Recurrència.

Problema

En la següent distribució de nombres s'han disposat formant un escaire de fuster.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

Considereu la suma dels nombres de cada escaire:

1

$2+4+2$

$3+6+9+6+3$

$4+8+12+16+12+8+4$

Amb ajut de la calculadora calculeu el valor de les sumes

Hi ha regularitat en aquestes sumes.

Solució:

Les primeres es poden fer directament amb calculadora

1

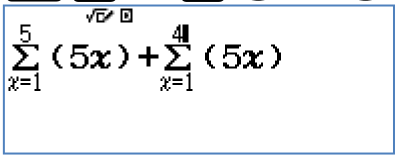
$2+4+2=8$

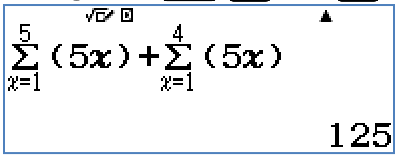
$3+6+9+6+3=27$

$4+8+12+16+12+8+4=64$

Les següents ja utilitzaríem la funció de sumes finites:

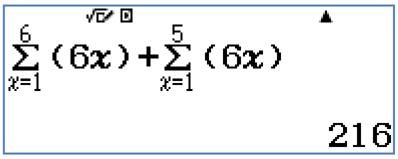
$5+10+15+20+25+20+15+10+5$.





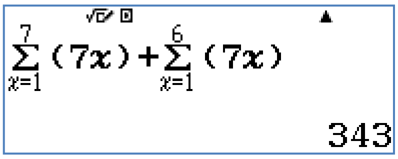
Aleshores, $5+10+15+20+25+20+15+10+5=125$.

$6+12+18+24+30+36+30+24+18+12+6$



Aleshores, $6+12+18+24+30+36+30+24+18+12+6=216$.

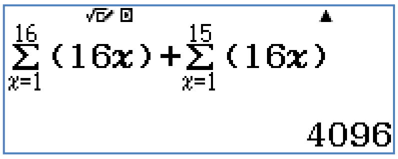
$7+14+21+28+35+42+49+42+35+28+21+14+7$



Aleshores, $7+14+21+28+35+42+49+42+35+28+21+14+7=343$.

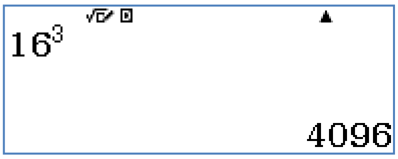
1, 8. 27, 64, 125, 216,....

L'escaire 16 que no es veuen els valors:



És la successió dels cubs perfectes.

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, \ldots\ldots\ldots, n^3$



Solució analítica:

La suma n-èsima és:

$$n\cdot 1+n\cdot 2+\ldots\ldots+n(n-1)+n\cdot n+n(n-1)+n(n-2)+\ldots\ldots+n\cdot 2+n\cdot 1=$$

$$=n(1+2+\ldots\ldots+n)+n(1+2+\ldots\ldots+n-1)=$$

$$=n\cdot\frac{1+n}{2}n+n\frac{1+n-1}{2}(n-1)=$$

$$=n^2\left(\frac{1+n}{2}+\frac{n-1}{2}\right)=n^2\cdot n=n^3.$$