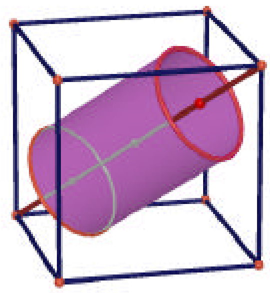
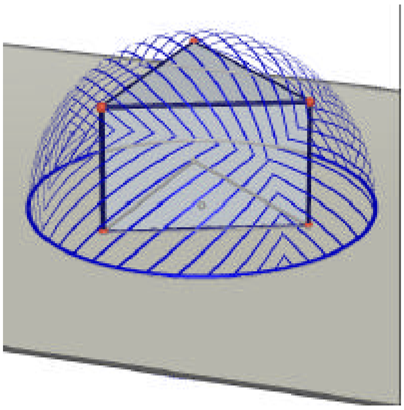
Dotze problemes d'optimització

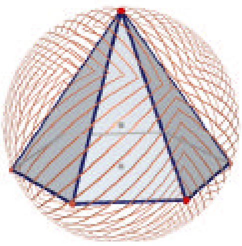
Problema 1
Determineu les dimensions d'un cilindre de volum màxim inscrit en un cub d'aresta a tal que l'eix del cilindre siga una diagonal del cub.



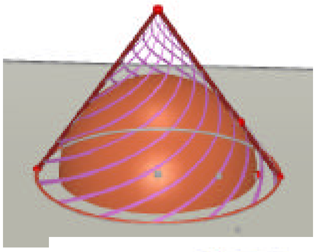
Problema 2
En una semiesfera de radi R s'ha inscrit un un prisma regular triangular tal que una de les bases pertany al cercle major de la semiesfera i l'altra base pertany a l'esfera.
Determineu l'altura del prisma tal que la suma de les longituds de totes les arestes siga màxima.
Gúsiev 945



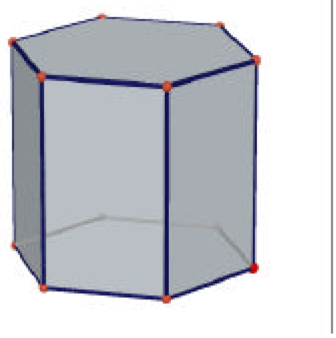
Problema 3
Determineu el volum màxim d'una piràmide regular hexagonal inscrita en una esfera de radi R.
Gúsiev 946.



Problema 4
Determineu l'altura d'un con de volum minim circumscrit a una semiesfera de radi R.
Gúsiev 940.



Problema 5
De totes els prismes regulars hexagonals de volum $36cm^3$ determineu les mesures del de superfície mínima.
Examen d'estat, 865.



Problema 6
Donada una circumferència de radi R, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.
Examen d'estat.

Problema 7

Siguen els segments paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Siga P un punt interior del segment $\overline{BC}$.

La recta AP talla la recta CD en el punt E.

On es troba el punt P que fa mínima la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{CPE}$.

Problema 8

Calculeu el màxim i el mínim de la $x^2 + 2xy$ amb la condició que $x^2 + y^2 = 1$.

KöMaL, abril 1999 F3282.

Problema 9

De tots els ortoedres de base quadrada inscrits en una semiesfera de radi R determineu les dimensions del que volum màxim. Calculeu aquest volum.

Gúsiev, 930.

Problema 10

Per la diagonal de la base d'un prisma quadrangular regular es traça una secció que conté almenys un punt de l'altra base.

Determineu l'àrea màxima i mínima de la secció si les arestes del prisma són $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ i 2.

Gúsiev 929.

Problema 11

Demostreu que de tots les piràmides que tenen per base un triangle isòsceles i que estan inscrites en un con de volum conegut, el volum màxim el té la piràmide regular (base un triangle equilàter).

Gúsiev 931.

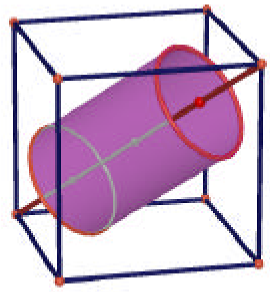
Problema 12

Determineu l'àrea màxima de la secció d'un con que passa pel vèrtex si el radi de la base és R i l'altura és h.

Gúsiev, 932.

Problema 1

Determineu les dimensions d'un cilindre de volum màxim inscrit en un cub d'aresta a tal que l'eix del cilindre siga una diagonal del cub.



Solució:

Siga el cub d'aresta $\overline{PR} = a$.

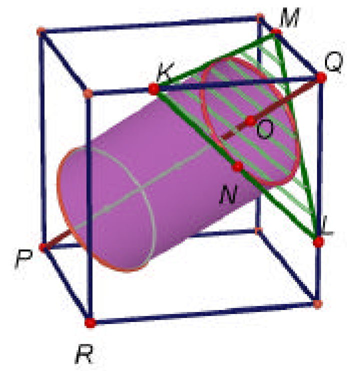
Siga la diagonal $\overline{PQ} = a\sqrt{3}$ eix del cilindre.

Siga KLM la secció del cub que conté una base del cilindre.

La circumferència de la base del cilindre és igual a la circumferència inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.

Siga O el centre de la circumferència.

Siga $x = \overline{KQ}$, $y = \overline{OQ}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLQ}$:

$\overline{KL} = x\sqrt{2}$

Vegem la relació entre x, y. El volum del tetraedre KLMQ és:

$$V_{KLMQ} = \frac{1}{6}\overline{QK}^3 = \frac{1}{3}\frac{\overline{KL}^2\sqrt{3}}{4}\overline{OQ}.$$

$\frac{1}{6}x^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(x\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}y$. Aleshores: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Calculem el radi del cilindre.

O és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.Siga N el punt mig del costat $\overline{KL}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNL}$:

$\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{KL} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$. Aplicant la propietat del baricentre el radi del cilindre és:

$$r = \overline{ON} = \frac{1}{3}\overline{MN} = \frac{\sqrt{6}}{6}x.$$

L'altura del cilindre és:

$$h = \overline{PQ} - 2\overline{OQ} = a\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x.$$

El volum del cilindre és:

$$V(r,h) = \pi r^2 h. \quad V(x) = \pi\frac{1}{6}x^2\left(a\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x\right).$$

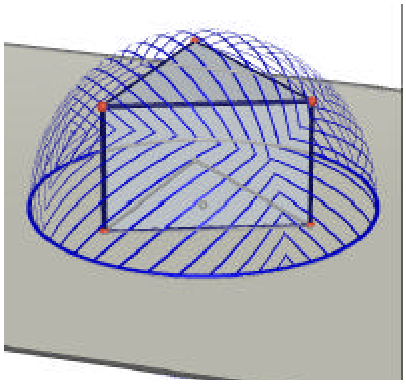
$V(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\left(-\frac{2}{3}x^3 + ax^2\right)$, $x \in \left]0, \frac{3a}{2}\right]$. Derivant la funció:

$$V'(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\left(-2x^2 + 2ax\right). \quad V'(x) = 0, \ x = a$$

$V''(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}(-4x + 2a)$, $V''(a) = \frac{-\pi\sqrt{3}}{3} < 0$. Aleshores $x = a$ és el màxim de la funció:

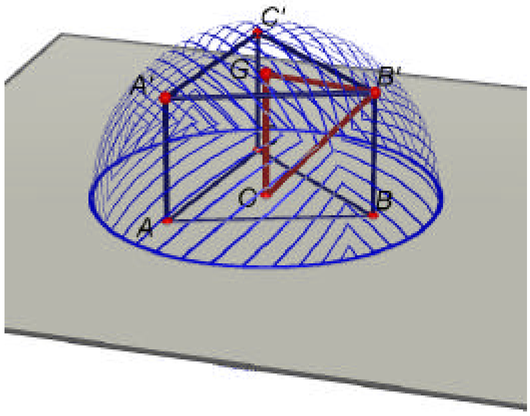
Les dimensions del cilindre de volum màxim són $r = \frac{\sqrt{6}}{6}a$, $h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ i el volum màxim és $V(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}a^3$.

Problema 2



En una semiesfera de radi R s'ha inscrit un un prisma regular triangular tal que una de les bases pertany al cercle major de la semiesfera i l'altra base pertany a l'esfera.
Determineu l'altura del prisma tal que la suma de les longituds de totes les arestes siga màxima.
Gúsiev 945

Solució:
Siga la semiesfera de centre O i radi R.
Siga el prisma regular triangular ABCA'B'C',



$\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter de costat $\overline{AB} = a$.
Siga $h = \overline{BB'}$ altura del prisma.
La funció a optimitzar és:
$L(a,h) = 6a + 3h$, suma de les longituds de totes les arestes.
La perpendicular al cercle màxim que passa pel centre de la semiesfera passa pel barcientre G del triangle equilàter $A'\overset{\Delta}{B'}C'$.
Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{GB'} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. $\overline{OB'} = R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OGB'}$:

$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + h^2.$$

$$a = \sqrt{3R^2 - 3h^2}.$$

$L(h) = 6\sqrt{3R^2 - h^2} + 3h$, $h \in [0, R]$. Derivem la funció:

$$L'(h) = \frac{-18h}{\sqrt{3R^2 - 3h^2}} + 3.$$

$L'(h) = 0$, $\frac{6h}{\sqrt{3R^2 - 3h^2}} = 1$. Resolent l'equació:

$$h = \frac{\sqrt{13}}{13}R.$$

$$L''(h) = \frac{-6\sqrt{3R^2 - 3h^2} - \frac{36}{\sqrt{3R^2 - 3h^2}}}{R^2 - h^2}. \quad L''\left(\frac{\sqrt{13}}{13}R\right) < 0.$$

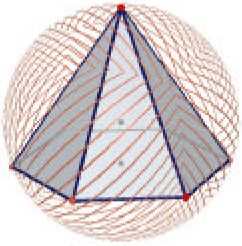
Aleshores, $h = \frac{\sqrt{13}}{13}R$ és un màxim relatiu estricte.

La longitud màxima de la suma de les arestes s'assoleix quan $h = \frac{\sqrt{13}}{13}R$ i la longitud màxima és: $L\left(\frac{\sqrt{13}}{13}R\right) = 3\sqrt{13}R$.

Problema 3

Determineu el volum màxim d'una piràmide regular hexagonal inscrita en una esfera de radi R.

Gúsiev 946.



Solució:

Siga l'esfera de centre O i radi R.

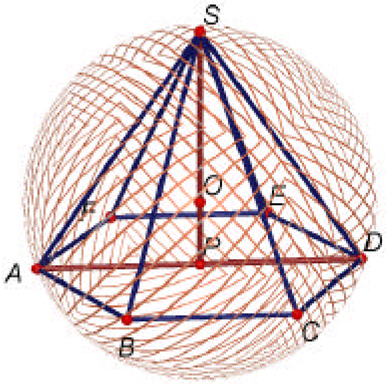
Siga la piràmide regular hexagonal ABCDEFS de base l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = a$.

Siga P el centre de l'hexàgon.

Siga $\overline{PS} = h$ altura de la piràmide.

Siga $\alpha = \angle PSA$

La secció ADS forma una circumferència de radi R en l'esfera.



$\overline{AD} = 2a$, $\angle ASD = 2\alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADS}$:

$\frac{2a}{\sin 2\alpha} = 2R$. Aleshores, $a = R \cdot \sin 2\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APS}$:

$h = \frac{a}{\text{tg}\alpha} = 2R \cdot \cos^2 \alpha$.

La funció a optimitzar és:

$$V(a,h) = \frac{1}{3}\left(6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)h.$$

$$V(\alpha) = \sqrt{3}R^3 \sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

$V(\alpha) = 4\sqrt{3}R^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Derivant la funció:

$$V'(\alpha) = 8\sqrt{3}R^3 \sin\alpha \cdot \cos^3 \alpha\left(\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha\right)$$

$V'(\alpha) = 0$, $\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha = 0$.

$\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$. $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$V''(\alpha) = 8\sqrt{3}R^2 \cos^2 \alpha\left(14\cos^4 \alpha - 19\cos^2 \alpha + 6\right).$$

$$V''\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 0.$$

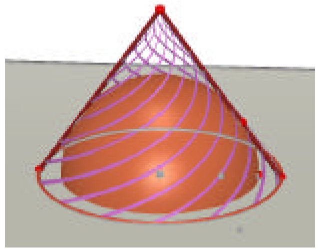
Aleshores, $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim s'assoleix quan $\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$ i el volum màxim és:

$$V_{\text{màx}} = \frac{16\sqrt{3}}{27}R^3.$$

Problema 4

Determineu l'altura d'un con de volum minim circumscrit a una semiesfera de radi R.
Gúsiev 940.

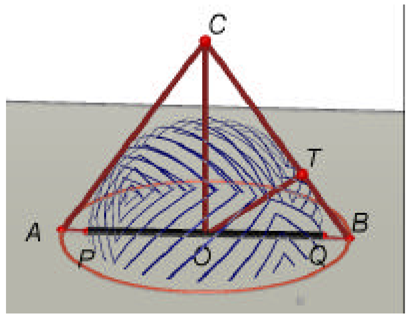


Solució:

Siga la semiesfera de centre O i diàmetre $\overline{PQ} = 2R$.
Siga el con circumscrit a la semiesfera de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2r$, centre O i vèrtex C.
Siga $\alpha = \angle CBA$.
Siga T el punt de tangència de la semiesfera i la generatriu del con $\overline{BC}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTB}$:

$$r = \overline{OB} = \frac{1}{\sin\alpha}R .$$



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$h = \overline{OC} = r \cdot tg\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}R .$$

La funció a optimitzar és:

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h .$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}R^3 \frac{1}{\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$ Derivem la funció:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{3}R^3 \frac{\sin\alpha\left(-2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}{\sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha} .$$

$$V'(\alpha) = 0 , \quad -2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 .$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{3} .$$

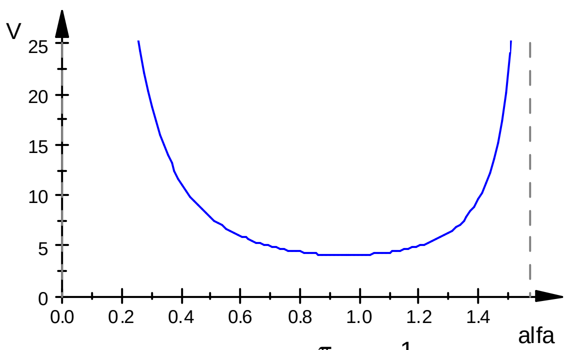
$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} .$$

$$V''(\alpha) = \frac{6\cos\alpha}{\sin^4\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha\cos\alpha} + \frac{2}{\cos^3\alpha} .$$

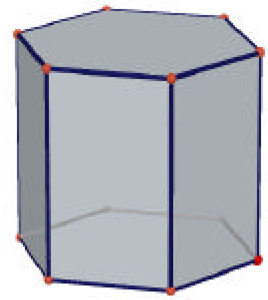
$V''\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$. Aleshores, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ és un mínim relatiu estricte.

El con de volum mínim s'assoleix quan l'altura del con és:

$$h_{mín} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}R = R\sqrt{3} .$$



$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$$



Problema 5

De totes els prismes regulars hexagonals de volum $36cm^3$ determineu les mesures del de superfície mínima.
Examen d'estat, 865.

Solució:
Siga a l'aresta de la base i h l'altura del prisma.
L'àrea de l'hexàgon regular de costat a és:

$$S_6 = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 .$$

L'àrea total del prisma és:

$$S = 2 \cdot S_6 + 6ah = 2\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 6ah .$$

La funció a optimitzar és:

$$S(a,h) = 3\sqrt{3}a^2 + 6ah .$$

El volum del prisma és $36cm^3$:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h = 36 . \ h = \frac{8\sqrt{3}}{a^2} .$$

$S(a) = 3\sqrt{3}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right)$, $a > 0$. Derivant la funció:

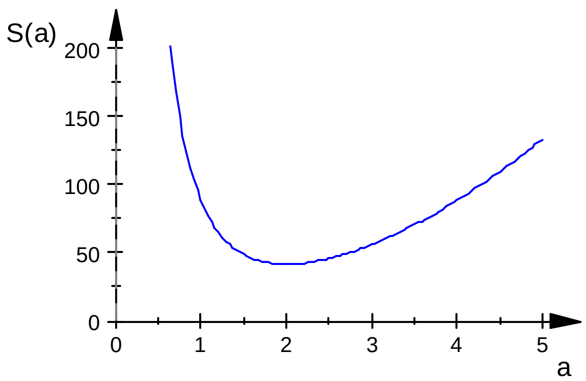
$$S'(a) = 6\sqrt{3}\left(a - \frac{8}{a^2}\right).$$

$S'(a) = 0$, $a - \frac{8}{a^2} = 0$. Resolent l'equació:

$a = 2$, $h = 2\sqrt{3}$.

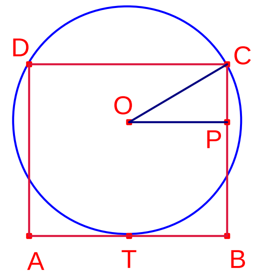
$S''(a) = 6\sqrt{3}\left(\frac{16}{a^3}\right)$, $S''(2) = 12\sqrt{3} > 0$.

Aleshores, $a = 2$ és un mínim relatiu estricte.
La superfície mínima del prisma s'assoleix quan l'aresta de la base és $a = 2$ i l'altura $h = 2\sqrt{3}$. La superfície mínima és $S_{mín} = 36\sqrt{3}$.



Problema 6
Donada una circumferència de radi R, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.
Examen d'estat.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.
Siga T el punt de tangència.
Siga el rectangle ABCD tal que el costat $\overline{AB} = a$ és tangent a la circumferència i $\overline{BC} = b$.
La funció a optimitzar és:
$S(a,b) = ab$.
Siga P la projecció de O sobre el costat $\overline{BC}$.



$\overline{OC} = \overline{OT} = \overline{PB}$. $\overline{OP} = \frac{a}{2}$, $\overline{PC} = b - R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPC}$:

$R^2 = (b-R)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Simplificant:

$a^2 = 8Rb - 4b^2$. $a = \sqrt{8Rb - 4b^2}$.

$S(b) = b\sqrt{8Rb - 4b^2}$, $b \in [0, 2R]$. Derivant la funció:

$$S'(b) = \frac{6Rb^2 - 4b^3}{\sqrt{2Rb^3 - b^4}} .$$

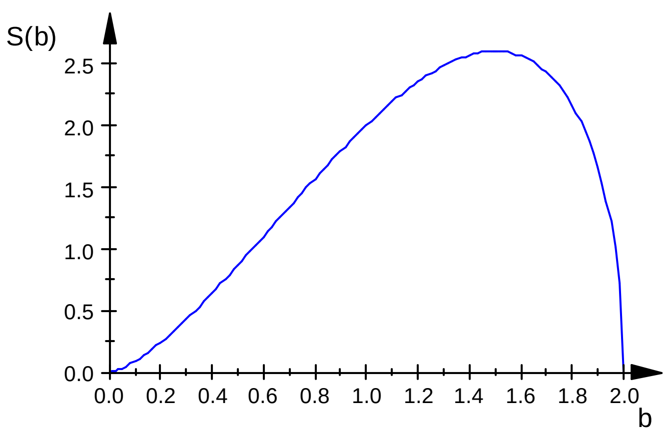
$S'(b) = 0$, $6Rb^2 - 4b^3 = 0$. Resolent l'equació:

$b = \frac{3}{2}R$, $a = R\sqrt{3}$.

$$S''(b) = \frac{4b^2 - 12Rb + 6R^2}{(2R-b)\sqrt{2Rb - b^2}} \quad , \quad S''\left(\frac{3}{2}R\right) = -4\sqrt{3} < 0 .$$

Aleshores, el rectangle d'àrea màxima s'assoleix quan $b = \frac{3}{2}R$, $a = R\sqrt{3}$.

L'àrea del rectangle d'àrea màxima és, $S_{màx} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.



$S(b) = b\sqrt{8b - 4b^3}$

Problema 7

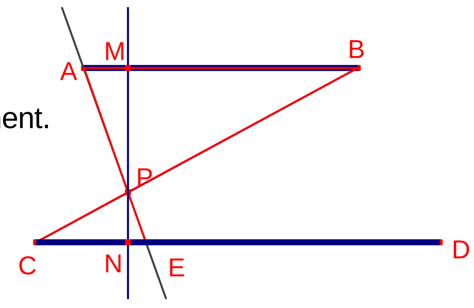
Siguen els segments paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Siga P un punt interior del segment $\overline{BC}$.

La recta AP talla la recta CD en el punt E.

On es troba el punt P que fa mínima la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{CPE}$.

Solució:



Siga $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$.

Pel punt P tracem una perpendicular al segment $\overline{AB}$, que talla els segments $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ en els punts M, N, respectivament.

Siga $\overline{MN}=h$ distància constant entre els dos segments.

Siga $h_1=\overline{PM}$, $h_2=\overline{PN}$. $h_1+h_2=h$.

Siga $x=\overline{CE}$.

La funció a optimitzar és:

$$S(x,h_1,h_2)=\frac{a\cdot h_1}{2}+\frac{x\cdot h_2}{2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{EPC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h_1}{a}=\frac{h_2}{x}=\frac{h_1+h_2}{a+x}=\frac{h}{a+x}.$$ Aleshores:

$$h_1=\frac{ah}{a+x},\ h_2=\frac{xh}{a+x}.$$

La funció superfície és transformaria:

$$S(x)=\frac{a^2h}{2(a+x)}+\frac{x^2h}{2(a+x)},\ x\geq 0.$$ Derivem la funció:

$$S'(x)=\frac{h}{2}\left(\frac{x^2+2ax-a^2}{(a+x)^2}\right).$$

$S'(x)=0$, $x^2+2ax-a^2=0$. Resolent l'equació:

$x=\left(\sqrt{2}-1\right)a$.

$S''(x)=\dfrac{2a^2h}{(a+x)^2}$. $S''\left(\left(\sqrt{2}-1\right)a\right)>0$. Aleshores $x=\left(\sqrt{2}-1\right)a$ és un mínim relatiu estricte.

Si $x=\left(\sqrt{2}-1\right)a$, $h_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}h$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{EPC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}=\frac{h_1}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A fi que la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{CPE}$ siga mínima el punt P ha d'acomplir que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. L'àrea mínima és:

$$S_{mín}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)a\right)=\frac{a^2h}{2\sqrt{2}a}+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2h}{2\sqrt{2}a}=ah\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Problema 8

Calculeu el màxim i el mínim de la x^2+2xy amb la condició que $x^2+y^2=1$.

KöMaL, abril 1999 F3282.

Solució:

La funció per a optimitzar és:

$f(x,y)=x^2+2xy$.

Si $x^2+y^2=1$, (x, y) pertanyen a la circumferència centrada en l'origen de coordenades i de radi 1.

Efectuem el canvi $\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$, $x^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$f(\alpha)=\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$.

$f(\alpha)=\cos^2\alpha+\sin 2\alpha$, $\alpha\in[0,2\pi]$ Derivem la funció:

$f'(\alpha)=-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha+2\cos 2\alpha$

$f'(\alpha)=-\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha$

$f'(\alpha)=0$, $\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha$.

$tg2\alpha=2$, $2\alpha=\mathrm{arctg}2, \mathrm{arctg}2+\pi$ (2α està en el primer quadrat o en el tercer quadrat.

Si $2\alpha=\mathrm{arctg}2$, aleshores, $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Si $2\alpha=\mathrm{arctg}2+\pi$, aleshores, $\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin 2\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$f''(\alpha)=-2\cos 2\alpha-4\sin 2\alpha$.

Si $2\alpha=\mathrm{arctg}2$, aleshores, $f''(\alpha)<0$. Per tant, $2\alpha=\mathrm{arctg}2$ és un màxim.

Si $2\alpha=\mathrm{arctg}2+\pi$, aleshores, $f''(\alpha)>0$. Per tant, $2\alpha=\mathrm{arctg}2+\pi$ és un mínim.

$f\left(\frac{\mathrm{arctg}2}{2}\right)\geq f(\alpha)\geq f\left(\frac{\mathrm{arctg}2+\pi}{2}\right)$.

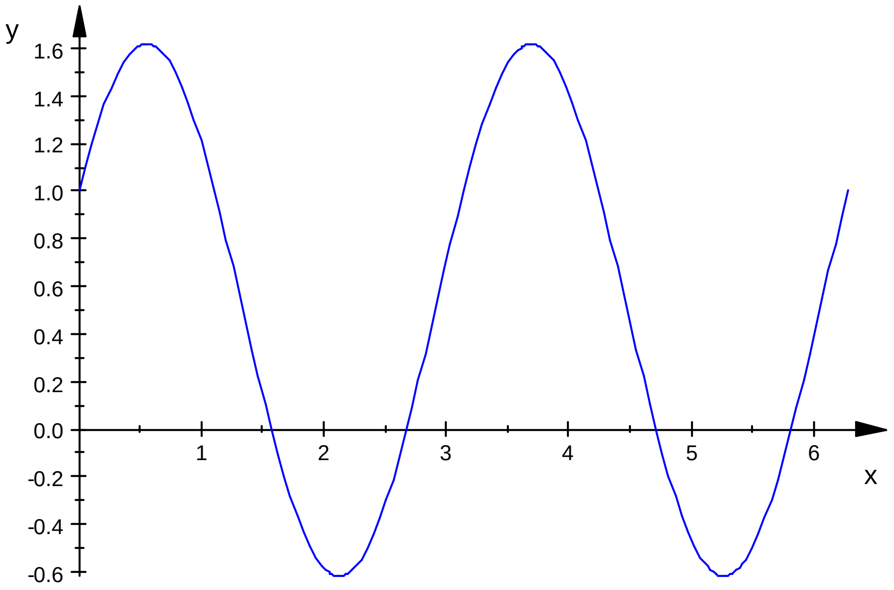
Si $2\alpha=\mathrm{arctg}2$, $\cos^2\alpha=\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\right)^2=\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$

$f\left(\frac{\mathrm{arctg}2}{2}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

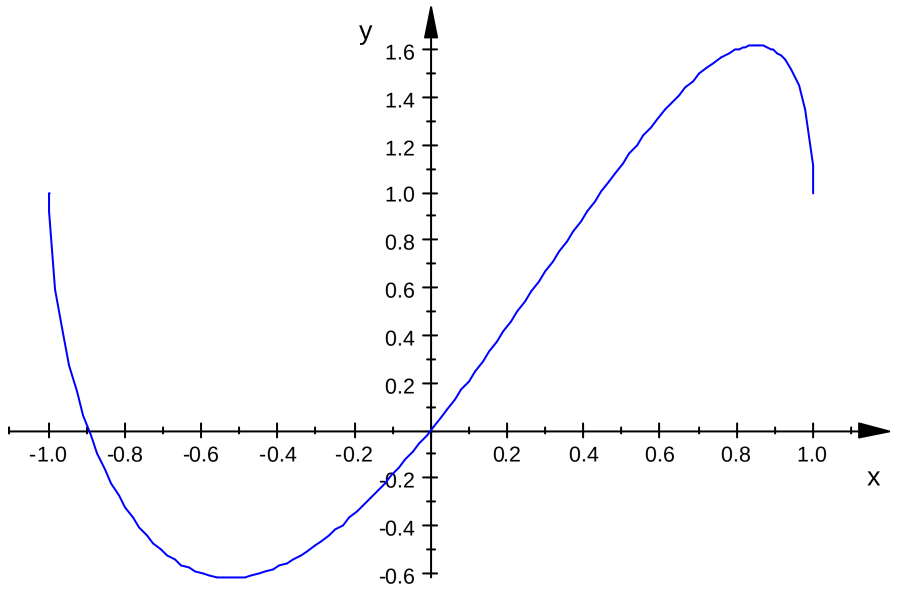
Si $2\alpha=\mathrm{arctg}2+\pi$, $\cos^2\alpha=\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\right)^2=\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$

$f\left(\frac{\mathrm{arctg}2+\pi}{2}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Aleshores, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x^2+2xy\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\frac{1}{\Phi}\leq x^2+2xy\leq\Phi$



$$f(x) = \cos^2(x) + \sin(2x) \qquad x \in [0, 2\pi]$$



$$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1, 1]$$

Problema 9

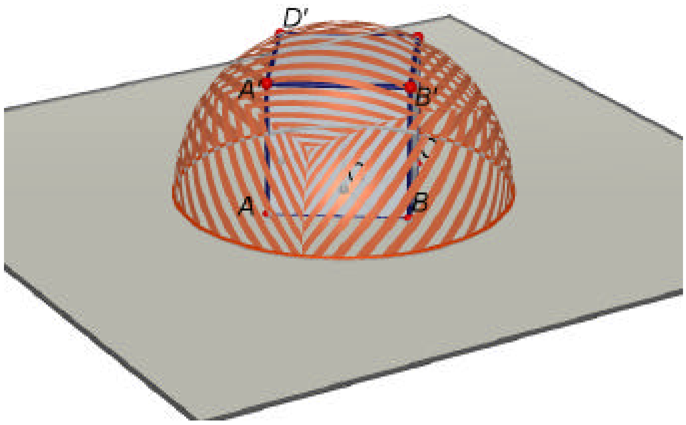
De tots els ortoedres de base quadrada inscrits en una semiesfera de radi R determineu les dimensions del que volum màxim. Calculeu aquest volum.

Gúsiev, 930.

Solució:

Siga la semiesfera de centre O i radi R.

Siga l'ortoedre ABCDA'B'C'D' de base quadrada ABCD, $\overline{AB}=a$ i altura $\overline{AA'}=h$



El volum de l'ortoedre és:

$V(a,h)=a^2h$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$:

$\overline{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAA'}$:

$R^2=h^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$.

$a^2=2R^2-2h^2$.

Aleshores, la funció a optimitzar és:

$V(h)=\left(2R^2-2h^2\right)h=2\left(-h^3+R^2h\right)$, $h\in[0,R]$. Derivant la funció:

$V'(h)=2\left(-3h^2+R^2\right)$.

$V'(h)=0$, $-3h^2+R^2=0$. Resolent l'equació: $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

$V''(h)=-12h$. $V''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R\right)=-4\sqrt{3}R<0$. Aleshores, $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ és un màxim relatiu estricte.

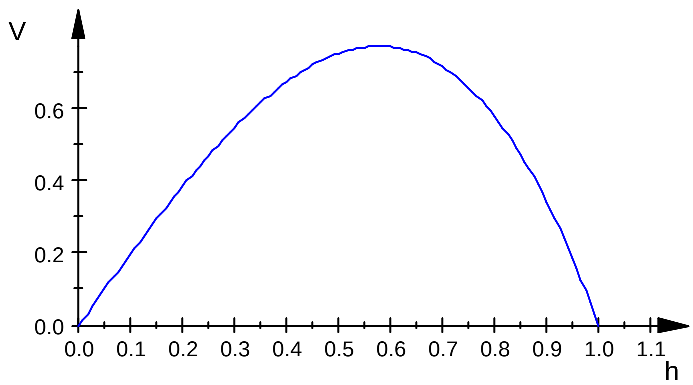
Les dimensions de l'ortoedre de base quadrada de volum màxim inscrit en una semiesfera té dimensions, aresta de la base $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ i $h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ altura. El volum màxim és $V_{màx}=a^2h=\frac{4}{3}R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3$.

La gràfica per a $R=1$, $V(h)=2\left(-h^3+h\right)$.

El màxim s'assoleix quan

$a=1.15$, $h=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.58$.

El volum màxim és $V=\frac{4\sqrt{3}}{9}\approx 0.7698$.



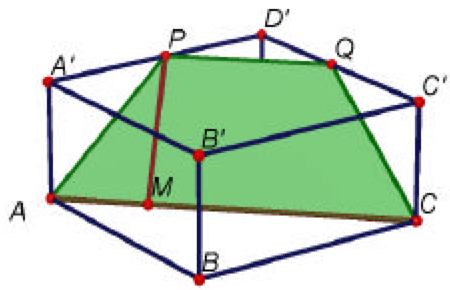
Problema 10
Per la diagonal de la base d'un prisma quadrangular regular es traça una secció que conté almenys un punt de l'altra base.

Determineu l'àrea màxima i mínima de la secció si les arestes del prisma són $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ i 2.
Gúsiev 929.

Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el prisma regular quadrangular, $\overline{AB}=\overline{BC}=3\sqrt{2}$ i $\overline{AA'}=2$.

Siga $\overline{AC}$ la diagonal de la base que realitzem la secció.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AC}=6$

Siga P de l'aresta $\overline{A'D'}$ i Q de la recta $\overline{C'D'}$ que formen la secció:

$\overline{A'P}=\overline{C'Q}=x$.

$\overline{PD'}=3\sqrt{2}-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PD'Q}$.

$\overline{PQ}=\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-x\right)=6-x\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AA'P}$

$\overline{AP}=\sqrt{2^2-x^2}$.

Siga M la projecció de P sobre la diagonal $\overline{AC}$.

$$\overline{AM}=\frac{\overline{AC}-\overline{PQ}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$

$$\overline{PM}=\sqrt{4-x^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}=\sqrt{\frac{8+x^2}{2}}.$$

La funció a optimitzar és:

$$S(x)=\frac{\overline{AC}+\overline{PQ}}{2}\overline{PM}=\frac{12-x\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{8+x^2}{2}}$$

$$S(x)=\frac{6\sqrt{2}-x}{2}\sqrt{8+x^2},\ x\in\left[0,3\sqrt{2}\right].$$ Derivem la funció:

$$S'(x)=\frac{-1}{2}\left(\sqrt{8+x^2}+\frac{x^2-6\sqrt{2}x}{\sqrt{8+x^2}}\right).$$

$S'(x)=0$. $\sqrt{8+x^2}+\dfrac{x^2-6\sqrt{2}x}{\sqrt{8+x^2}}=0$. Resolent l'equació:

$x=\sqrt{2}$, $x=2\sqrt{2}$

$S''\left(\sqrt{2}\right)>0$, aleshores, $x=\sqrt{2}$ és un mínim relatiu estricte.

$S''\left(2\sqrt{2}\right)<0$, aleshores, $x=2\sqrt{2}$ és un màxim relatiu estricte.

$$S\left(\sqrt{2}\right)=\frac{5\sqrt{20}}{2}\approx 11.18.$$

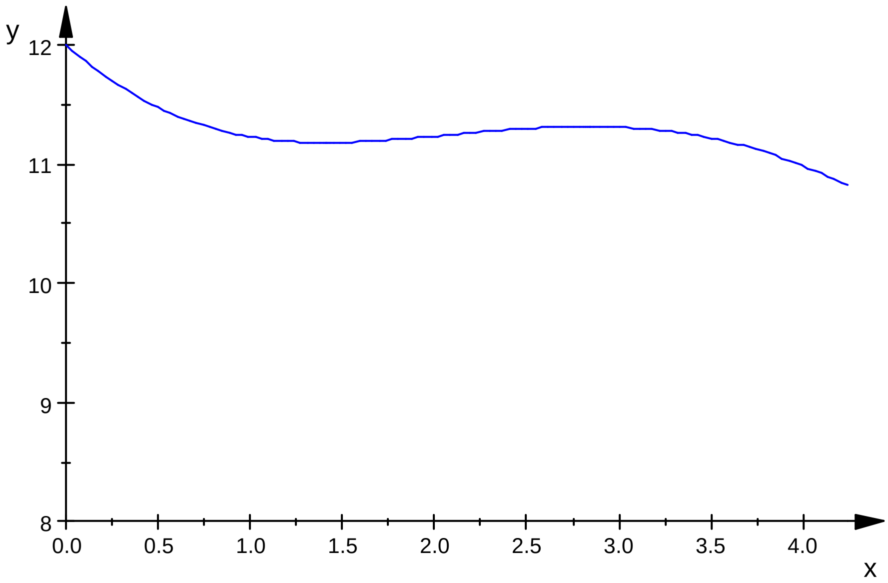
$S\left(2\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}\approx 11.31$.

$S(0)=12$.

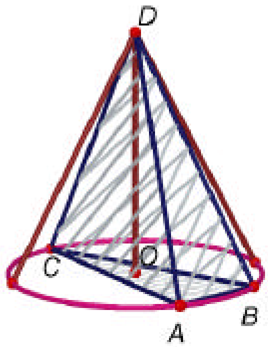
$S\left(3\sqrt{2}\right)=3\sqrt{13}\approx 10.82$.

El màxim s'assoleix quan $x=0$ i l'àrea màxima és $S(0)=12$.

El mínim s'assoleix quan $x=3\sqrt{2}$ i l'àrea mínima és $S\left(3\sqrt{2}\right)=3\sqrt{13}\approx 10.82$



Problema 11
Demostreu que de tots les piràmides que tenen per base un triangle isòsceles i que estan inscrites en un con de volum conegut, el volum màxim el té la piràmide regular (base un triangle equilàter).
Gúsiev 931.



Solució:
Siga el con de volum k constant.

De tots aquest considerem el que té radi R i altura $h = \frac{3k}{\pi R^2}$.

Siga la piràmide triangular recta ABCS de base $\overset{\Delta}{ABC}$,
$\overline{AC} = \overline{BC} = a$, $\overline{AB} = 2b$

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre la base $\overline{AB}$ és $\sqrt{a^2 - b^2}$.
Volem provar que la piràmide de volum màxima s'assoleix quan $a = 2b$.
La circumferència circumscrita a la base de la piràmide té radi R
Siga O el centre.
$\overline{OD}$ és perpendicular a la base del con.
L'àrea de la base de la piràmide és:

$$S_{ABC} = \frac{a^2 2b}{4R} = \frac{2b\sqrt{a^2 - b^2}}{2}.$$

Simplificant:

$$b^2 = a^2 - \frac{a^4}{4R^2}.$$

El volum de la piràmide és:

$$V(a,b) = \frac{a^2 b}{2R}h.$$

$V(a) = \frac{h}{4R^2}a^3\sqrt{4R^2 - a^2}$, $a \in [0, 2R]$. Derivem la funció respecte de a:

$$V'(a) = \frac{h}{4R^2}\frac{12R^2a^2 - 4a^4}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

$V'(a) = 0$, $12R^2a^2 - a^4 = 0$. Resolent l'equació:

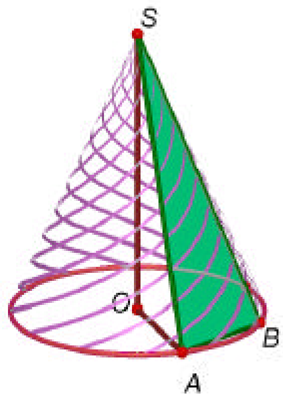
$a = R\sqrt{3}$.
$V''\left(R\sqrt{3}\right) < 0$. Aleshores, $a = R\sqrt{3}$ és un màxim relatiu.

Aleshores, el màxim s'assoleix quan $a = R\sqrt{3}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Aleshores, $a = 2b$. El triangle de la base és equilàter.
El volum màxim és:

$$V_{màx} = \frac{h}{4R^2}\left(R\sqrt{3}\right)^3\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2h = \frac{3k}{\pi}\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 12
Determineu l'àrea màxima de la secció d'un con que passa pel vèrtex si el radi de la base és R i l'altura és h.
Gúsiev, 932.

Solució:



Siga el con de centre de la base O, radi R i altura $\overline{OS} = h$

La secció és un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABS}$ on $\overline{AS} = \overline{BS} = g$, generatriu del con.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOA}$.

$g^2 = R^2 + h^2$.

Siga $\beta = \angle OSA$. $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Siga $\alpha = \angle ASB$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$ és:

$S(\alpha) = \frac{g^2}{2}\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\beta]$.

Distingirem dos casos:

a) Suposem que $\beta \geq \frac{\pi}{4}$.

El màxim de la funció $S(\alpha)$ s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{g^2}{2} = \frac{R^2 + h^2}{2}$.

b) Suposem que $\beta < \frac{\pi}{4}$.

El màxim de la funció $S(\alpha)$ s'assoleix quan $\alpha = 2\beta$.

$S(\beta) = \frac{g^2}{2}\sin 2\beta = \frac{g^2}{2} 2\sin\beta \cdot \cos\beta = g^2 \frac{R}{g}\frac{h}{g} = Rh$.

En aquest cas la corda $\overline{AB}$ de la circumferència base és un diàmetre.