



Compareu dos nombres. Logaritmes.

Problema

- Compareu els nombres 1997^{1999} i 1999^{1997} .
- Quantes xifres tenen cadascun dels dos nombres.

Solució:

El càlcul de 1997^{1999} desborda la capacitat de càlcul de la calculadora. Utilitzarem propietats de logaritmes per comparar el nombres:

1) Si $x, y > 0$.

$$\log x > \log y \quad \Leftrightarrow \quad x > y.$$

2)

$$\log x^n = n \cdot \log x.$$

3)

Siga $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si $10^n \leq x < 10^{n+1} \Leftrightarrow n \leq \log x < n+1$, aleshores, x té $n+1$ xifres.

$$\log(1997^{1999}) = 1999 \cdot \log 1997.$$

$$\log(1999^{1997}) = 1997 \cdot \log 1999.$$

1 9 9 9 X SHIFT (←) 1 9 9 7) =

$$1999 \times \log(1997)$$

6597.455752

1 9 9 7 X SHIFT (←) 1 9 9 9) =

$$1997 \times \log(1999)$$

6591.72315

Aleshores, $1997^{1999} > 1999^{1997}$.

1997^{1999} té 6598 xifres.

1999^{1997} té 6592 xifres.

Solució 2. Apartat a)

$$\frac{1999^{1997}}{1997^{1999}} = \left(\frac{1999}{1997}\right)^{1977} \frac{1}{1997^2}.$$

Calculem $\frac{1999}{1997}$

☰ 1 9 9 9 ▼ 1 9 9 7 = S+D

$\frac{1999}{1997}$	$\frac{1999}{1997}$
$\frac{1999}{1997}$	1.001001502

$$\frac{1999}{1997} < 1.002.$$

Calculem $\frac{1}{1997^2}$

1 ▼ 1 9 9 7 x² = S+D

$\frac{1}{1997^2}$	$\frac{1}{1997^2}$
$\frac{1}{3988009}$	0.00000025075

$$\frac{1}{1997^2} < 0.0000003.$$

$$\frac{1999^{1997}}{1997^{1999}} = \left(\frac{1999}{1997}\right)^{1977} \frac{1}{1997^2} < 1.002^{1997} \cdot 0.0000003.$$

1 • 0 0 2 xⁿ 1 9 9 7 ▶ x 0 • 0 0 0 0 0 0 0 3

=

$1.002^{1997} \times 0.0000003$
0.00001621665

Per tant, $\frac{1999^{1997}}{1997^{1999}} = \left(\frac{1999}{1997}\right)^{1977} \frac{1}{1997^2} < 1.$

Aleshores, $1999^{1997} < 1997^{1999}.$