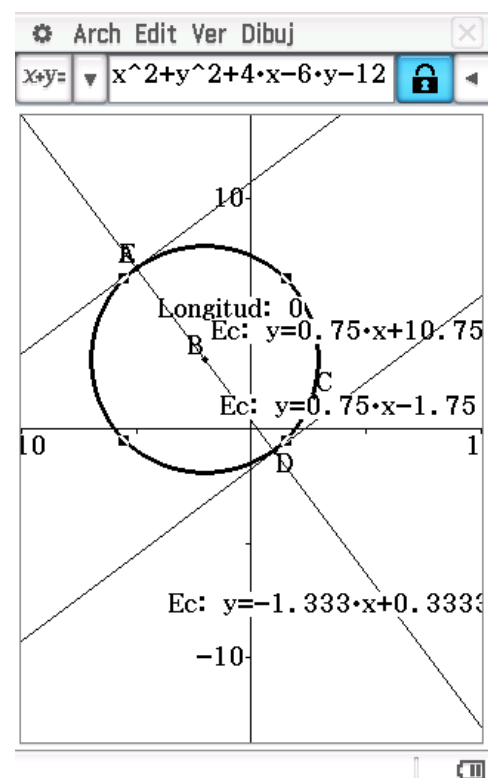
Seleccioneu el punt A i la circumferència. En el quadre de mesures comproveu que la distància de A a la circumferència és zero.

Seleccioneu la recta i el punt A i dibuixeu la recta tangent.

En el quadre de mesures determineu l'equació de la recta tangent.

Problema 18

Determineu l'equació de la recta tangent a la circumferència $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ que passa pel punt $A(-5, 7)$.

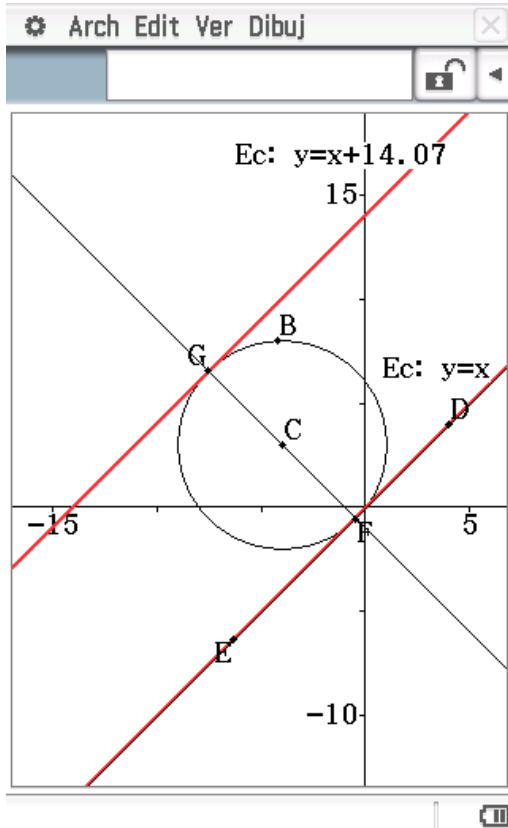


Problema 19

Determineu l'equació de la circumferència de centre $C(-4, 3)$ i radi 5.

Determineu la intersecció de la recta $x - y = 0$ i la circumferència.

Determineu les equacions de les rectes tangents paral·leles a aquesta recta.



Dibuixeu el centre C .

Dibuixeu una circumferència de centre C , seleccioneu-la i en el quadre de mesures canvieu el radi per 5.

Dibuixeu una recta qualsevol DE . En el quadre de mesures canvieu l'equació per $x - y = 0$.

Seleccioneu la recta DE i el punt C . Dibuixeu la recta perpendicular.

Seleccioneu la circumferència i la recta perpendicular. Dibuixeu els punts d'intersecció F i G .

Dibuixeu la recta paral·lela a DE que passa per F .

En el quadre de mesures determineu la seua equació:

$$y = x.$$

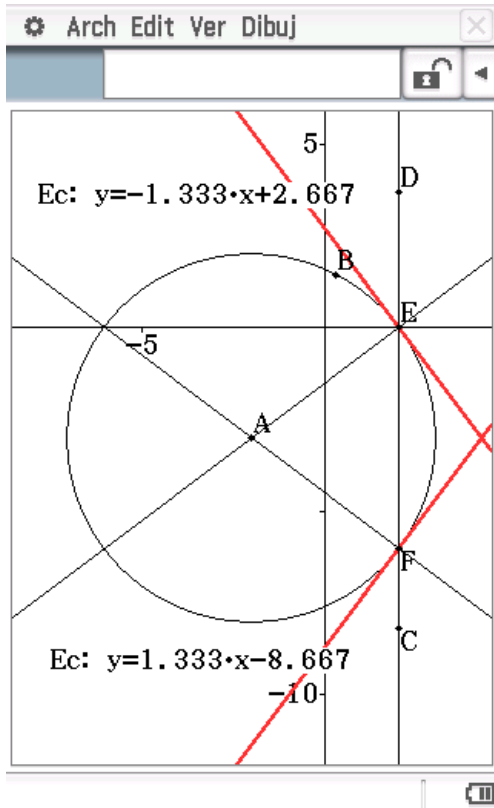
Dibuixeu la recta paral·lela a DE que passa per G .

En el quadre de mesures determineu la seua equació:

$$y = x + 14.07.$$

Problema 20

Determineu les rectes tangents a la circumferència $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ en els punts de la circumferència tal que $x = 2$.



Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre A, en el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$.

Dibuixeu una recta CD. En el quadre de mesures canvieu l'equació per $x = 2$.

Seleccioneu la circumferència i la recta CD. Determineu E, F, els punts d'intersecció.

Dibuixeu la recta AE.

Dibuixeu la recta perpendicular a AE que passa per E. En el quadre de mesures, determineu la seua equació:

$$y = 1.333x + 2.667 .$$

Dibuixeu la recta perpendicular a AE que passa per F. En el quadre de mesures, determineu la seua equació:

$$y = 1.333x - 8.667 .$$

Problema 21

Donades les circumferències $x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$, determineu:

- La posició relativa de les circumferències.
- La línia dels centres.
- L'eix radical.

Solució:

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre A, en el quadre de mesures canvieu l'equació per

$$x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0.$$

En el quadre de mesures determineu el centre i el radi de la circumferència.

$$r_1 = 3.16, A(-2, 0)$$

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre C, en el quadre de mesures canvieu l'equació per

$$x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0.$$

En el quadre de mesures determineu el centre i el radi de la circumferència.

$$r_2 = 2.83, C(0, 2)$$

Seleccioneu els punts A, B. En el quadre de mesures calculeu la distància entre els centres de les dues circumferències:

$$y = x + 1.$$

$$\overline{AC} = 1.41. \overline{AC} < r_1 + r_2, \overline{AC} > |r_1 - r_2|.$$

Les circumferències són secants.

Dibuixeu la recta AB. En el quadre de mesures, determineu la seua equació.

Seleccioneu les dues circumferències. Feu la intersecció E, F de les dues circumferències.

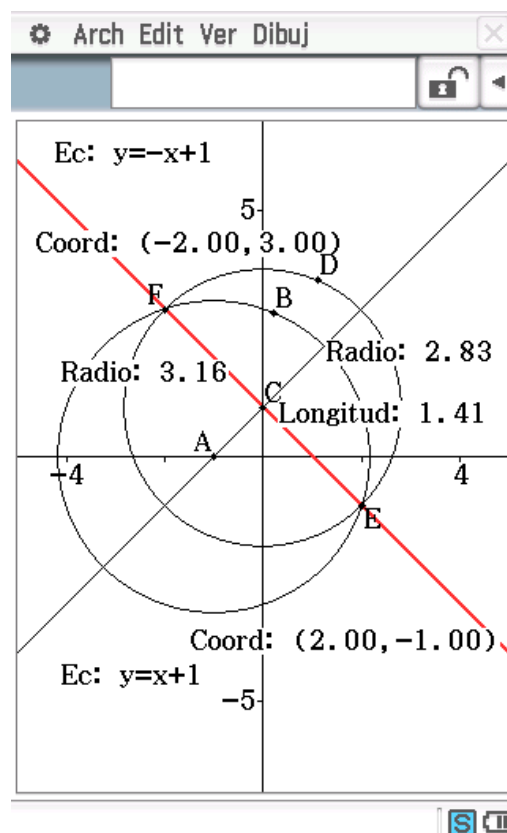
Dibuixeu la recta EF.

En el quadre de mesures determineu les coordenades dels punts E, F i l'equació de la recta EF (eix radical).

$$E(2, -1), F(-2, 3) \text{ y } y = -x + 1.$$

Notem que les rectes AC i EF són perpendiculars.

L'eix radical és igual a l'equació que resulta de restar les dues equacions de les^o circumferències.



Problema 22

Donades les circumferències $x^2 + y^2 = 9$, $225x^2 + 225y^2 - 300x + 90y - 116 = 0$,
determineu:

- La posició relativa de les circumferències.
- La línia dels centres.
- L'eix radical.

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre A, en el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 = 9$.

En el quadre de mesures determineu el centre i el radi de la circumferència.

$$r_1 = 3, A(0, 0)$$

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre C, en el quadre de mesures canvieu l'equació per

$$x^2 + y^2 - \frac{300}{225}x + \frac{90}{225}y - \frac{116}{225} = 0.$$

En el quadre de mesures determineu el centre i el radi de la circumferència.

$$r_2 = 1, C(0.67, -2.20)$$

Seleccioneu els punts A, B. En el quadre de mesures calculeu la distància entre els centres de les dues circumferències:

$$y = -0.3x.$$

$$\overline{AC} = 0.70, \overline{AC} < |r_1 - r_2| = 2.$$

Les circumferències són interiors.

Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre E que talle les dues circumferències.

Determineu les interseccions G, H de la circumferència de centre E i la circumferència $x^2 + y^2 = 9$.

Dibuixeu la recta GH.

Determineu les interseccions I, J de la circumferència de centre E i la circumferència $225x^2 + 225y^2 - 300x + 90y - 116 = 0$.

Dibuixeu la recta IJ.

Determineu la intersecció K de les rectes GH i IJ.

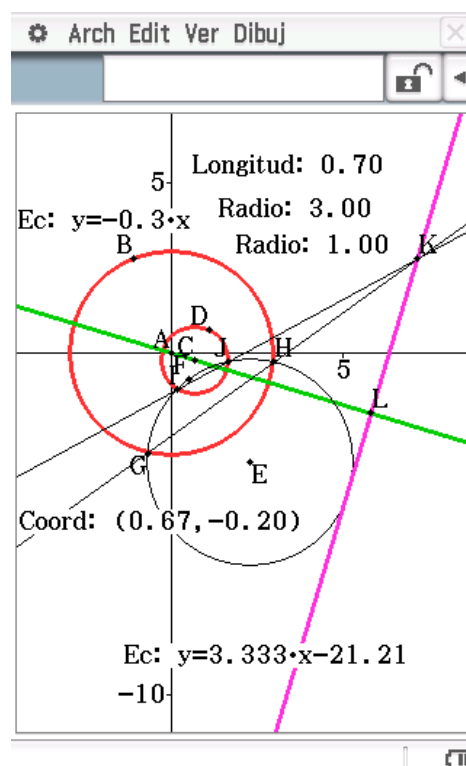
Dibuixeu la recta perpendicular a la recta AC que passa per K (eix radical de les dues circumferències inicials).

En el quadre de mesures determineu l'equació l'eix radical.

$$y = 3.333x - 21.21.$$

L'eix radical és igual a l'equació que resulta de restar les dues equacions de les

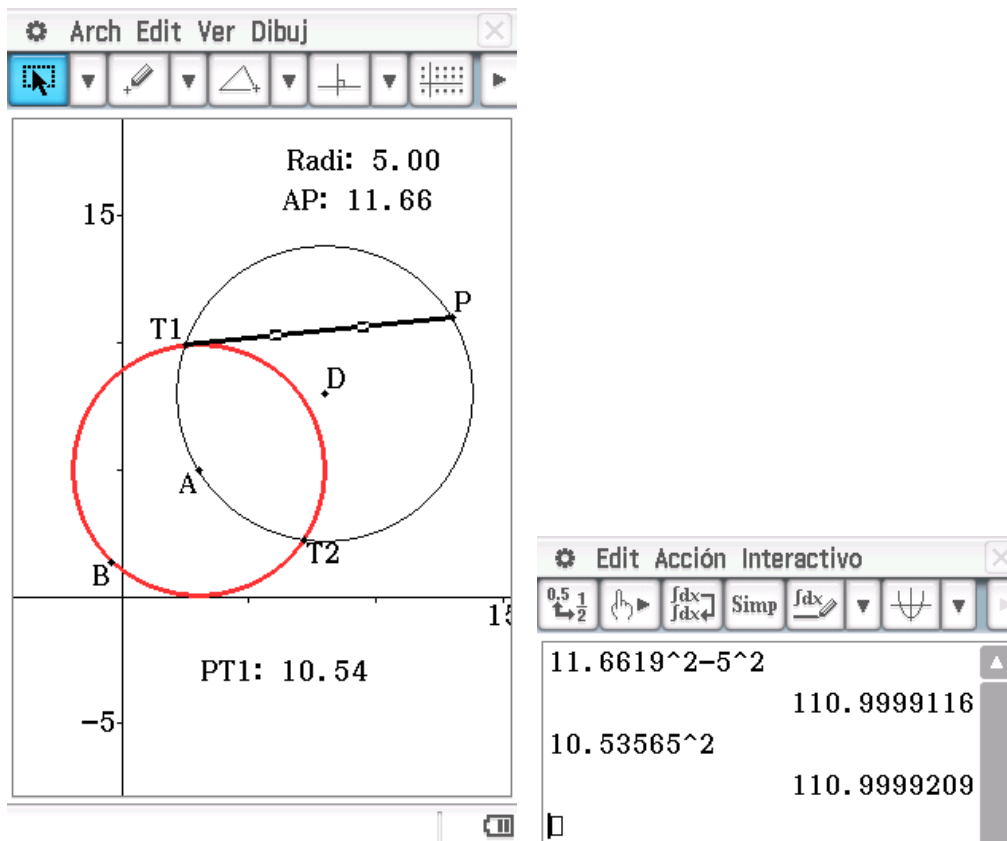
$$\text{circumferències } x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - \frac{300}{225}x + \frac{90}{225}y - \frac{116}{225} = 0.$$



Problema 23

Determineu la potència del punt $P(13, 11)$ respecte de la circumferència

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0.$$



Dibuixeu una circumferència qualsevol de centre A, en el quadre de mesures canvieu l'equació per $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

Dibuixeu el punt P. En el quadre de mesures determineu les seues coordenades.

En el quadre de mesures determineu el radi de la circumferència i la distància de \overline{AP} : $r = 5$, $\overline{AP} = 11.66$.

El punt és exterior a la circumferència.

La potència de P respecte de la circumferència és: $\overline{AP}^2 - r^2$.

Copieu els valors $r = 5$, $\overline{AP} = 11.66$, en el menú principal i calculeu

$$\overline{AP}^2 - r^2 \approx 110.9999116.$$

Dibuixeu el punt mig D dels punts A, P.

Dibuixeu la circumferència de centre D que passa pel punt A.

Seleccioneu les dues circumferències i determineu els punts de intersecció T1, T2 (punts de tangència de les rectes tangents a la circumferència que passen per P).

Calculeu la mesura $\overline{PT1}$ en el quadre de mesures.

$$\overline{PT1} = 10.54.$$

La potència de P respecte de la circumferència és: \overline{AP}^2 .

Copieu el valor, $\overline{PT1} = 10.54$, en el menú principal i calculeu $\overline{PT1}^2 \approx 110.9999209$.

L'error comés és d'aproximació de les mesures. La solució és $\overline{AP}^2 - r^2 = \overline{PT1}^2 = 111$.

Bibliografía:

KLETENIK, D. Problemas de Geometría Analítica. Ed Mir. Moscú. 1986.

Soluciones razonadas de los problemas de examen de estado. Ed. Edelvives. Zaragoza. 1950.

Temas de Grado. Matemáticas (grado superior) MEC. 1968.