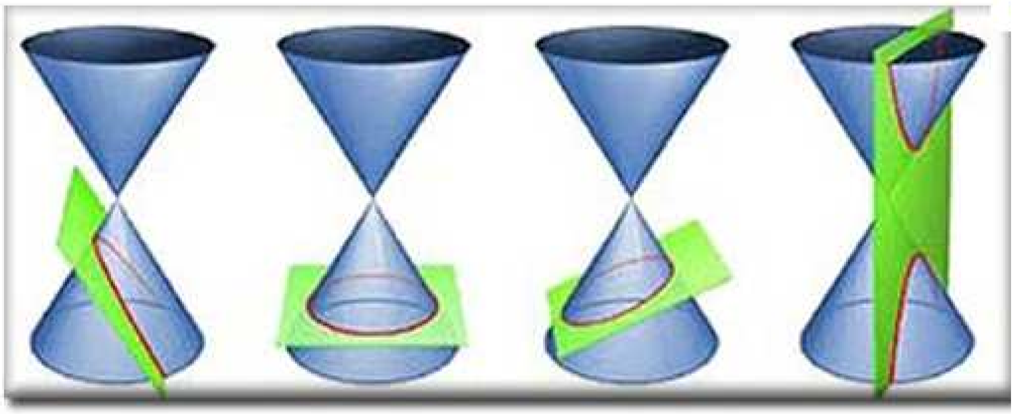
Superfície cònica



Paràbola Circumferència El·lipse Hipèrbola

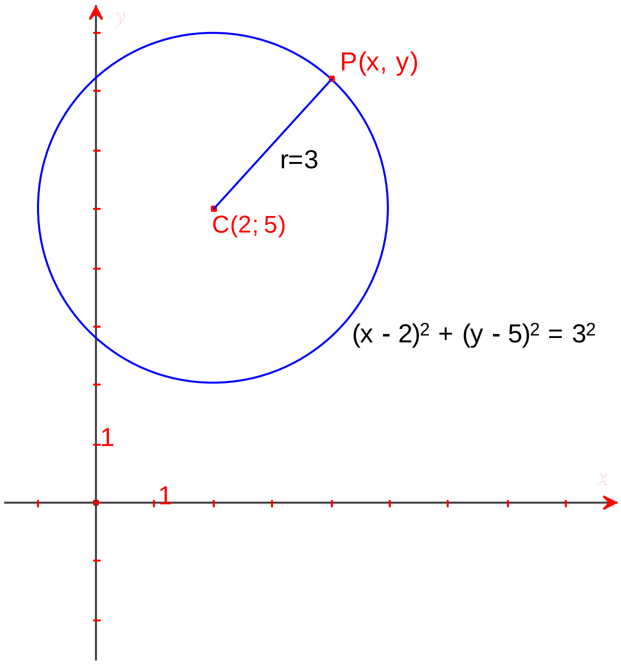
La circumferència.
La circumferència és el lloc geomètric dels punts del plànol que estan a una distància fixa, anomenada radi, d'un punt fix, anomenat centre.

Siga $C(x_o, y_o)$ centre de la circumferència i r el seu radi.
Siga $P(x, y)$ un punt qualsevol de la circumferència.
$\overline{CP} = r$. $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = r$.

$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$, que s'anomena equació reduïda de la circumferència.
Desenvolupant aquesta equació:
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, que s'anomena equació general de la circumferència.

Exemple 1:
Determineu l'equació reduïda i general de la circumferència de centre $C(2, 5)$ i radi 3.

Solució:
L'equació reduïda és:
$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$.
L'equació general és:
$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0$.



Exemple 2:

Proveu que l’equació $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ és una circumferència.
Determineu el seu centre i el radi i l’equació reduïda.

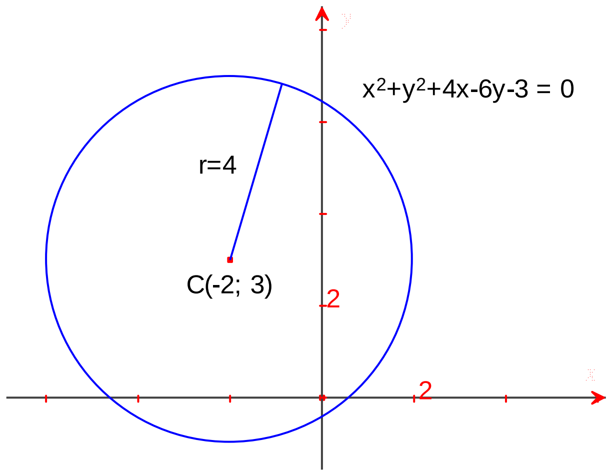
Solució:
Completant quadrats:

$$x^2 + 4x + 2^2 + y^2 - 6y + 3^2 - 2^2 - 3^2 - 3 = 0 \,.$$

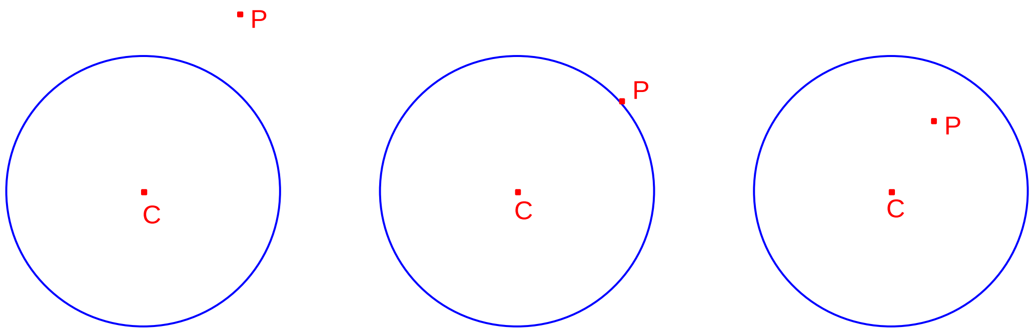
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 \,.$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2 \,.$$

El centre de la circumferència és $C(-2, 3)$ i el radi 4.



Posició relativa d’un punt i una circumferència.

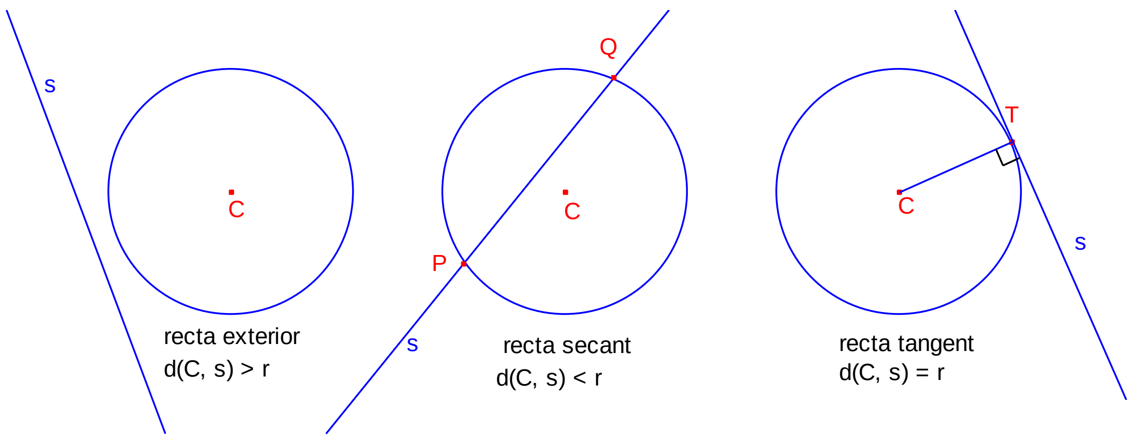


Punt exterior
CP > r

Punt de la circumferència
CP = r

Punt interior
CP < r

Posició relativa d’una recta i una circumferència.

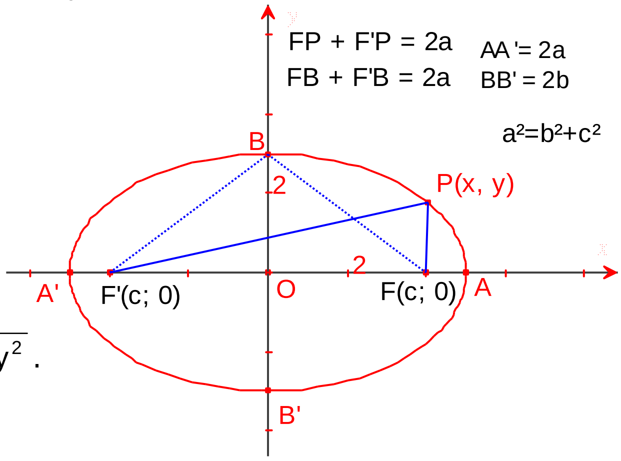


L'el·lipse

L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del plànol la suma de les distàncies dels quals a dos punts fixos anomenats focus és constant (2a).

Equació de l'el·lipse de focus $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ i eix major 2a.

Siga $P(x, y)$ un punt de l'el·lipse:



$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$.

$\overline{FP} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $\overline{F'P} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Elevant al quadrat:

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Simplificant:

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$.

Simplificant:

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$.

Elevant al quadrat:

$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$.

Simplificant:

$a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 = a^4 + c^2x^2$.

$a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$.

$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$.

Siga $b^2 = a^2 - c^2$. Aleshores:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Dividint l'expressió per a^2b^2.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Equació reduïda de l'el·lipse de centre l'origen de coordenades i focus $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ en l'eix d'abscisses.

Elements de l'el·lipse:

$2a = \overline{AA'}$ eix major o eix focal.

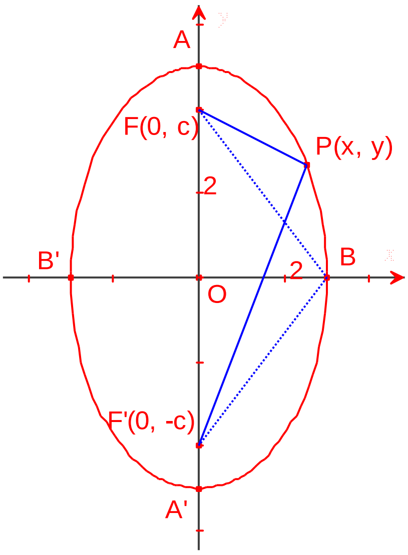
$2b = \overline{BB'}$ eix menor o eix secundari.

$2c = \overline{FF'}$ distància focal.

$e = \frac{c}{a}$ excentricitat. Notem que $e < 1$.

Si els focus estan sobre l'eix d'ordenades $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ i eix major 2a, l'equació reduïda és:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1. \qquad \overline{AA'}=2a,\ \overline{BB'}=2b.$$



Exemple 3:
Determineu l'equació reduïda de l'el·lipse de focus $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ i eix major $2a = 10$. Calculeu l'excentricitat.

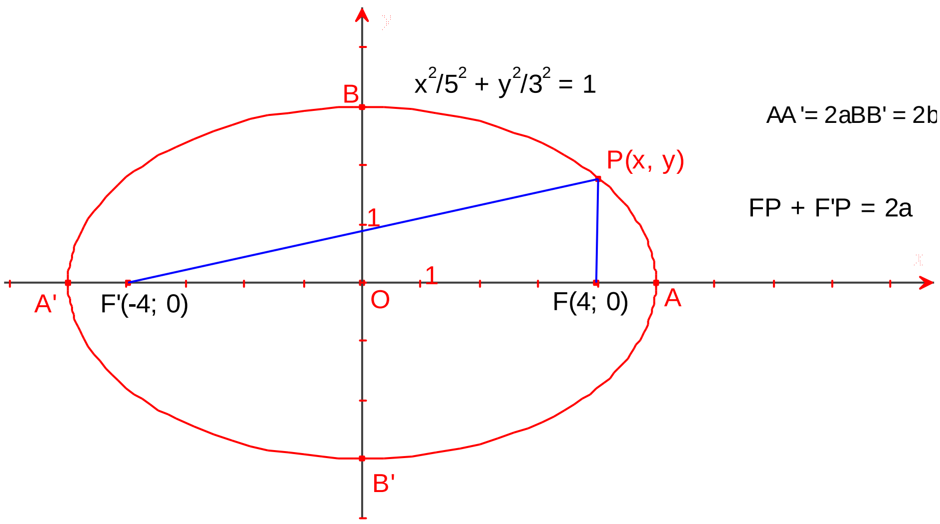
Solució:
$c = 4$, $a = 5$.
$b^2 = a^2 - c^2$.

Aleshores, $b = 3$.
L'equació de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

L'excentricitat és:

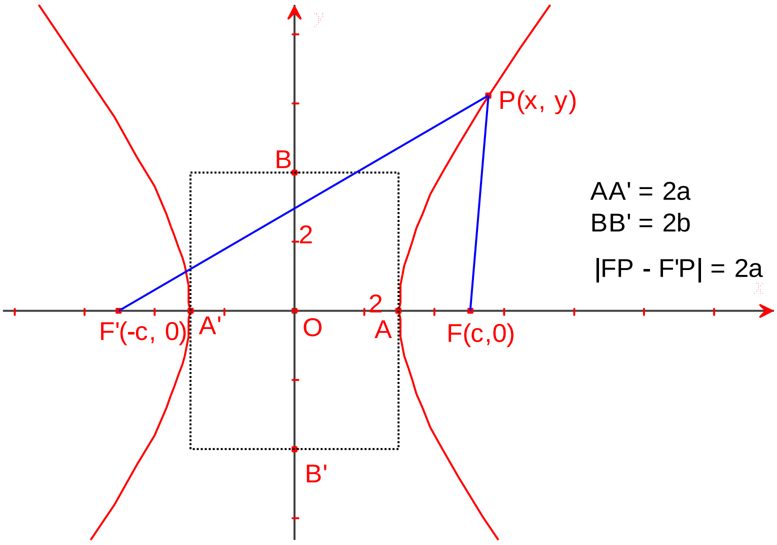
$$e=\frac{4}{5}.$$



La hipèrbola.

La hipèrbola és el lloc geomètric dels punts del plànol tals que la diferència de les seues distància a dos punts fixos, anomenats focus, és constant (2a).

Equació de l'el·lipse de focus $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ i eix real 2a.



L'equació reduïda és:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \overline{AA'} = 2a,\ \overline{BB'} = 2b.$$

$b^2 = c^2 - a^2$.

Elements de la hipèrbola:

$2a = \overline{AA'}$ eix real o eix focal.

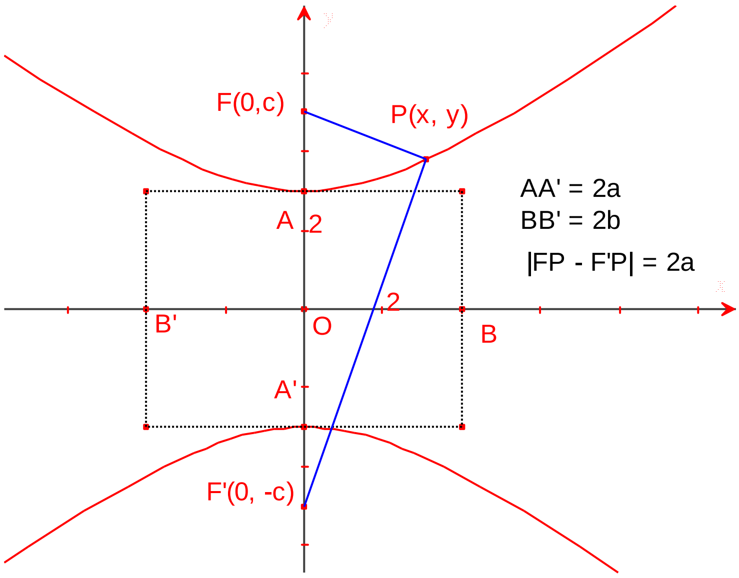
$2b = \overline{BB'}$ eix imaginari.

$2c = \overline{FF'}$ distància focal.

$e = \frac{c}{a}$ excentricitat, notem que $e > 1$.

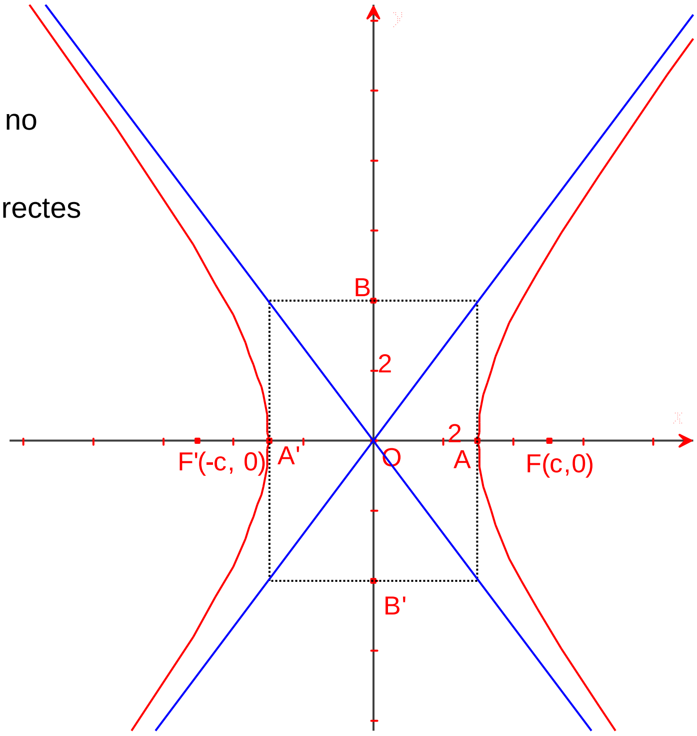
Si els focus estan sobre l'eix d'ordenades $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ i eix imaginari 2a, l'equació reduïda és:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad \overline{AA'} = 2a,\ \overline{BB'} = 2b.$$



Asímptotes de la hipèrbola.

Les rectes d'equacions $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ no tallen la hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aquestes rectes s'anomenen asímptotes de la hipèrbola.



Exemple 4:

Determineu l'equació reduïda de l'el·lipse de focus en l'eix d'abscisses $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ i eix real $2a = 6$. Calculeu l'excentricitat i l'equació de les seues asímptotes.

Solució:

$c = 5$, $a = 3$.

$b^2 = c^2 - a^2$.

Aleshores, $b = 4$.

L'equació de la hipèrbola és:

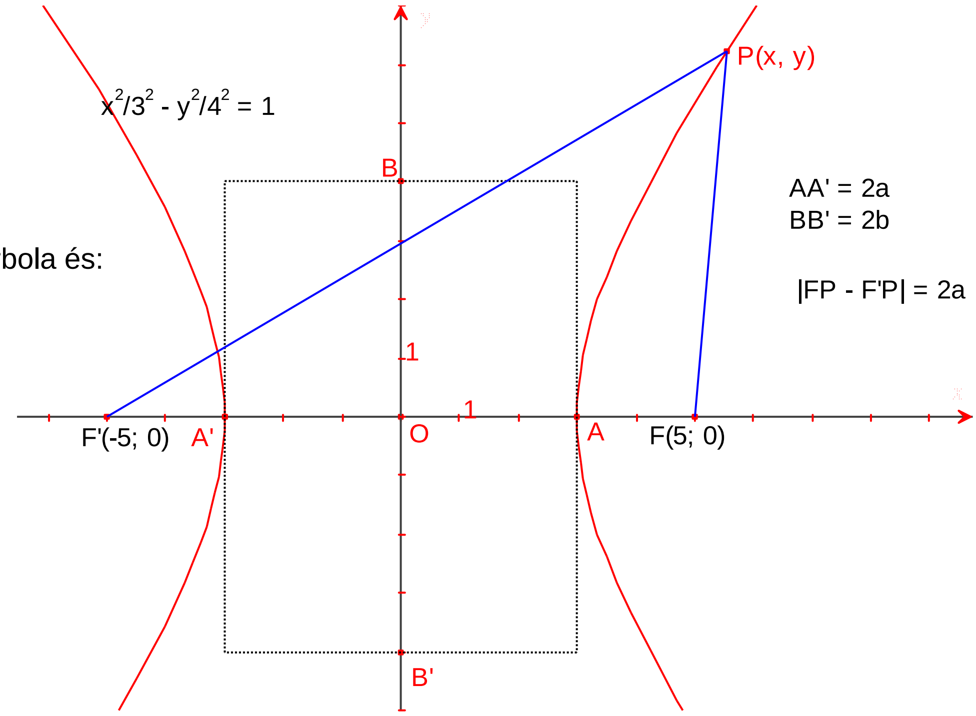
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

L'excentricitat és:

$$e = \frac{5}{3}.$$

Les asímptotes són:

$$y = \frac{4}{3}x, \quad y = -\frac{4}{3}x.$$



La paràbola

La paràbola és el lloc geomètric dels punts del plànol que equidisten d'un punt fix F, anomenat focus, i d'una recta r anomenada directriu.
S'anomena p paràmetre de la paràbola a la distància del focus a la directriu.

S'anomena eix de simetria de la paràbola a la recta perpendicular a la bisectriu que passa pel focus.
S'anomena vèrtex de la paràbola al punt d'intersecció de la paràbola i l'eix de simetria.

Determinem l'equació reduïda de la paràbola de focus $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ i directriu la recta $r \equiv x = -\frac{p}{2}$.

Siga $P(x, y)$ un punt de la paràbola.

$d(P, r) = d(F, P)$.

$$d(P, r) = \left|\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{1^2 + 0^2}}\right|.$$

$$d(F, P) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Igualant les expressions:

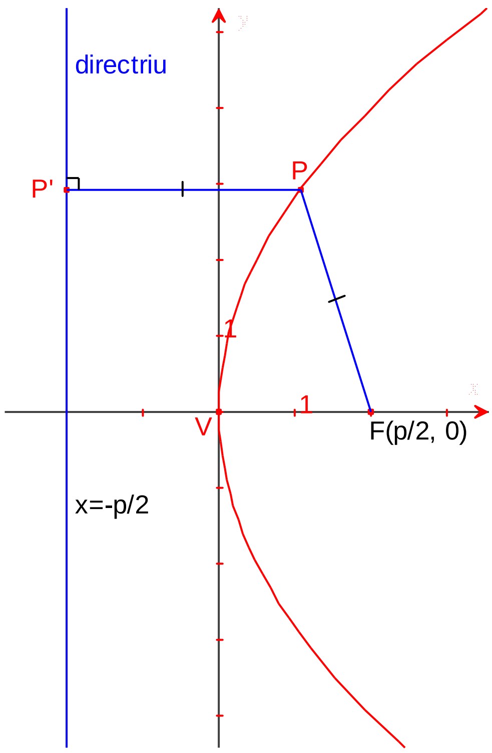
$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Elevant al quadrat:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Simplificant:

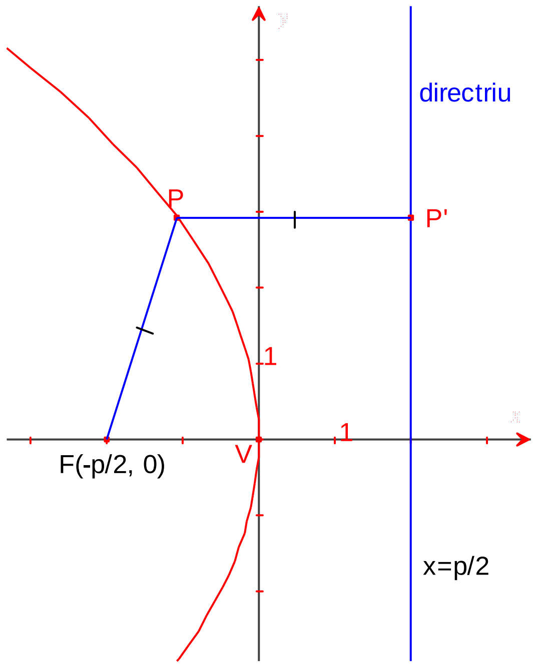
$$y^2 = 2px.$$



El vèrtex de la paràbola reduïda és l'origen de coordenades.

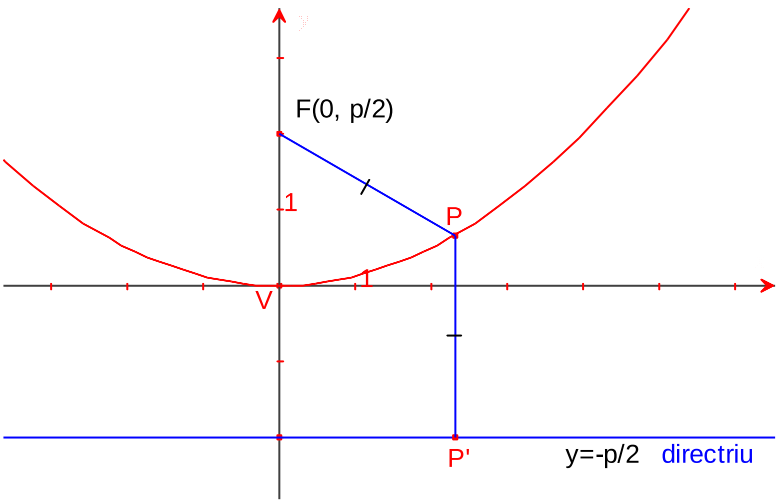
L'equació reduïda de la paràbola de focus $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ i directriu la recta $r \equiv x = \frac{p}{2}$ és:

$y^2 = -2px$



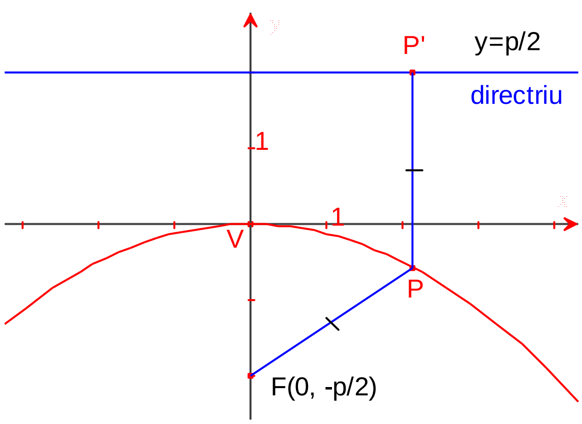
L'equació reduïda de la paràbola de focus $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ i directriu la recta $r \equiv y = -\frac{p}{2}$ és:

$x^2 = 2py$.



L'equació reduïda de la paràbola de focus $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ i directriu la recta $r \equiv y = \frac{p}{2}$ és:

$x^2 = -2py$.



Exemple 5

Determinem l'equació reduïda de la paràbola de focus $F(2,0)$ i directriu la recta $r \equiv x = -2$.

Solució:

El paràmetre de la paràbola és $p = 4$.

$d(P,r) = \left| \dfrac{x+2}{\sqrt{1^2+0^2}} \right|$.

$d(F,P) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$.

Igualant les expressions:

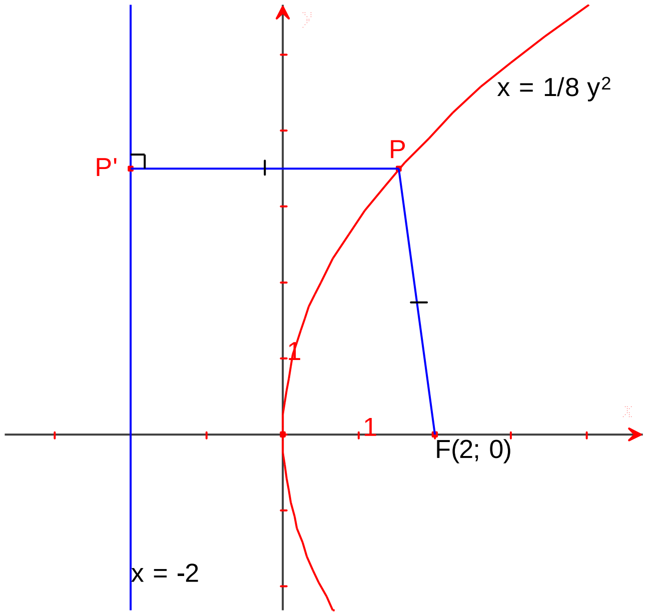
$|x+2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$.

Elevant al quadrat i simplificant:

$x^2 + px + \dfrac{p^2}{4} = x^2 - px + \dfrac{p^2}{4} + y^2$.

Simplificant:

$y^2 = 8x$.



Exemple 6

Determinem l'equació reduïda de la paràbola de focus $F(-2,1)$ i directriu la recta $r \equiv y = -1$.

$d(P,r) = \left| \dfrac{y+1}{\sqrt{0^2+1^2}} \right|$.

$d(F,P) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$.

Igualant les expressions:

$|y+1| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$.

Elevant al quadrat i simplificant:

$x^2 + px + \dfrac{p^2}{4} = x^2 - px + \dfrac{p^2}{4} + y^2$.

Simplificant:

$4y = x^2 + 4x + 4$.

$y = \dfrac{1}{4}x^2 + x + 1$.

El paràmetre de la paràbola és:

$p = 2$.