Equacions, inequacions i sistemes d'equacions.
Selectivitat russa

1.- Resoleu la inequació:
$\log_3\left(2x^2+1\right)<2\log_9\left(x^2+5\right)$.
Selectivitat russa 1971 1. 2.

Solució:
El domini de les solucions és $\begin{cases}2x^2+1>0\\ x^2+5>0\end{cases}$, R.

$\log_3\left(2x^2+1\right)<2\log_9\left(x^2+5\right)$. Canvi de base:
$\log_3\left(2x^2+1\right)<\log_3\left(x^2+5\right)$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent en el seu domini:
$2x^2+1<x^2+5$.
$x^2-4<0$. Resolent la inequació:
$-2<x<2$.
$x\in\left]-2,2\right[$.

2.- Resoleu la inequació:
$\log_{1/3}^2 x+\log_3 x^3+2<0$.
Selectivitat russa 1971 2. 2.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$.

$(\log_{1/3} x)^2+\log_3 x^3+2<0$. Canvi de base:
$(-\log_3 x)^2+\log_3 x^3+2<0$. Logaritme d'una potència.
$(\log_3 x)^2+3\log_3 x+2<0$. Factoritzant l'equació:
$(\log_3 x+2)(\log_3 x+1)<0$. Aleshores:
$\begin{cases}\log_3 x+2>0\\ \log_3 x+1<0\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}\log_3 x+2<0\\ \log_3 x+1>0\end{cases}$.

Si $\begin{cases}\log_3 x+2>0\\ \log_3 x+1<0\end{cases}$, $\begin{cases}\log_3 x>-2=\log_3 3^{-2}\\ \log_3 x<-1=\log_3 3^{-1}\end{cases}$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent en el seu domini:
$\begin{cases}x>\dfrac{1}{9}\\ x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$, aleshores, $\dfrac{1}{9}<x<\dfrac{1}{3}$. $x\in\left]\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{3}\right[$.

Si $\begin{cases}\log_3 x+2<0\\ \log_3 x+1>0\end{cases}$, $\begin{cases}\log_3 x<-2=\log_3 3^{-2}\\ \log_3 x>-1=\log_3 3^{-1}\end{cases}$. $\begin{cases}x<\dfrac{1}{9}\\ x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$, aquest sistema no té solució.

3.- Resoleu la inequació:

$\log x^3 \cdot \log(100x) < \log x^3$.

Selectivitat russa 1972 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $x > 0$.

$\log x^3 \cdot \log(100x) < \log x^3$.

$\log x^3 (\log(100x) - 1) < 0$.

$\begin{cases} \log x^3 > 0 \\ \log(100x) - 1 < 0 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} \log x^3 < 0 \\ \log(100x) - 1 > 0 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} \log x^3 > 0 \\ \log(100x) - 1 < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \log x > 0 = \log 1 \\ \log 100x < 1 = \log 10 \end{cases}$. La funció $y = \log x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$\begin{cases} x > 1 \\ 100x < 10 \end{cases}$, que no té solució real.

Si $\begin{cases} \log x^3 < 0 \\ \log(100x) - 1 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \log x < 0 = \log 1 \\ \log 100x > 1 = \log 10 \end{cases}$. La funció $y = \log x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$\begin{cases} x < 1 \\ 100x > 10 \end{cases}$. $\begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{1}{10} \end{cases}$. $\frac{1}{10} < x < 1$. $x \in \left]\frac{1}{10}, 1\right[$.

4.- Resoleu la inequació:

$\log_2\left(2^{4x} + 2^{2x}\right) < 2\log_4 12$.

Selectivitat russa 1972 2. 2.

Solució:

El domini de les solucions és R ja que $2^{4x} + 2^{2x} > 0$.

$\log_2\left(2^{4x} + 2^{2x}\right) < 2\log_4 12$. Canvi de base:

$\log_2\left(2^{4x} + 2^{2x}\right) < \log_2 12$. La funció $y = \log_2 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$2^{4x} + 2^{2x} < 12$.

$2^{4x} + 2^{2x} - 12 < 0$.

Considerem la funció $a = 2^{2x}$ que és una funció estrictament creixent en R.

$\left(2^{2x}\right)^2 + 2^{2x} - 12 < 0$.

$a^2 + a - 12 < 0$. Resolent la inequació:

$a \in \left]-4, 3\right[$

$-4 < 2^{2x} < 3$.

$2^{2x} < 3$.

$2x < \log_2 3$.

$x < \frac{1}{2}\log_2 3$. $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\log_2 3\right[$.

5.- Resoleu l'equació:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}-128=0.$$

Selectivitat russa 1973 1. 2.

Solució:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}-128=0.$$

$2^{-6x}-2^{-3x+3}-128$.

Efectuem el canvi $a=2^{-3x}$, $a>0$:

$a^2-8a-128=0$. Resolent l'equació:

$a=16$.

Desfent el canvi:

$2^{-3x}=16=2^4$.

$-3x=4$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{-4}{3}$.

6.- Resoleu l'equació:

$$64^{\frac{1}{z}}-2^{3+\frac{3}{z}}+12=0.$$

Selectivitat russa 1973 2. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $z\neq 0$.

$$64^{\frac{1}{z}}-2^{3+\frac{3}{z}}+12=0.$$

$$\left(2^{\frac{3}{z}}\right)^2-8\cdot 2^{\frac{3}{z}}+12=0.$$

Efectuem el canvi $a=2^{\frac{3}{z}}$, $a>0$, $z\neq 0$:

$a^2-8a+12=0$. Resolent l'equació:

$a=6, 2$.

Desfent el canvi:

Si $a=6$, $2^{\frac{3}{z}}=6$, $\dfrac{3}{z}=\log_2 6$, aleshores, $z=\dfrac{3}{\log_2 6}$.

Si $a=2$, $2^{\frac{3}{z}}=2$, $\dfrac{3}{z}=1$, aleshores, $z=3$.

7.- Resoleu la inequació:

$3|x-1| > (x-1)^2 + 1$.

Selectivitat russa 1974 1. 2.

Solució:

Suposem $x-1 \geq 0$, $x \geq 1$, aleshores la inequació es transformaria:

$3(x-1) > (x-1)^2 + 1$.

$3x - 3 > x^2 - 2x + 2$.

$x^2 - 5x + 5 < 0$, $x \geq 1$. Resolent el sistema:

$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. $x \in \left]\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$.

Suposem que $x-1<0$, $x<1$, aleshores la inequació es transformaria:

$3(1-x) > (x-1)^2 + 1$.

$3 - 3x > x^2 - 2x + 2$.

$x^2 + x - 1 < 0$, $x < 1$. Resolent el sistema:

$\frac{-5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$. $x \in \left]\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right[$.

Aleshores, la solució de la inequació és: $x \in \left]\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$.

8.- Resoleu la inequació:

$|x| - 2 > (x-2)^2$.

Selectivitat russa 1974 2. 2.

Solució:

Suposem $x \geq 0$, aleshores la inequació es transformaria:

$x - 2 > (x-2)^2$.

$x - 2 > x^2 - 4x + 4$.

$x^2 - 5x + 6 < 0$, $x \geq 0$. Resolent el sistema:

$2 < x < 3$. $x \in]2, 3[$.

Suposem $x < 0$, aleshores la inequació es transformaria:

$2 - x > (x-2)^2$.

$-x - 2 > x^2 - 4x + 4$.

$x^2 - 3x + 6 < 0$, $x \geq 0$. Aquest sistema no té solució real:

9.- Resoleu l’equació:

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5(x+5)} = 3^{\log_{1/3}\left(2x^2+9x+13\right)}.$$

Selectivitat russa 1975 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+5>0 \\ 2x^2+9x+13>0 \end{cases}$, és a dir, $x>-5$.

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5(x+5)} = 3^{\log_{1/3}\left(2x^2+9x+13\right)}.$$

$5^{-2\log_5(x+5)} = 3^{\log_{1/3}\left(2x^2+9x+13\right)}$.

$5^{\log_5(x+5)^{-2}} = 3^{\log_{1/3}\left(2x^2+9x+13\right)}$. Canvi de base:

$5^{\log_5(x+5)^{-2}} = 3^{\log_3\left(2x^2+9x+13\right)^{-1}}$. Definició de logaritme:

$(x-5)^{-2} = \left(2x^2+9x+13\right)^{-1}$.

$$\frac{1}{(x+5)^2} = \frac{1}{2x^2+9x+13}.$$

$(x+5)^2 = 2x^2+9x+13$, $x>-5$.

$x^2-x-12=0$, $x>-5$. Resolent l’equació:

$x=4, -3$.

10.- Resoleu l’equació:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9\left(x^2+2x+4\right)} = 6^{\log_{1/6}(x+2)}.$$

Selectivitat russa 1975 2. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x^2+2x+4>0 \\ x+2>0 \end{cases}$, és a dir, $x>-2$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9\left(x^2+2x+4\right)} = 6^{\log_{1/6}(x+2)}.$$

$3^{-\log_9\left(x^2+2x+4\right)} = 6^{\log_{1/6}(x+2)}$. Canvi de base.

$3^{\log_3\left(x^2+2x+4\right)^{-1/2}} = 6^{\log_6(x+2)^{-1}}$. Definició de logaritme:

$\left(x^2+2x+4\right)^{-1/2} = (x+2)^{-1}$.

$\sqrt{x^2+2x+4} = x+2$. Resolent l’equació:

$x=0$.

11.- Resoleu la inequació:

$$\frac{3^x-2}{5x^2+22x-15}>0.$$

Selectivitat russa 1975 1. 3.

Solució:

$\frac{3^x-2}{5x^2+22x-15}>0$. Calculem el zeros del numerador i del denominador:

$3^x-2=0$, $x=\log_3 2$.

$53x^2+22x-15=0$, $x=-5, \frac{3}{5}$.

Notem que $-5<\frac{3}{5}<\log_3 2$.

Estudiant el signe de la fracció entre el intervals que determinen els zeros.

$x\in \left]-5, \frac{3}{5}\right[\cup \left]\log_3 2, +\infty\right[$.

12.- Resoleu la inequació:

$$\frac{3x^2-x-14}{5-2^x}>0.$$

Selectivitat russa 1975 2. 3.

Solució:

$\frac{3x^2-x-14}{5-2^x}>0$. Calculem el zeros del numerador i del denominador:

$3x^2-x-14=0$, $x=-6, \frac{7}{3}$.

$5-2^x=0$, $x=\log_2 5$.

Notem que $-6<\log_2 5<\frac{7}{3}$.

Estudiant el signe de la fracció entre el intervals que determinen els zeros.

$x\in \left]-6, \log_2 5\right[\cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$.

13.- Resoleu la inequació:

$\log_{\sqrt{3}}(4-x)<4+2\log_3(x+3)$.

Selectivitat russa 1976 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}4-x>0\\ x+3>0\end{cases}$, és a dir, $-3<x<4$.

$\log_{\sqrt{3}}(4-x)<4+2\log_3(x+3)$. Canvi de base:

$\log_3(4-x)^2<4+2\log_3(x+3)$.

$\log_3(4-x)^2 < \log_3 3^4 + \log_3(x+3)^2$.

$\log_3(4-x)^2 < \log_3\left(3^4\cdot(x+3)^2\right)$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$(4-x)^2 < 3^4\cdot(x+3)^2$, $-3<x<4$.

$80x^2+494x+715>0$, $-3<x<4$. Resolent el sistema:

$\frac{-23}{10}<x<4$. $x\in\left]\frac{-23}{10},4\right[$.

14.- Resoleu la inequació:

$1+2\log_4(2+3x)+\log_{1/2}(3-3x)>0$.

Selectivitat russa 1976 2. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}2+3x>0\\3-3x>0\end{cases}$, és a dir, $-\frac{2}{3}<x<1$.

$1+2\log_4(2+3x)+\log_{1/2}(3-3x)>0$. Canvi de base:

$\log_2 2+\log_2(2+3x)-\log_2(3-3x)>0$.

$\log_2\frac{2(2+3x)}{3-3x}>0=\log_2 1$. La funció $y=\log_2 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$\frac{2(2+3x)}{3-3x}>1$.

$\frac{4+6x}{3-3x}-1>0$.

$\frac{1+9x}{3-3x}>0$, $-\frac{2}{3}<x<1$. Resolent el sistema d'inequacions

$\frac{-1}{9}<x<1$. $x\in\left]\frac{-1}{9},1\right[$.

15.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases}2^{\frac{x-2y}{2}}+2^{\frac{x-2y}{4}}=20\\2^{\frac{x}{2}}+4^{\frac{-y}{2}}=10\end{cases}.$$

Selectivitat russa 1976 1. 3.

Solució:

Efectuem els canvis, $a=2^{\frac{x}{4}}$, $b=2^{\frac{-y}{2}}$, $a,b>0$.

$2^{\frac{x-2y}{2}}=\left(2^{\frac{x}{4}}\right)^2\left(2^{\frac{-y}{2}}\right)^2=a^2b^2$, $2^{\frac{x-2y}{4}}=2^{\frac{x}{4}}\cdot2^{\frac{-y}{2}}=ab$.

$2^{\frac{x}{2}}=\left(2^{\frac{x}{4}}\right)^2=a^2$, $4^{\frac{-y}{2}}=\left(2^{\frac{-y}{2}}\right)^2=b^2$.

El sistema inicial quedaria transformat amb aquest:

$$\begin{cases} a^2b^2 + ab = 20 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} (ab)^2 + ab = 20 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$. Resolent la primera equació en la incògnita ab>0, ja que, a>0, b>0:

$$\begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$. Resolent el sistema: $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{8} \end{cases}$, $\begin{cases} a = \sqrt{8} \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$.

Desfent el canvi:

Si $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{8} \end{cases}$, $\begin{cases} 2^{\frac{x}{4}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \\ 2^{\frac{-y}{2}} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}} \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} a = \sqrt{8} \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} 2^{\frac{x}{4}} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}} \\ 2^{\frac{-y}{2}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{-y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$. $\begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$.

16.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 7^x \cdot 7^y - 7^{\frac{x+y}{2}} = 42 \\ 7^x + 7^{y+1} = 56 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1976 2. 3.

Solució:

Efectuem els canvis, $a = 7^{\frac{x}{2}}$, $b = 7^{\frac{y}{2}}$, $a, b > 0$.

$$7^x = \left(7^{\frac{x}{2}}\right)^2 = a^2,\ 7^y = \left(7^{\frac{y}{2}}\right)^2 = b^2,\ 7^{\frac{x+y}{2}} = 7^{\frac{x}{2}} \cdot 7^{\frac{y}{2}} = ab,\ 7^{y+1} = \left(7^{\frac{y}{2}}\right)^2 \cdot 7 = 7b^2.$$

El sistema inicial quedaria transformat amb aquest:

$$\begin{cases} a^2b^2 - ab = 43 \\ a^2 + 7b^2 = 56 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} (ab)^2 - ab = 42 \\ a^2 + 7b^2 = 56 \end{cases}$$. Resolent la primera equació en la incògnita ab>0, ja que, a>0, b>0:

$$\begin{cases} ab = 7 \\ a^2 + 7b^2 = 56 \end{cases}$$. Resolent el sistema: $\begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{7} \end{cases}$, $\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{7} \end{cases}$, $\begin{cases} 7^{\frac{x}{2}} = \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}} \\ 7^{\frac{y}{2}} = \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}} \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 7^{\frac{x}{2}} = 7 = 7^1 \\ 7^{\frac{y}{2}} = 1 = 7^0 \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x}{2} = 1 \\ \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

17.- Determineu els valors del paràmetre c a fi que el sistema $\begin{cases} x+7y=c \\ 2x-y=5 \end{cases}$ i la inequació $x>y-2$ tinguen solució.
Selectivitat russa 1977 1. 2.

Solució:
Resolent el sistema $\begin{cases} x+7y=c \\ 2x-y=5 \end{cases}$.

$\begin{cases} x=\dfrac{c+35}{15} \\ y=\dfrac{2c-5}{15} \end{cases}$. Substituïm els valors de les incògnites en la inequació:

$\dfrac{c+35}{15}>\dfrac{2c-5}{15}-2$. Resolent la inequació de primer grau:
$c<70$. $c\in\left]-\infty,70\right[$.

18.- Determineu els valors del paràmetre a a fi que el sistema $\begin{cases} x-2y=2a \\ 3x+5y=4 \end{cases}$ i la inequació $x+y>0$ tinguen solució.
Selectivitat russa 1977 2. 2.

Solució:
Resolent el sistema $\begin{cases} x-2y=2a \\ 3x+5y=4 \end{cases}$.

$\begin{cases} x=\dfrac{10a+8}{11} \\ y=\dfrac{4-6a}{11} \end{cases}$. Substituïm els valors de les incògnites en la inequació:

$\dfrac{10a+8}{11}+\dfrac{4-6a}{11}>0$. Resolent la inequació de primer grau:
$a>-3$. $a\in\left]-3,+\infty\right[$.

19.- Resoleu la inequació:
$\log_x\left(\dfrac{1}{4}\right)+\log_4\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq -2$.
Selectivitat russa 1977 1. 3.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$, $x\neq 1$.
$x=4$ és solució de l'equació ja que $\log_4\left(\dfrac{1}{4}\right)+\log_4\left(\dfrac{1}{4}\right)=-2$.

$\log_x\left(\dfrac{1}{4}\right)+\log_4\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq -2$. Canvi de base:

$$\frac{\log_4\left(\frac{1}{4}\right)}{\log_4 x}+\log_4\left(\frac{1}{x}\right)\le -2.$$

$\frac{-1}{\log_4 x}-\log_4 x \le -2$. Efectuant el canvi, $a=\log_4 x$, $a \ne 4$:

$\frac{-1}{a}-a\le -2$.

$\frac{-1}{a}-a+2\le 0$.

$\frac{-a^2+2a-1}{a}<0$. El numerador és negatiu per a tot a:

Aleshores, $a>0$.

$\log_4 x>0=\log_4 1$. La funció $y=\log_4 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$x>1$. $x\in \left]1,+\infty\right[$.

20.- Resoleu la inequació:

$\log_x 3-4\ge 4\log_{1/3} x$.

Selectivitat russa 1977 2. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x>0$, $x\ne 1$.

$x=3$ és solució de l'equació ja que $\log_3 3-4=\log_{1/3} 3$.

$\log_x 3-4\ge 4\log_{1/3} x$. Canvi de base:

$\frac{\log_3 3}{\log_3 x}-4\ge 4\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}}$.

$\frac{1}{\log_3 x}-4\ge -4\log_3 x$. Efectuant el canvi, $a=\log_4 x$, $a\ne 4$:

$\frac{1}{a}-4\ge -4a$.

$\frac{1}{a}-4+4a\ge 0$.

$\frac{4a^2-4a+1}{a}>0$. El numerador és positiu per a tot a:

Aleshores, $a>0$.

$\log_3 x>0=\log_3 1$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$x>1$. $x\in \left]1,+\infty\right[$.

21.- Resoleu la inequació:

$\frac{3}{2-x}>\frac{1}{x+3}$.

Selectivitat russa 1978 1. 3.

Solució:

$\frac{3}{2-x}>\frac{1}{x+3}$.

$\frac{3}{2-x}-\frac{1}{x+3}>0$.

$\frac{4x+7}{(2-x)(x+3)}>0$.

Els zeros del numerador i denominadors són: $x=-3, \frac{-7}{4}, 2$.

Estudiant el signe de la fracció en cadascun dels intervals que determinen els tres zeros la solució és:

$x\in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]\frac{-7}{4}, 2\right[$.

22.- Resoleu la inequació:

$\frac{3}{x+3}<\frac{1}{2x-1}$.

Selectivitat russa 1978 2. 3.

Solució:

$\frac{3}{x+3}<\frac{1}{2x-1}$.

$\frac{3}{x+3}-\frac{1}{2x-1}<0$.

$\frac{3x-5}{(x+3)(2x-1)}>0$.

Els zeros del numerador i denominadors són: $x=-3, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}$.

Estudiant el signe de la fracció en cadascun dels intervals que determinen els tres zeros la solució és:

$x\in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right[$.

23.- Resoleu l'equació:

$\log_2\left(2^x-7\right)=3-x$.

Selectivitat russa 1978 1. 4.

Solució:

El domini de les solucions és $2^x-7>0$. $x>\log_2 7$.

$\log_2\left(2^x-7\right)=3-x$. Definició de logaritme:

$2^x-7=2^{3-x}$.

$2^x-7=8\frac{1}{2^x}$.

Efectuant el canvi $a=2^x$, $a>0$:

$a-7=\frac{8}{a}$. Resolent l'equació:

$a=8$.

Desfent el canvi:
$2^x = 8 = 2^3$.
$x = 3$, la solució és vàlida ja que $3 = \log_2 8 > \log_2 7$.

24.- Resoleu l'equació:
$\log_6\left(5 + 6^{-x}\right) = x + 1$.
Selectivitat russa 1978 2. 4.

Solució:
El domini de les solucions és R ja que $5 + 6^x > 0$, $\forall x \in R$.

$\log_6\left(5 + 6^{-x}\right) = x + 1$. Definició de logaritme:
$5 - 6^{-x} = 6^{x+1}$.
$5 - \dfrac{1}{6^x} = 6 \cdot 6^x$.
Efectuant el canvi $a = 6^x$, $a > 0$:
$5 + \dfrac{1}{a} = 6a$. Resolent l'equació:
$a = 1$.
Desfent el canvi:
$6^x = 1 = 6^0$.
$x = 0$.

25.- Resoleu el sistema d'equacions:
$\begin{cases} 7^{x+1} \cdot 2^y = 4 \\ y - x = 3 \end{cases}$.
Selectivitat russa 1979 1. 3.

Solució:
$\begin{cases} 7^{x+1} \cdot 2^y = 4 \\ y - x = 3 \end{cases}$. Aïllem la incògnita y:
$\begin{cases} 7^{x+1} \cdot 2^y = 4 \\ y = 3 + x \end{cases}$. Substituïm:
$\begin{cases} 7^{x+1} \cdot 2^{3+x} = 4 \\ y = 3 + x \end{cases}$.
$\begin{cases} 7^{x+1} \cdot 2^2 \cdot 2^{x+1} = 4 \\ y = 3 + x \end{cases}$. Propietat de potències:
$\begin{cases} 14^{x+1} = 1 = 14^0 \\ y = 3 + x \end{cases}$.
$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y = 3 + x \end{cases}$. Aleshores, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

26.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \cdot 5^y = 75 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1979 2. 3.

Solució:

$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \cdot 5^y = 75 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Aïllem la incògnita y:

$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \cdot 5^y = 75 \\ y = 1 - x \end{cases}$. Substituïm:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \cdot 5^{1-x} = 75 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$\begin{cases} 3^{-x} \cdot 5 \cdot 5^{-x} = 75 \\ y = 1 - x \end{cases}$. . Propietat de potències:

$$\begin{cases} 15^{-x} = 15 = 15^1 \\ y = 1 - x \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -x = 1 \\ y = 1 - x \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

27.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{x^2 - x - 2} > x - 1$.

Selectivitat russa 1979 1. 4.

Solució:

El domini de les solucions és $x^2 - x - 2 \geq 0$, $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[2, +\infty\right[$.

$\sqrt{x^2 - x - 2} > x - 1$

Suposem que $x - 1 \geq 0$. Elevant al quadrat (les dues parts de la inequació són positives):

$x^2 - x - 2 > (x-1)^2$.

$x > 3$. $x \in \left]3, +\infty\right[$.

Suposem que $x - 1 < 0$. Aleshores:

$\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$. Elevant al quadrat:

$x^2 - x - 2 > 0$, $x < 1$. Resolent el sistema:

$x < -1$, $x \in \left]-\infty, -1\right[$. La solució de la inequació és: $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$.

28.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{x^2+2x-3} > x$.

Selectivitat russa 1979 2. 4.

Solució:

El domini de les solucions és $x^2+2x-3 \geq 0$, $x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

$\sqrt{x^2+2x-3} > x$

Suposem que $x \geq 0$. Elevant al quadrat (les dues parts de la inequació són positives):

$x^2+2x-3 > x^2$.

$x > \frac{3}{2}$. $x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

Suposem que $x < 0$. Aleshores:

$\sqrt{x^2+2x-3} > 0$. Elevant al quadrat:

$x^2+2x-3 > 0$, $x < 0$. Resolent el sistema:

$x < -3$, $x \in \left]-\infty, -3\right[$. La solució de la inequació és: $x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

29.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} + x = 1 \\ \frac{x}{x-y} = -2 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1980 1. 2.

Solució:

Notem que $x - y \neq 0$, és a dir, $x \neq y$.

$\begin{cases} \frac{1}{x-y} + x = 1 \\ \frac{x}{x-y} = -2 \end{cases}$. Efectuem el canvi $a = \frac{1}{x-y}$:

$\begin{cases} a + x = 1 \\ ax = -2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a = -1 \\ x = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 2 \\ x = -1 \end{cases}$. Desfent el canvi:

Si $\begin{cases} a = -1 \\ x = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{1}{x-y} = -1 \\ x = 2 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} a = 2 \\ x = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 2 \\ x = -1 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{-3}{2} \end{cases}$.

30.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}+y=2 \\ \dfrac{y}{x+2y}=-3 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1980 2. 2.

Solució:
Notem que $x+2y\neq 0$, és a dir, $x\neq -2y$.

$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}+y=2 \\ \dfrac{y}{x+2y}=-3 \end{cases}$. Efectuem el canvi $a=\dfrac{1}{x+2y}$:

$\begin{cases} a+y=2 \\ ay=-3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a=-1 \\ y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=3 \\ y=-1 \end{cases}$. Desfent el canvi:

Si $\begin{cases} a=-1 \\ y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}=-1 \\ y=3 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=-7 \\ y=3 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} a=3 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}=3 \\ y=-1 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=-1 \end{cases}$.

31.- Resoleu l'equació:

$4\sqrt{\log_7 x}-\log_7(7x)-2=0$.

Selectivitat russa 1980 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x>0 \\ \log_7 x\geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x\geq 1$.

$4\sqrt{\log_7 x}-\log_7(7x)-2=0$. Logaritme del producte:

$4\sqrt{\log_7 x}-(1+\log_7 x)-2=0$.

$4\sqrt{\log_7 x}-\log_7 x-3=0$.

Efectuant el canvi $a=\sqrt{\log_7 x}$, $a>0, x\geq 1$.

$4a-a^2-3=0$. Resolent l'equació:
$a=1, 3$.

Si $a=1$, $\sqrt{\log_7 x}=1$, $\log_7 x=1=\log_7 7$. Aleshores, $x=7$.

Si $a=3$, $\sqrt{\log_7 x}=3$, $\log_7 x=9=\log_7 7^9$. Aleshores, $x=7^9$.

32.- Resoleu l'equació:

$5\sqrt{\log_3 x}-\log_3(9x)-4=0$.

Selectivitat russa 1980 2. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x>0 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x \geq 1$.

$5\sqrt{\log_3 x}-\log_3(9x)-4=0$. Logaritme del producte:

$5\sqrt{\log_3 x}-(2+\log_3 x)-4=0$.

$5\sqrt{\log_3 x}-\log_3 x-6=0$.

Efectuant el canvi $a=\sqrt{\log_3 x}$, $a>0, x\geq 1$.

$5a-a^2-6=0$. Resolent l'equació:

$a=2, 3$.

Si $a=2$, $\sqrt{\log_3 x}=2$, $\log_3 x=2=\log_3 3^2$. Aleshores, $x=3^2$.

Si $a=3$, $\sqrt{\log_3 x}=3$, $\log_3 x=9=\log_3 3^9$. Aleshores, $x=3^9$.

33.- Resoleu la inequació:

$3^{x+2}>\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Selectivitat russa 1980 1. 4.

Solució:

El domini de les solucions és $x \neq 0$.

$3^{x+2}>\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$3^{x+2}>3^{\frac{-2}{x}}$. La funció $y=3^x$ és estrictament creixent:

$x+2>\frac{-2}{x}$.

$x+2+\frac{2}{x}>0$.

$\frac{x^2+2x+2}{x}>0$. El numerador és positiu, aleshores:

$x>0$. $x\in\,]0,+\infty[$.

34.- Resoleu la inequació:

$$7^{x+1} > \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Selectivitat russa 1980 2. 4.

Solució:
El domini de les solucions és $x \neq 0$.

$$7^{x+1} > \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$7^{x+1} > 7^{\frac{-2}{x}}$. La funció $y = 7^x$ és estrictament creixent:

$$x+1 > \frac{-2}{x}.$$

$$x+1+\frac{2}{x} > 0.$$

$\dfrac{x^2+1x+2}{x} > 0$. El numerador és positiu, aleshores:

$x > 0$. $x \in \left]0, +\infty\right[$.

35.- Determineu els valors del paràmetre m a fi que el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = m \\ x+2y = 1 \end{cases}$ tinga solució única.

Selectivitat russa 1981 1. 2.

Solució:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = m \\ x+2y = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} (1-2y)^2 - y^2 = m \\ x = 1-2y \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 3y^2 - 4y + 1 - m = 0 \\ x = 1-2y \end{cases}.$$

Perquè la primera equació del sistema tinga solució el seu discriminant ha de ser zero:
$(-4)^2 - 4\cdot 3(1-m) = 0$. Resolent l'equació:

$$m = \frac{-1}{3}.$$

36.- Determineu els valors del paràmetre p a fi que el sistema $\begin{cases} x+py=1 \\ px+y=1 \end{cases}$ tinga solució única.
Selectivitat russa 1981 2. 2.

Solució 1:
$\begin{cases} x+py=1 \\ px+y=1 \end{cases}$.
$\begin{cases} x=1-py \\ p(1-py)+y=1 \end{cases}$
$\begin{cases} x=1-py \\ \left(-p^2+1\right)y=1-p \end{cases}$.
$\begin{cases} x=1-py \\ y=\dfrac{1-p}{(1+p)(1-p)} \end{cases}$
Si $p\neq -1,1$ el sistema és compatible determinat.
Si $p=1$ el sistema té infinites solucions.
Si $p\neq -1$ el sistema no té solució.

Solució 2:
Efectuarem un estudi utilitzant el teorema de Rouché-Frobenius:
La matriu de coeficient és $A=\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix}$, la matriu ampliada és $A'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{array}\right)$.
$|A|=1-p^2$.
$|A|\neq 0$ i $1-p^2\neq 0$, és a dir si $p\neq -1,1$.
En aquest cas $\text{rangA}=\text{rangA}'=2=\text{núm. incògnites}$, aleshores, el sistema és compatible determinat.
Si $p=1$, $\text{ranA}=\text{rangA}'=1<\text{núm. incògnites}$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $p=-1$, $\text{ranA}=1, \text{rangA}'=2$, aleshores el sistema és incompatible.

37.- Resoleu l'equació:
$4^{x-1}=3+2^{x-2}$.
Selectivitat russa 1981 1. 3.

Solució:
$4^{x-1}=3+2^{x-2}$.
$\dfrac{1}{4}\left(2^x\right)^2=3+\dfrac{1}{4}2^x$.
Efectuant el canvi $a=2^x$, $a>0$.
$\dfrac{1}{4}a^2=3+\dfrac{1}{4}a$. Resolent l'equació:
$a=4$. Desfent el canvi:
$2^x=4=2^2$. Aleshores, $x=2$.

38.- Resoleu l'equació:

$$\frac{16^x}{10^{2x}} - 4 = 3(0'4)^x.$$

Selectivitat russa 1981 2. 3.

Solució:

$$\frac{16^x}{10^{2x}} - 4 = 3(0'4)^x.$$

$$\frac{16^x}{100^x} - 4 = 3(0'4)^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 4 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x.$$

Efectuant el canvi $a = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, $a > 0$.

$a^2 - 4 = 3a$. Resolent l'equació:
$a = 4$. Desfent el canvi:

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 4$. Aleshores, $x = \log_{2/5} 4$.

39.- Resoleu la inequació:

$$\log_{1/2}\left(2^{\frac{1}{x+1}}\right) > 0.$$

Selectivitat russa 1981 1. 4.

Solució:
El domini de les solucions és $x \neq -1$.

$\log_{1/2}\left(2^{\frac{1}{x+1}}\right) > 0 = \log_{1/2} 1$. La funció $y = \log_{1/2} x$ és monòtona estrictament decreixent:

$2^{\frac{1}{x+1}} < 1 = 2^0$. La funció $y = 2^x$ és monòtona estrictament creixent:

$\frac{1}{x+1} < 0$. Aleshores:
$x < -1$. $x \in \left]-\infty, -1\right[$.

40.- Resoleu la inequació:
$\log_{1/3}(\log_5 x) > 0$.
Selectivitat russa 1981 2. 4.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x > 0 \\ \log_5 x > 0 \end{cases}$. $x > 1$

$\log_{1/3}(\log_5 x) > 0 = \log_{1/3} 1$. La funció $y = \log_{1/3} x$ és monòtona estrictament decreixent:
$\log_5 x < 1 = \log_5 5$. La funció $y = \log_5 x$ és monòtona estrictament creixent:
$x < 5$. Aleshores:
$1 < x < 5$. $x \in \left]1, 5\right[$.

41.- Determineu els valors de m en la solució de l'equació
$5x - 18m = 21 - 5mx - m$, que siguen majors que 3.
Selectivitat russa 1982 1. 2.

Solució:
$5x - 18m = 21 - 5mx - m$.
$(5 + 5m)x = 17m + 21$.
$x = \dfrac{17m + 21}{5 + 5m}$.
$\dfrac{17m + 21}{5 + 5m} > 3$. $\dfrac{17m + 21}{5 + 5m} - 3 > 0$.
$\dfrac{2m + 6}{5 + 5m} > 0$.
Els zeros del numerador i denominador són $m = -3, -1$.
Calculant el signe de la fracció en cadascun dels intervals que determinen els zeros:
$m \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$.

42.- Determineu els valors de a en la solució de l'equació
$15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$, que siguen menors que 3.
Selectivitat russa 1982 2. 2.

Solució:
$15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$.
$x = \dfrac{13a + 2}{15 + 3a}$.
$\dfrac{13a + 2}{15 + 3a} < 2$. $\dfrac{13a + 2}{15 + 3a} - 2 < 0$.
$\dfrac{7a - 28}{15 + 3a} < 0$.
Els zeros del numerador i denominador són $a = -5, 4$.
Calculant el signe de la fracció en cadascun dels intervals que determinen els zeros:
$a \in \left]-5, 4\right[$.

43.- Si $\log_n m = \sqrt{13}$, calculeu el valor de $\log_{m/n} \sqrt[3]{m^2 n}$

Selectivitat russa 1982 1. 3.

Solució:

Efectuant el canvi de base:

$$\log_{m/n} \sqrt[3]{m^2 n} = \frac{\log_n \sqrt[3]{m^2 n}}{\log_n \frac{m}{n}} = \qquad \text{(propietats de logaritmes)}$$

$$= \frac{\log_n m^{2/3} + \log_n n^{1/3}}{\log_n m - \log_n n} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\sqrt{13} + \frac{1}{3}}{\sqrt{13} - 1} = \frac{9 + \sqrt{13}}{12}.$$

44.- Si $\log_a b = \sqrt{7}$, calculeu el valor de $\log_{a\sqrt{b}} \left(\frac{a}{\sqrt{b^3}} \right)$

Selectivitat russa 1982 2. 3.

Solució:

Efectuant el canvi de base:

$$\log_{a\sqrt{b}} \left(\frac{a}{\sqrt{b^3}} \right) = \frac{\log_a \left(\frac{a}{\sqrt{b^3}} \right)}{\log_a \left(a\sqrt{b} \right)} \qquad \text{(propietats de logaritmes)}$$

$$= \frac{\log_a a - \log_a b^{3/2}}{\log_a a + \log_a b^{1/2}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{2}\sqrt{7}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}} = \frac{-25 + \sqrt{7}}{3}.$$

45.- Resoleu la inequació:

$2^{x+3} - 5^x < 7 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-1}$.

Selectivitat russa 1982 1. 4.

Solució:

$2^{x+3} - 5^x < 7 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-1}$.

$8 \cdot 2^x - 5^x < \frac{7}{4} \cdot 2^x - \frac{3}{5} \cdot 5^x$.

$\frac{25}{4} 2^x < \frac{2}{5} \cdot 5^x$, com que $5^x > 0$.

$\left(\frac{2}{5} \right)^x < \left(\frac{2}{5} \right)^3$. Com que la funció $y = \left(\frac{2}{5} \right)^x$ és estrictament decreixent:

$x > 3$. $x \in \left] 3, +\infty \right[$.

46.- Resoleu la inequació:

$3^{x+2}+7^{x}<4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1}$.

Selectivitat russa 1982 2. 4.

Solució:

$3^{x+2}+7^{x}<4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1}$.

$9\cdot 3^{x}+7^{x}<\frac{4}{7}\cdot 7^{x}+\frac{34}{3}\cdot 3^{x}$.

$\frac{-7}{3}3^{x}<\frac{-3}{7}\cdot 7^{x}$.

$\frac{7}{3}3^{x}>\frac{3}{7}\cdot 7^{x}$ com que $7^{x}>0$.

$\left(\frac{3}{7}\right)^{x}>\left(\frac{3}{7}\right)^{2}$. Com que la funció $y=\left(\frac{3}{7}\right)^{x}$ és estrictament decreixent:

$x<2$. $x\in\left]-\infty,2\right[$.

47.- Resoleu l'equació:

$\left|3x^{2}-20\right|=7$.

Selectivitat russa 1983 1. 2.

Solució:

$\left|3x^{2}-20\right|=7$.

$3x^{2}-20=7$, o bé, $3x^{2}-20=-7$.

Si $3x^{2}-20=7$, resolent l'equació, $x=-3,3$.

Si $3x^{2}-20=-7$, resolent l'equació, $x=-\sqrt{\frac{13}{3}},\sqrt{\frac{13}{3}}$.

48.- Resoleu l'equació:

$\left|12-x^{2}\right|=4$.

Selectivitat russa 1983 2. 2.

Solució:

$12-x^{2}=4$, o bé, $12-x^{2}=-4$.

Si $12-x^{2}=4$, resolent l'equació, $x=-2\sqrt{2},2\sqrt{2}$.

Si $12-x^{2}=-4$, resolent l'equació, $x=-4,4$.

49.- Resoleu la inequació:

$$\frac{5}{2}\log_5 \sqrt[5]{x} - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{5}} x > 1.$$

Selectivitat russa 1983 1. 3.

Solució:
El domini de les solucions és $x > 0$.

$\frac{5}{2}\log_5 \sqrt[5]{x} - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{5}} x > 1$. Canvi de base:

$$\frac{5}{2}\frac{1}{5}\log_5 x - \frac{1}{3}\frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} > 1.$$

$$\frac{1}{2}\log_5 x - \frac{2}{3}\log_5 x > 1.$$

$$-\frac{1}{6}\log_5 x > 1.$$

$\log_5 x < -6 = \log_5 5^{-6}$, $x > 0$. La funció $y = \log_5 x$ és monòtona estrictament creixent:

$0 < x < 5^{-6}$. $x \in \left]0, \frac{1}{5^6}\right[$.

50.- Resoleu la inequació:

$$\log_7 \sqrt{x} - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}} x > 2.$$

Selectivitat russa 1983 2. 3.

Solució:
El domini de les solucions és $x > 0$.

$\log_7 \sqrt{x} - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}} x > 2$. Canvi de base:

$$\frac{1}{2}\log_7 x - \frac{1}{2}\frac{\log_7 x}{\log_7 \sqrt{7}} > 2.$$

$$\frac{1}{2}\log_7 x - \log_7 x > 2.$$

$$-\frac{1}{2}\log_7 x > 2.$$

$\log_7 x < -4 = \log_7 7^{-4}$, $x > 0$. La funció $y = \log_7 x$ és monòtona estrictament creixent:

$0 < x < 7^{-4}$. $x \in \left]0, \frac{1}{7^4}\right[$.

51.- Resoleu l'equació:
$2\log_7(49x)+4(\log_{49}x)^2=19$.
Selectivitat russa 1984 1. 2.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$.

$2\log_7(49x)+4(\log_{49}x)^2=19$. Canvi de base:
$$2(\log_7 49+\log_7 x)+4\left(\frac{\log_7 x}{\log_7 49}\right)^2=19.$$
$2(2+\log_7 x)+4(\log_7 x)^2=19$.
Efectuem el canvi $a=\log_7 x$:
$2(2+a)+a^2=19$. Resolent l'equació:
$a=-5,3$.
Si $a=-5$, $\log_7 x=-5$, aleshores, $x=7^{-5}$.
Si $a=3$, $\log_7 x=3$, aleshores, $x=7^3$.

52.- Resoleu l'equació:
$(2\log_{49}x)\cdot\log_7 7x=3-\log_7 x$.
Selectivitat russa 1984 2. 2.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$.

$(2\log_{49}x)\cdot\log_7 7x=3-\log_7 x$. Canvi de base:
$$\left(2\frac{\log_7 x}{\log_7 49}\right)\cdot(\log_7 7+\log_7 x)=3-\log_7 x.$$
$\log_7 x\cdot(1+\log_7 x)=3-\log_7 x$
Efectuem el canvi $a=\log_7 x$:
$a(1+a)=3-a$. Resolent l'equació:
$a=-3,1$.
Si $a=-3$, $\log_7 x=-3$, aleshores, $x=7^{-3}$.
Si $a=1$, $\log_7 x=1$, aleshores, $x=7$.

53.- Resoleu la inequació:
$27+x^3\cdot 3^x\geq 3^{x+3}+x^3$.
Selectivitat russa 1984 1. 3.

Solució:
$27+x^3\cdot 3^x\geq 3^{x+3}+x^3$.
$27+x^3\cdot 3^x\geq 27\cdot 3^x+x^3$.
$27-x^3+x^3\cdot 3^x-27\cdot 3^x\geq 0$.

$\left(3^x-1\right)\left(x^3-27\right)\geq 0$.

$\begin{cases}3^x-1\geq 0\\ x^3-27\geq 0\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}3^x-1\leq 0\\ x^3-27\leq 0\end{cases}$

Si $\begin{cases}3^x-1\geq 0\\ x^3-27\geq 0\end{cases}$, $\begin{cases}3^x\geq 1=3^0\\ x\geq 3\end{cases}$, la solució és $x\geq 3$.

Si $\begin{cases}3^x-1\leq 0\\ x^3-27\leq 0\end{cases}$, $\begin{cases}3^x\leq 1\\ x^3\leq 27\end{cases}$, la solució és $x\leq 0$.

La solució de la inequació és la unió de les dues solucions:

$x\in\left]-\infty,0\right]\cup\left[3,+\infty\right[$.

54.- Resoleu la inequació:

$2^{x+2}+2x^2\leq x^2\cdot 2^x+8$.

Selectivitat russa 1984 2. 3.

Solució:

$2^{x+2}+2x^2\leq x^2\cdot 2^x+8$.

$4\cdot 2^x+2x^2\leq x^2\cdot 2^x+8$.

$2^x\left(4-x^2\right)+2x^2-8\leq 0$.

$\left(2^x-2\right)\left(4-x^2\right)\leq 0$.

$\begin{cases}2^x-2\geq 0\\ 4-x^2\geq 0\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}2^x-2\leq 0\\ 4-x^2\leq 0\end{cases}$.

Si $\begin{cases}2^x-2\geq 0\\ 4-x^2\leq 0\end{cases}$, $\begin{cases}2^x\geq 2\\ 4-x^2\leq 0\end{cases}$, la solució és $x\geq 2$.

Si $\begin{cases}2^x-2\leq 0\\ 4-x^2\geq 0\end{cases}$, $\begin{cases}2^x\leq 2\\ 4-x^2\geq 0\end{cases}$, la solució és $-2\leq x\leq 1$.

La solució de la inequació és la unió de les dues solucions:

$x\in\left]-2,1\right]\cup\left[2,+\infty\right[$.

55.- Determineu els valors de a tal que les solucions de l'equació $4\left|x-3a\right|+6a-24+x=0$ pertanyen a l'interval $\left[6,12\right]$.

Selectivitat russa 1984 1. 4.

Solució:

Si $x-3a\geq 0$, $x\geq 3a$, l'equació es transformaria:

$4(x-3a)+6a-24+x=0$.

$4x-12a+6a-24+x=0$.

$x=\dfrac{6a+24}{5}$, $x\geq 3a$. $\dfrac{6a+24}{5}\geq 3a$.

$$\begin{cases} 6 \le \dfrac{6a+24}{5} \le 12 \\ \dfrac{6a+24}{5} \ge 3a \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 30 \le 6a+24 \le 60 \\ 6a+24 \ge 15a \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 6 \le 6a \le 12 \\ 24 \ge 9a \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a \ge 1 \\ a \le 2 \\ a \le \dfrac{8}{3} \end{cases} \text{, la solució és: } a \in \left[1, \frac{8}{3}\right].$$

Si $x-3a \le 0$, $x \le 3a$, l'equació es transformaria:

$4(-x+3a)+6a-24+x=0$.

$-4x+12a+6a-24+x=0$.

$x=-8+6a$, $x \le 3a$. $-8+6a \le 3a$.

$$\begin{cases} 6 \le -8+6a \le 12 \\ -8+6a \le 3a \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 14 \le 6a \le 20 \\ 3a \le 8 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a \ge \dfrac{7}{3} \\ a \le \dfrac{10}{3} \\ a \le \dfrac{8}{3} \end{cases} \text{. la solució és: } a \in \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right].$$

La solució de la inequació és la intersecció de les dues solucions:

$a \in \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right]$.

56.- Determineu els valors de a tal que les solucions de l'equació $2|2x-a|+a+2x-8=0$ pertanyen a l'interval $[1, 4]$.

Selectivitat russa 1984 2. 4.

Solució:

Si $2x-a \ge 0$, $x \ge \frac{a}{2}$, l'equació es transformaria:

$2(2x-a)+a+2x-8=0$.

$4x-2a+a+2x-8=0$.

$x=\frac{8+a}{6}$, $x \ge \frac{a}{2}$. $\frac{8+a}{6} \ge \frac{a}{2}$.

$$\begin{cases} 1 \le \dfrac{8+a}{6} \le 4 \\ \dfrac{8+a}{6} \ge \dfrac{a}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 6 \le 8+a \le 24 \\ 8+a \ge 3a \end{cases}.$$

$\begin{cases} -2 \le a \le 16 \\ a \le 4 \end{cases}$. La solució és: $a \in [-2, 4]$.

Si $2x-a \le 0$, $x \le \dfrac{a}{2}$, l'equació es transformaria:

$2(-2x+a)+a+2x-8=0$.

$-4x+2a+a+2x-8=0$.

$x=\dfrac{3a-8}{2}$, $x \ge \dfrac{a}{2}$. $\dfrac{3a-8}{2} \le \dfrac{a}{2}$.

$$\begin{cases} 1 \le \dfrac{3a-8}{2} \le 4 \\ 3a-8 \le a \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2 \le 3a-8 \le 8 \\ a \le 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 \le 3a \le 16 \\ a \le 4 \end{cases}$$

$\begin{cases} \dfrac{10}{3} \le a \le \dfrac{16}{3} \\ a \le 4 \end{cases}$. La solució és: $a \in \left[\dfrac{10}{3}, \dfrac{16}{3}\right]$.

La solució de la inequació és la intersecció de les dues solucions:

$a \in \left[\dfrac{10}{3}, 4\right]$.

57.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{x^4-4x-16}=2-x$.

Selectivitat russa 1985 1. 2.

Solució:

Com que $\sqrt{x^4-4x-16}=2-x \ge 0$. $x \le 2$

$\sqrt{x^4-4x-16}=2-x$. Elevant al quadrat:

$x^4-4x-16=x^2-4x+4$.

x^4-x^2-20.

$x=-\sqrt{5}$.

Notem que $x=-\sqrt{5}$, és solució de l'equació ja que

$\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^4-4\left(-\sqrt{5}\right)-16}=2-\left(-\sqrt{5}\right)$.

58.- Resoleu l'equació:

$2x+\sqrt{12-x^4}=0$.

Selectivitat russa 1985 2. 2.

Solució:

Notem que $\sqrt{12-x^4}\geq 0$, aleshores, $x\leq 0$

$2x+\sqrt{12-x^4}=0$.

$\sqrt{12-x^4}=-2x$. Elevant al quadrat:

$12-x^4=4x^2$

$x^4+4x^2-12=0$.

$x=-\sqrt{2}$.

Notem que $x=-\sqrt{2}$, és solució de l'equació ja que $2\left(-\sqrt{2}\right)+\sqrt{12-\left(-\sqrt{2}\right)^4}=0$.

59.- Resoleu la inequació:

$\log_{1/8} x+\log_2 4x<4$.

Selectivitat russa 1985 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x>0$.

$\log_{1/8} x+\log_2 4x<4$. Canvi de base:

$\frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-3}}+\log_2 4+\log_2 x<4$.

$\frac{-1}{3}\log_2 x+\log_2 x<2$.

$\frac{2}{3}\log_2 x<2$, $x>0$.

$\log_2 x<3=\log_2 2^3$. La funció $y=\log_2 x$ és monòtona estrictament creixent:

$0<x<2^3$. $x\in \left]0,8\right[$.

60.- Resoleu la inequació:

$\log_3\left(\frac{x}{9}\right)-\log_{1/27} x<2$.

Selectivitat russa 1985 2. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x>0$.

$\log_3\left(\frac{x}{9}\right)-\log_{1/27} x<2$. Canvi de base:

$\log_3 x-\log_3 9-\frac{\log_3 x}{\log_3 3^{-3}}<2$.

$\log_3 x+\frac{1}{3}\log_2 x<4$.

$\frac{4}{3}\log_2 x < 4$.

$\log_3 x < 3 = \log_3 3^3$, $x > 0$. La funció $y = \log_3 x$ és monòtona estrictament creixent:

$0 < x < 3^3$. $x \in \left]0, 27\right[$.

61.- Per a tot valor a resoleu l'equació:

$9^x + 9a(1-a)3^{x-2} - a^3 = 0$.

Selectivitat russa 1985 1. 4.

Solució:

$9^x + 9a(1-a)3^{x-2} - a^3 = 0$.

$\left(3^x\right)^2 + 9a(1-a)3^x\frac{1}{9} - a^3 = 0$.

$\left(3^x\right)^2 + a(1-a)3^x - a^3 = 0$.

Efectuant el canvi $z = 3^x$, $z > 0$.

$z^2 + a(1-a)z - a^3 = 0$.

$z = a^2, -a$.

Suposem $a > 0$. Desfent el canvi:

$3^x = a^2$. $x = \log_3 a^2$.

$3^x = -a$, no té solució real.

Suposem $a < 0$. Desfent el canvi:

$3^x = a^2$. $x = \log_3 a^2$.

$3^x = -a$, $x = \log_3(-a)$.

62.- Per a tot valor b resoleu l'equació:

$49^x - b^2(b+1)7^{x-2} + b^5 = 0$.

Selectivitat russa 1985 2. 4.

Solució:

$49^x - b^2(b+1)7^{x-2} + b^5 = 0$.

$\left(7^x\right)^2 - b^2(b+1)7^x + b^5 = 0$.

Efectuant el canvi $z = 7^x$, $z > 0$.

$z^2 - b^2(b+1)z + b^5 = 0$.

$z = b^3, b^2$.

Suposem $b > 0$. Desfent el canvi:

$7^x = b^3$. $x = \log_7 b^3$.

$7^x = b^2$. $x = \log_7 b^2$.

Suposem $b < 0$. Desfent el canvi:

$7^x = b^3$, no té solució real.

$7^x = b^2$, $x = \log_7\left(b^2\right)$.

63.- Resoleu l'equació:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{7-x^2}{2}} = 27^{2x}.$$

Selectivitat russa 1986 1. 1.

Solució:

$$\left(3^{-2}\right)^{\frac{7-x^2}{2}} = \left(3^3\right)^{2x}.$$

$$3^{x^2-7} = 3^{6x}.$$

$x^2 - 7 = 6x$. Resolent l'equació:

$x = -1, 7$.

64.- Resoleu l'equació:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4x^2}{3}} = 81^x \cdot 3^{-8}.$$

Selectivitat russa 1986 2. 1.

Solució:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4x^2}{3}} = 81^x \cdot 3^{-8}.$$

$$\left(3^{-3}\right)^{\frac{4x^2}{3}} = \left(3^4\right)^x \cdot 3^{-8}$$

$$3^{-4x^2} = \cdot 3^{4x-8}$$

$-4x^2 = 4x - 8$. Resolent l'equació:

$x = -2, 1$.

65.- Resoleu la inequació:

$$3 - x < \frac{5x}{x-2}.$$

Selectivitat russa 1986 1. 2.

Solució:

$$3 - x < \frac{5x}{x-2}.$$

$$3 - x - \frac{5x}{x-2} < 0.$$

$\dfrac{-x^2-6}{x-2} < 0$. El numerador és negatiu:

$x - 2 > 0$.

$x > 2$. $x \in \left]2, +\infty\right[$.

66.- Resoleu la inequació:

$$\frac{9-2x}{2-x} < x+4.$$

Selectivitat russa 1986 2. 2.

Solució:

$$\frac{9-2x}{2-x} < x+4.$$

$$\frac{9-2x}{2-x} - (x+4) < 0.$$

$\frac{x^2+1}{2-x} < 0$. El numerador és positiu:

$2-x<0$.

$x>2$. $x \in \left]2, +\infty\right[$.

67.- Resoleu el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 4^y = x \\ 2\sin x - \sin 2x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1986 1. 3.

Solució:

Notem que $4^y = x > 0$.

Resolem la segona equació:

$2\sin x - \sin 2x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Raons angle meitat:

$2\sin x - \sin 2x = 1 - \cos x$. Raons angle doble:

$2\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \cos x$.

$(1-\cos x)(2\sin x - 1) = 0$.

$\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k = 1,2,3,....$

$\sin x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k = 0,1,2,3,....$

Substituint en la primera equació:

$4^y = 2\pi k$, $y = \log_4(2\pi k)$.

$4^y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \log_4\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$. $4^y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \log_4\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$.

Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x = 2\pi k \\ y = \log_4(2\pi k) \end{cases}, \quad k = 1,2,3,....$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \log_4\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \end{cases}, \quad k = 0,1,2,3,....$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \log_4\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \end{cases}, \quad k = 0,1,2,3,....$$

68.- Resoleu el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2 + \sin 2x - 2\sin^2 x = 0 \\ 5^y = x \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1986 2. 3.

Solució:

Notem que $5^y = x > 0$.

Resolem la primera equació:

$2 + \sin 2x - 2\sin^2 x = 0$. Raons angle doble:

$2 + 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin^2 x = 0$. Raons fonamental:

$2\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0$

$\cos x(\cos x + \sin x) = 0$.

$\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0,1,2,3,....$

$\text{tg}x = -1$, $x = \dfrac{5\pi}{4} + \pi k$, $k = 0,1,2,3,....$

Substituint en la primera equació:

$5^y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $y = \log_5\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$. $5^y = \dfrac{5\pi}{4} + \pi k$, $y = \log_5\left(\dfrac{5\pi}{4} + \pi k\right)$.

Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ y = \log_5\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) \end{cases}, \quad k = 0,1,2,3,....$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{4} + \pi k \\ y = \log_5\left(\dfrac{5\pi}{4} + \pi k\right) \end{cases}, \quad k = 0,1,2,3,....$$

69.- Resoleu l'equació:

$3\log_5(x^2) + 3 = 4x \cdot \log_{25} x + x$.

Selectivitat russa 1986 1. 4.

Solució:

El domini de les solucions és $x > 0$.

$3\log_5(x^2) + 3 = 4x \cdot \log_{25} x + x$. Canvi de base:

$6\log_5 x + 3 = 4x \cdot \dfrac{\log_5 x}{\log_5 25} + x$.

$6\log_5 x + 3 = 2x \cdot \log_5 x + x$.

$3(2\log_5 x+1)=x\cdot(2\log_5 x+1)$.
$(2\log_5 x+1)(x-3)=0$.
$x-3=0$, aleshores, $x=3$.
$\log_5 x=\frac{-1}{2}$, $x=5^{-1/2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

70.- Resoleu l'equació:
$7+3x\cdot\log_7 x=14\log_{49} x^3+x$.
Selectivitat russa 1986 2. 4.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$.

$7+3x\cdot\log_7 x=14\log_{49} x^3+x$. Canvi de base:
$7+3x\cdot\log_7 x=14\frac{\log_7 x^3}{\log_7 49}+x$.
$7+3x\cdot\log_7 x=21\log_7 x+x$.
$3x\cdot\log_7 x-x=21\log_7 x-7$
$x(3\log_7 x-1)=7(3\log_7 x-1)$.
$(3\log_7 x-1)(x-7)=0$.
$x-7=0$, aleshores, $x=7$.
$\log_7 x=\frac{1}{3}$, $x=7^{1/3}=\sqrt[3]{7}$.

71.- Resoleu la inequació:
$\frac{1}{2-x}\geq\frac{1}{x}$.
Selectivitat russa 1987 1. 1.

Solució:
$\frac{1}{2-x}\geq\frac{1}{x}$.
$\frac{1}{2-x}-\frac{1}{x}\geq 0$.
$\frac{2x-2}{(2-x)x}\geq 0$.
Els zeros del numerador i denominador són $x=0,1,2$.
Estudiant el signe de la fracció en cadascun dels intervals que determinen els zeros, la solució és:
$x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left[1,2\right[$.

72.- Resoleu la inequació:

$\frac{16}{x^3} \le x$.

Selectivitat russa 1987 2. 1.

Solució:

$\frac{16}{x^3} \le x$.

$\frac{16}{x^3} - x \le 0$.

$\frac{16 - x^4}{x^3} \le 0$.

Els zeros del numerador i denominador són $x = -2, 0, 2$.

Estudiant el signe de la fracció en cadascun dels intervals que determinen els zeros, la solució és:

$x \in [-2, 0[\cup [2, +\infty[$.

73.- Resoleu la inequació:

$\frac{2}{\sqrt{x} - 2} < 1$.

Selectivitat russa 1987 3. 1.

Solució:

El domini de les solucions és $x \ge 0$

$\frac{2}{\sqrt{x} - 2} < 1$.

$\frac{2}{\sqrt{x} - 2} - 1 < 0$.

$\frac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} > 0$.

Els zeros del numerador i denominador són $x = 4, 16$.

Estudiant el signe de la fracció en cadascun dels intervals que determinen els zeros, la solució és:

$x \in]0, 4[\cup [16, +\infty[$.

74.- Resoleu la inequació:

$\frac{10}{5 - \sqrt{x}} > 1$.

Selectivitat russa 1987 4. 1.

Solució:

El domini de les solucions és $x \ge 0$

$\frac{10}{5 - \sqrt{x}} > 1$.

$\frac{10}{5-\sqrt{x}}-1>0$.

$\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}>0$. El numerador és positiu:

$5-\sqrt{x}>0$, $x\geq 0$.

$x<25$, $x\geq 0$. $x\in[0,25[$.

75.- Resoleu l'equació:

$9^{\sin x}+3\cdot 9^{2-\sin x}=84$.

Selectivitat russa 1987 1. 2.

Solució:

$9^{\sin x}+3\cdot 9^{2-\sin x}=84$.

$9^{\sin x}+3\cdot\frac{9^2}{9^{\sin x}}=84$.

Efectuant el canvi $a=9^{\sin x}$, $a>0$:

$a+\frac{243}{a}=84$.

$a^2-84a+243=0$. Resolent l'equació:

$a=3,81$.

Desfent el canvi:

Si $a=3$, $9^{\sin x}=3=9^{\frac{1}{2}}$.

$\sin x=\frac{1}{2}$, aleshores: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

Si $a=81$, $9^{\sin x}=81=9^2$. $\sin x=2$, no té solució real.

76.- Resoleu l'equació:

$3^{\cos x-1}+3^{2-\cos x}-4=0$.

Selectivitat russa 1987 2. 2.

Solució:

$3^{\cos x-1}+3^{2-\cos x}-4=0$.

$\frac{3^{\cos x}}{3}+\frac{9}{3^{\cos x}}-4=0$.

Efectuant el canvi $a=3^{\cos x}$, $a>0$:

$\frac{1}{3}a+\frac{9}{a}-4=0$.

$a^2-12a+27=0$. Resolent l'equació:

$a=3,9$.

Desfent el canvi:

Si $a=3$, $3^{\cos x}=3$.

$\cos x=1$, aleshores: $x=2\pi k$, $k\in Z$.

Si $a=9$, $3^{\cos x}=9=2^2$.

$\cos x=2$, no té solució real.

77.- Resoleu l'equació:

$$\frac{3^{x-1}}{2^x-3^x}=1-\frac{2^x}{3^{x+1}}.$$

Selectivitat russa 1987 3. 2.

Solució:

$$\frac{3^{x-1}}{2^x-3^x}=1-\frac{2^x}{3^{x+1}}.$$

$$\frac{\frac{3^{x-1}}{3^x}}{\frac{2^x-3^x}{3^x}}=1-\frac{\frac{2^x}{3^x}}{\frac{3^{x+1}}{3^x}}.$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}=1-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{3}.$$

Efectuant el canvi $a=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $a>0$:

$$\frac{1}{3(a-1)}=1-\frac{1}{3}a.$$

$a^2-4a+4=0$. Resolent l'equació:

$a=2$. Desfent el canvi:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=2. \quad x=\log_{2/3}2.$$

78.- Resoleu l'equació:

$$\frac{2^{x+1}}{2^{x+2}-3^x}=\frac{2^{x+2}+3^x}{2^{x-1}}.$$

Selectivitat russa 1987 4. 2.

Solució:

$$\frac{2^{x+1}}{2^{x+2}-3^x}=\frac{2^{x+2}+3^x}{2^{x-1}}.$$

$$\frac{\frac{2^{x+1}}{2^x}}{\frac{2^{x+2}-3^x}{2^x}}=\frac{\frac{2^{x+2}+3^x}{2^x}}{\frac{2^{x-1}}{2^x}}.$$

$$\frac{2}{4-\left(\frac{3}{2}\right)^x}=\frac{4+\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\frac{1}{2}}.$$

Efectuant el canvi $a=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $a>0$:

$\frac{2}{4-a}=2(4+a)$.

$a^2=15$. Resolent l'equació:

$a=\sqrt{15}$.

Desfent el canvi:

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\sqrt{15}$. $x=\log_{3/2}\sqrt{15}$.

79.- Determineu el domini de la funció $y=\sqrt{1-\log_4\left(x^2-3x\right)}$.

Selectivitat russa 1987 1. 4.

Solució:

El domini és la solució del següent sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} 1-\log_4\left(x^2-3x\right)\geq 0 \\ x^2-3x>0 \end{cases}$$

Resolem la primera inequació $1-\log_4\left(x^2-3x\right)\geq 0$:

$\log_4\left(x^2-3x\right)\leq 1=\log_4 4$. La funció $y=\log_4 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$x^2-3x\leq 4$.

$x^2-3x-4\leq 0$.

Els zeros del polinomi són $x=-1, 4$. Estudiant el signes del polinomi en els intervals que determinen els zeros:

La solució és $x\in[-1, 4]$.

La segona inequació $x^2-3x>0$.

Els zeros del polinomi són $x=0, 3$. Estudiant el signes del polinomi en els intervals que determinen els zeros:

La solució és $x\in\,]-\infty, 0[\,\cup\,]3, +\infty[$.

El domini de la funció és igual a la intersecció dels dos intervals:

$[-1, 0[\,\cup\,]3, 4]$.

80.- Determineu el domini de la funció $y=\log_2\left(\log_{1/3}\left(x^2+\frac{2x}{3}\right)-1\right)$.

Selectivitat russa 1987 2. 4.

Solució:

El domini és la solució del següent sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} \log_{1/3}\left(x^2+\frac{2x}{3}\right)-1>0 \\ x^2+\frac{2x}{3}>0 \end{cases}$$

La solució de la segona inequació és $x \in \left]-\infty, \frac{-2}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

Resolem la primera inequació:

$\log_{1/3}\left(x^2 + \frac{2x}{3}\right) - 1 > 0$.

$\log_{1/3}\left(x^2 + \frac{2x}{3}\right) > 1 = \log_{1/3}\frac{1}{3}$. La funció $y = \log_4 x$ és estrictament decreixent en el seu domini:

$x^2 + \frac{2x}{3} < \frac{1}{3}$.

$3x^2 + 2x - 1 < 0$. Resolent la inequació:

$x \in \left]-1, \frac{1}{3}\right[$.

El domini és igual a la intersecció de les solucions de les dues inequacions:

$x \in \left]-1, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]0, \frac{1}{3}\right[$

81.- Resoleu la inequació:

$\log_2\left((5-x)(2-x)\right) > \log_4 (x-2)^2$.

Selectivitat russa 1987 3. 4.

Solució:

El domini de les solucions és el reals x que satisfan $\begin{cases}(5-x)(2-x) > 0 \\ (x-2)^2 > 0\end{cases}$.

Resolen el sistema d'inequacions $x \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]5, +\infty\right[$.

$\log_2\left((5-x)(2-x)\right) > \log_4 (x-2)^2$. Canvi de base:

$\log_2\left((5-x)(2-x)\right) > \frac{\log_2 (x-2)^2}{\log_2 4}$.

$\log_2\left((5-x)(2-x)\right) > \log_2 (x-2)$. La funció $y = \log_2 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$(5-x)(2-x) > x - 2$.

$(6-x)(2-x) > 0$, $x \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]5, +\infty\right[$. Resolent la inequació:

$x \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]6, +\infty\right[$.

82.- Resoleu la inequació:

$\log_4(4-x)^2 - \log_2 \frac{4-x}{5-x} > 0$.

Selectivitat russa 1987 4. 4.

Solució:

El domini de les solucions és el reals x que satisfan $\begin{cases} \frac{4-x}{5-x} > 0 \\ (4-x)^2 > 0 \end{cases}$.

Resolen el sistema d'inequacions $x \in \left]-\infty, 4\right[\cup \left]5, +\infty\right[$.

$\log_4(4-x)^2 - \log_2 \frac{4-x}{5-x} > 0$. Canvi de base:

$\frac{\log_2(4-x)^2}{\log_2 4} - \log_2 \frac{4-x}{5-x} > 0$.

$\log_2(4-x) - \log_2 \frac{4-x}{5-x} > 0$.

$\log_2 \frac{4-x}{\frac{4-x}{5-x}} > 0$.

$\log_2(5-x) > 0 = \log_2 1$. La funció $y = \log_2 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$5-x > 1$, $x \in \left]-\infty, 4\right[\cup \left]5, +\infty\right[$.

Aleshores, $x < 4$, $x \in \left]-\infty, 4\right[$.

83.- Resoleu l'equació:

$x + 5 = \sqrt{-x^2 - 8x + 9}$.

Selectivitat russa 1988 1. 3.

Solució:

Notem que $\sqrt{-x^2 - 8x + 9} \geq 0$, aleshores, $x \geq -5$. Elevant al quadrat:

$x^2 + 10x + 25 = -x^2 - 8x + 9$.

$2x^2 + 18x + 16 = 0$. Resolent l'equació:

$x = -1$.

Comprovant la solució en l'equació inicial:

$(-1) + 5 = \sqrt{-(-1)^2 - 8(-1) + 9}$.

84.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{-x^2 - 4x + 30} - x = 4$.

Selectivitat russa 1988 2. 3.

Solució:

$\sqrt{-x^2 - 4x + 30} - x = 4$.

$\sqrt{-x^2 - 4x + 30} = x + 4$. Notem que $\sqrt{-x^2 - 4x + 30} \geq 0$, aleshores, $x \geq -4$.

Elevant al quadrat:

$-x^2-4x+30=x^2+8x+16$.

$2x^2+12x-14=0$. Resolent l'equació:

$x=1$.

Comprovant la solució en l'equació inicial:

$\sqrt{-1^2-4\cdot 1+30}-1=4$.

85.- Determineu els valors de a a fi que el sistema

$\begin{cases} a(xy-x-y+1)+x-y+\dfrac{3}{2}=0 \\ xy+y-1=0 \end{cases}$ tinga solució única.

Selectivitat russa 1988 1. 5.

Solució:

$$\begin{cases} a(xy-x-y+1)+x-y+\dfrac{3}{2}=0 \\ xy+y-1=0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{x}{x+1}-x-\dfrac{1}{x+1}+1\right)+x-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2}=0 \\ y=\dfrac{1}{x+1} \end{cases},\ x+1\neq 0 .$$

Simplificant:

$$\begin{cases} \dfrac{(2-2a)x^2+(2a+5)x+1}{x+1}=0 \\ y=\dfrac{1}{x+1} \end{cases}.$$

A fi que l'equació primera tinga una única solució el discriminant del polinomi numerador, de la primera equació, ha de ser zero:

$(2a+5)^2-4(2-2a)=0$.

$4a^2+28a+17=0$. Resolent l'equació:

$a=\dfrac{-7-4\sqrt{2}}{2},\dfrac{-7+4\sqrt{2}}{2}$.

86.- Determineu els valors de a a fi que el sistema

$\begin{cases} 2y-x+xy=0 \\ (x+2a-4)y-ax+5=0 \end{cases}$ tinga solució única.

Selectivitat russa 1988 2. 5.

Solució:

$$\begin{cases} 2y-x+xy=0 \\ (x+2a-4)y-ax+5=0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{x+2} \\ (x+2a-4)\dfrac{x}{x+2}-ax+5=0 \end{cases},\ x+2\neq 0 .$$

Simplificant:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{x+2} \\ \dfrac{(1-a)x^2+x+10}{x+2} = 0 \end{cases}.$$

A fi que l'equació primera tinga una única solució el discriminant del polinomi numerador, de la segona equació, ha de ser zero:

$1^2 - 4(1-a)10 = 0$.

Resolent l'equació:

$a = \dfrac{39}{40}$.

87.- Resoleu l'equació:

$\log_3(x-8) + \dfrac{1}{2}\log_3 x^2 = 2$.

Selectivitat russa 1989 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x-8>0$, $x \neq 0$. És a dir, $x>8$.

$\log_3(x-8) + \dfrac{1}{2}\log_3 x^2 = 2$.

$\log_3(x-8) + \log_3 x = 2$.

$\log_3\left((x-8)x\right) = 2$. Definició de logaritme:

$(x-8)x = 3^2$.

$x^2 - 8x - 9 = 0$. Resolent l'equació:

$x = 9$.

88.- Resoleu l'equació:

$\log_2(x+4) + 2\log_2\sqrt{x} = 5$.

Selectivitat russa 1989 2. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+4>0 \\ x>0 \end{cases}$,. És a dir, $x>0$.

$\log_2(x+4) + 2\log_2\sqrt{x} = 5$.

$\log_2(x+4) + \log_2 x = 5$.

$\log_2\left((x+4)x\right) = 5$.

Definició de logaritme:

$(x+4)x = 2^5$.

$x^2 + 4x - 32 = 0$. Resolent l'equació:

$x = 4$.

89.- Determineu els valors de p a fi que l'equació

$4\left(x-\sqrt{p\cdot 7^p}\right)x+p+7\left(7^p-1\right)=0$ tinga solució.

Selectivitat russa 1989 1. 5.

Solució:

Notem que $p\geq 0$ ja que $p\cdot 7^p\geq 0$.

$4\left(x-\sqrt{p\cdot 7^p}\right)x+p+7\left(7^p-1\right)=0$.

$4x^2-4\sqrt{p\cdot 7^p}x+p+7\left(7^p-1\right)=0$.

El discriminant de l'equació ha de ser positiu o zero:

$\left(4\sqrt{p\cdot 7^p}\right)^2-4\cdot 4\left(p+7\left(7^p-1\right)\right)\geq 0$.

Simplificant:

$\left(7^p-1\right)(p-7)\geq 0$. Aleshores:

$\begin{cases}7^p-1\geq 0\\ p-7\geq 0\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}7^p-1\leq 0\\ p-7\leq 0\end{cases}$.

Si $\begin{cases}7^p-1\geq 0\\ p-7\geq 0\\ p\geq 0\end{cases}$, $p\geq 7$.

Si $\begin{cases}7^p-1\leq 0\\ p-7\leq 0\\ p\geq 0\end{cases}$, $p=0$.

Els valors de p que fan que l'equació inicial tinga solució són:

$p\in\{0\}\cup[7,+\infty[$.

90.- Determineu els valors de m a fi que l'equació

$4x^2-4\sqrt{m\cdot 3^m}x+3^{m+1}+m-3=0$ tinga solució.

Selectivitat russa 1989 2. 5.

Solució:

Notem que $m\geq 0$ ja que $m\cdot 3^m\geq 0$.

$4x^2-4\sqrt{m\cdot 3^m}x+3^{m+1}+m-3=0$

El discriminant de l'equació ha de ser positiu o zero:

$\left(4\sqrt{m\cdot 3^m}\right)^2-4\cdot 4\left(3^{m+1}+m-3\right)\geq 0$.

Simplificant:

$m\cdot 3^m-3^{m+1}-m+3\geq 0$.

Factoritzant:

$(m-3)\left(3^m-1\right)\geq 0$. Aleshores:

$\begin{cases}3^m-1\geq 0\\ m-3\geq 0\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}3^m-1\leq 0\\ m-3\leq 0\end{cases}$.

Si $\begin{cases} 3^m - 1 \geq 0 \\ m - 3 \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases}$, $m \geq 3$.

Si $\begin{cases} 3^m - 1 \leq 0 \\ m - 3 \leq 0 \\ m \geq 0 \end{cases}$, $m = 0$.

Els valors de m que fan que l'equació inicial tinga solució són:
$m \in \{0\} \cup [3, +\infty[$.

91.- Resoleu l'equació:
$x^2 - 4|x| - 2 = 0$.
Selectivitat russa 1990 1. 1.

Solució:
Si $x \geq 0$, l'equació inicials quedaria:
$x^2 - 4x - 2 = 0$. Resolent l'equació:
$x = 2 + \sqrt{6}$.

Si $x < 0$, l'equació inicials quedaria:
$x^2 + 4x - 2 = 0$. Resolent l'equació:
$x = -2 - \sqrt{6}$.

92.- Resoleu l'equació:
$x^2 - 6|x| - 1 = 0$.
Selectivitat russa 1990 2. 1.

Solució:
Si $x \geq 0$, l'equació inicials quedaria:
$x^2 - 6x - 1 = 0$. Resolent l'equació:
$x = 3 + \sqrt{10}$.

Si $x < 0$, l'equació inicials quedaria:
$x^2 + 6x - 1 = 0$. Resolent l'equació:
$x = -3 - \sqrt{10}$.

93.- Determineu els valors de b a fi que l'equació $\log_{\sqrt{1-x}} \sqrt{2x+b+2} = 2$ tinga solució.
Determineu les solucions.
Selectivitat russa 1990 1. 5.

Solució:

El domini de les solucions han d'acomplir $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x\neq 1 \\ 2x+b+2>0 \end{cases}$.

Aleshores, $\dfrac{-b-2}{2} < x < 1,\ x \neq 0$.

$\log_{\sqrt{1-x}} \sqrt{2x+b+2} = 2$. Definició de logaritme:

$\left(\sqrt{1-x}\right)^2 = \sqrt{2x+b+2}$. Elevant al quadrat:

$x^2 - 2x + 1 = 2x + b + 2$.

$x^2 - 4x - b - 1 = 0,\ x < 1$.

Resolent l'equació:

$x = 2 - \sqrt{5+b}$. D'existir la solució aquesta seria.

La solució ha d'acomplir que $\dfrac{-b-2}{2} < x < 1,\ x \neq 0$:

$\dfrac{-b-2}{2} < 2 - \sqrt{5+b} < 1$

$\begin{cases} \sqrt{5+b} > 1 \\ \sqrt{5+b} < \dfrac{b+6}{2} \end{cases}$. Elevant al quadrat:

$\begin{cases} 5+b>1 \\ b^2+8b+16>0 \end{cases}$. Aleshores, $b > -4$, $b \neq 4$.

Aleshores, l'equació té solució quan $b > -4$, $b \neq 4$ i la solució és $x = 2 - \sqrt{5+b}$.

94.- Determineu els valors de m a fi que l'equació $\log_{\sqrt{1-x}} (4x+m-1) = 4$ tinga solució.
Determineu les solucions.
Selectivitat russa 1990 2. 5.

Solució:

El domini de les solucions han d'acomplir $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x\neq 1 \\ 4x+m-1>0 \end{cases}$.

Aleshores, $\dfrac{1-m}{4} < x < 1,\ x \neq 0$.

$\log_{\sqrt{1-x}} (4x+m-1) = 4$. Definició de logaritme:

$\left(\sqrt{1-x}\right)^4 = 4x+m-1$.

$x^2 - 6x - m + 2 = 0,\ x < 1$.

$x = 3 - \sqrt{m+7}$. D'existir la solució aquesta seria.

La solució ha d'acomplir que $\frac{1-m}{4}<x<1,\ x\neq 0$:

$\frac{1-m}{4}<3-\sqrt{m+7}<1$

$\begin{cases}\sqrt{7+m}>2\\ \sqrt{7+m}<\frac{11+m}{4}\end{cases}$. Elevant al quadrat:

$\begin{cases}m+7>4\\ m^2+6m+9>0\end{cases}$. Aleshores, $m>-3$, $m\neq 2$.

Aleshores, l'equació té solució quan $m>-3$, $m\neq 2$ i la solució és $x=3-\sqrt{m+7}$.

95.- Resoleu la inequació:

$\log_9(x+6)-\log_3(x+3)<0$.

Selectivitat russa 1991 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions acompleix $\begin{cases}x+6>0\\ x+3>0\end{cases}$, aleshores, $x>-3$.

$\log_9(x+6)-\log_3(x+3)<0$. Canvi de base:

$\frac{\log_3(x+6)}{\log_3 9}-\log_3(x+3)<0$.

$\log_3\sqrt{x+6}-\log_3(x+3)<0$.

$\log_3\frac{\sqrt{x+6}}{x+3}<0=\log_3 1$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$\frac{\sqrt{x+6}}{x+3}<1$.

$\frac{\sqrt{x+6}}{x+3}-1<0$.

$\frac{\sqrt{x+6}-x-3}{x+3}<0$, $x+3>0$. Aleshores:

$\sqrt{x+6}-x-3<0$.

$\sqrt{x+6}<x+3$, $x+3>0$. Elevant al quadrat:

$x+6<x^2+6x+9$.

$x^2+5x+3>0$, $x>-3$.

Els zeros del polinomi són $x=\frac{-5-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

La solució de la inequació és:

$x>\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$. $x\in\left]\frac{-5+\sqrt{13}}{2},+\infty\right[$.

96.- Resoleu la inequació:
$\log_2(2-x)-\log_4(5-x)>0$.
Selectivitat russa 1991 2. 3.

Solució:
El domini de les solucions acompleix $\begin{cases}2-x>0\\5-x>0\end{cases}$, aleshores, $x<2$.

$\log_2(2-x)-\log_4(5-x)>0$. Canvi de base:
$\log_2(2-x)-\dfrac{\log_2(5-x)}{\log_2 4}>0$.
$\log_2(2-x)-\log_4\sqrt{5-x}>0$.
$\log_2\dfrac{2-x}{\sqrt{5-x}}>0=\log_2 1$. La funció $y=\log_2 x$ és estrictament creixent en el seu domini:
$\dfrac{2-x}{\sqrt{5-x}}>1$, $\sqrt{5-x}>0$. Aleshores:
$2-x>\sqrt{5-x}$. Elevant al quadrat:
$x^2-3x-1>0$, $x<2$.
Els zeros del polinomi són $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.
La solució de la inequació és:
$x<\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. $x\in\left]-\infty,\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}\right[$.

97.- Resoleu la inequació:
$1+2x^2<4x$.
Selectivitat russa 1992 1. 1.

Solució:
$1+2x^2<4x$.
$2x^2-4x+1<0$.
Els zeros del polinomi són $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.
Calculant els signes del polinomi en cadascun dels intervals que determinen els zeros, la solució és:
$x\in\left]\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right[$.

98.- Resoleu la inequació:
$12x-5<4x^2$.
Selectivitat russa 1992 2. 1.

Solució:
$12x-5<4x^2$.
$4x^2-12x+5>0$.
Els zeros del polinomi són $x=\frac{1}{2},\frac{5}{2}$.
Calculant els signes del polinomi en cadascun dels intervals que determinen els zeros, la solució és:
$x=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2},+\infty\right[$.

99.- Resoleu l'equació:
$2\log_7 x^5=7+\log_7 x$.
Selectivitat russa 1992 1. 3.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$.
$2\log_7 x^5=7+\log_7 x$
$\log_7 x^{10}-\log_7 x=7$.
$\log_7 \frac{x^{10}}{x}=7$.
$\log_7 x^9=7$. Definició de logaritme:
$x^9=7^7$, aleshores:
$x=7^{\frac{7}{9}}$.

100.- Resoleu l'equació:
$\log_5 x^3-2=\frac{1}{5}\log_5 x$.
Selectivitat russa 1992 2. 3.

Solució:
$\log_5 x^3-2=\frac{1}{5}\log_5 x$.
$\log_5 x^3-\frac{1}{5}\log_5 x=2$.
$\log_5 \frac{x^3}{x^{1/5}}=2$.
$\log_5 x^{14/5}=2$.
$x^{\frac{14}{5}}=5^2$. Aleshores: $x=5^{\frac{5}{7}}$.

101.- Resoleu la inequació:

$x^5 < x$.

Selectivitat russa 1993 1. 1.

Solució:

$x^5 < x$.

$x^5 - x < 0$. Factoritzant el polinomi:

$x(x^2+1)(x+1)(x-1) < 0$. $x^2+1 > 0$:

$x(x+1)(x-1) < 0$

Aleshores, la solució és:

$x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, 1\right[$.

102.- Resoleu la inequació:

$\frac{1}{x} < x$.

Selectivitat russa 1993 2. 1.

Solució:

$\frac{1}{x} < x$.

$\frac{1}{x} - x < 0$.

$\frac{1-x^2}{x} < 0$. Factoritzant el numerador:

$\frac{(1+x)(1-x)}{x} < 0$.

Aleshores, la solució és:

$x \in \left]-1, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

103.- Resoleu l'equació:

$2^{x+2} = 2^{2x+2} \cdot 3^{x+3}$.

Selectivitat russa 1993 1. 3.

Solució:

$2^{x+2} = 2^{2x+2} \cdot 3^{x+3}$.

$1 = \frac{2^{2x+2}}{2^{x+2}} \cdot 3^{x+3}$.

$1 = 2^x \cdot 3^x \cdot 3^3$.

$6^x = 3^{-3}$.

$x = \log_6 3^{-3} = -3\log_6 3$.

104.- Resoleu l'equació:

$3^{x+2}=3^{2x+1}\cdot 5^{x+2}$.

Selectivitat russa 1993 2. 3.

Solució:

$3^{x+2}=3^{2x+1}\cdot 5^{x+2}$.

$1=\dfrac{3^{2x+1}}{3^{x+2}}\cdot 5^{x+2}$.

$1=3^{-1}\cdot 3^{x}\cdot 5^{x}\cdot 5^{2}$.

$15^{x}=\dfrac{3}{25}$.

$x=\log_{15}\dfrac{3}{25}$.

105.- Calculeu el domini de la següent funció $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-9\right)+4}$.

Selectivitat russa 1993 1. 5.

Solució:

El domini és igual a la solució del següent sistema d'inequacions:

$\begin{cases} x^2-9>0 \\ \log_{1/2}\left(x^2-9\right)+4\geq 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} (x+3)(x-3)>0 \\ \log_{1/2}\left(x^2-9\right)\geq -4=\log_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} \end{cases}$.

La funció $y=\log_{1/2}x$ és estrictament decreixent en el seu domini:

$\begin{cases} (x+3)(x-3)>0 \\ x^2-9\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=16 \end{cases}$.

$\begin{cases} (x+3)(x-3)>0 \\ (x+5)(x-5)\leq 0 \end{cases}$.

106.- El domini de la funció és: $\left[-5,-3\right[\cup\left]3,5\right]$.

Calculeu el domini de la següent funció $y=\sqrt{\dfrac{3^x-4^x}{x^2+4x+3}}$.

Selectivitat russa 1993 1. 5.

Solució:

El domini és igual a la unió de les solucions dels següents sistemes d'inequacions:

$\begin{cases} 3^x-4^x\geq 0 \\ x^2+4x+3>0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3^x-4^x\leq 0 \\ x^2+4x+3<0 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} 3^x - 4^x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 > 0 \end{cases}$, aleshores:

$\begin{cases} 3^x \geq 4^x \\ (x+1)(x+3) > 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x \geq 1 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^0 \\ (x+1)(x+3) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ (x+1)(x+3) > 0 \end{cases}$. La solució és: $x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-1, 0\right]$.

Si $\begin{cases} 3^x - 4^x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases}$, aleshores:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x+3) < 0 \end{cases}$. La solució és: $x \in \left[0, +\infty\right[$.

El domini de la funció és: $x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$.

107.- Resoleu la inequació:

$\dfrac{3-x}{1-3^x} < 0$.

Selectivitat russa 1993 3. 1.

Solució:

$\dfrac{3-x}{1-3^x} < 0$. La solució és la unió de les solucions dels següents sistemes:

$\begin{cases} 3-x > 0 \\ 1-3^x < 0 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} 3-x < 0 \\ 1-3^x > 0 \end{cases}$

Si $\begin{cases} 3-x > 0 \\ 1-3^x < 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x < 3 \\ 3^x > 1 = 3^0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 3 \\ x > 0 \end{cases}$. La solució és $x \in \left]0, 3\right[$

Si $\begin{cases} 3-x < 0 \\ 1-3^x > 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x > 3 \\ 3^x < 1 = 3^0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 3 \\ x < 0 \end{cases}$. No té solució real.

Aleshores, la solució de la inequació inicial és, $x \in \left]0, 3\right[$.

108.- Resoleu la inequació:
$(1-5^x)(5x-1)<0$.
Selectivitat russa 1993 4. 1.

Solució:
$(1-5^x)(5x-1)<0$. La solució és la unió de les solucions dels següents sistemes:
$\begin{cases}5x-1>0\\1-5^x<0\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}5x-1<0\\1-5^x>0\end{cases}$.
Si $\begin{cases}5x-1>0\\1-5^x<0\end{cases}$.
$\begin{cases}x>\dfrac{1}{5}\\5^x>1=5^0\end{cases}$.
$\begin{cases}x>\dfrac{1}{5}\\x>0\end{cases}$. La solució és $x\in\left]\dfrac{1}{5},+\infty\right[$
Si $\begin{cases}5x-1<0\\1-5^x>0\end{cases}$.
$\begin{cases}x<\dfrac{1}{5}\\x<0\end{cases}$. La solució és $x\in\left]-\infty,0\right[$.
Aleshores, la solució de la inequació inicial és, $x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]\dfrac{1}{5},+\infty\right[$.

109.- Resoleu l'equació:
$\sqrt{2\log_3 x}=4\log_3\sqrt[4]{x}-2$.
Selectivitat russa 1993 3. 3.

Solució:
El domini de les solucions és la solució del següent sistema d'inequacions:
$\begin{cases}x>0\\\log_3 x\geq 0\\4\log_3\sqrt[4]{x}-2\geq 0\end{cases}$, $\begin{cases}x>0\\\log_3 x\geq 0\\\log_3 x\geq 2=\log_3 9\end{cases}$ és a dir, quan $x\geq 9$.
$\sqrt{2\log_3 x}=4\log_3\sqrt[4]{x}-2$.
$\sqrt{2\log_3 x}=\log_3 x-2$.
Efectuem el canvi $a=\log_3 x$, $a\geq 2$.
$\sqrt{2a}=a-2$. Elevant al quadrat:
$a^2-6a+4=0$, $a\geq 2$. Resolent l'equació:
$a=3+\sqrt{5}$.
Desfent el canvi:
$\log_3 x=3+\sqrt{5}$, aleshores, $x=3^{3+\sqrt{5}}$.

110.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{2\log_7 x} + 1 = 3\log_7 \sqrt[3]{x}$.

Selectivitat russa 1993 4. 3.

Solució:

El domini de les solucions és la solució del següent sistema d'inequacions:

$\begin{cases} x > 0 \\ \log_7 x \geq 0 \\ 3\log_7 \sqrt[3]{x} - 1 \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x > 0 \\ \log_7 x \geq 0 \\ \log_7 x \geq 1 = \log_7 7 \end{cases}$ és a dir, quan $x \geq 7$.

$\sqrt{2\log_7 x} + 1 = 3\log_7 \sqrt[3]{x}$.

$\sqrt{2\log_7 x} + 1 = \log_7 x$

Efectuem el canvi $a = \log_7 x$, $a \geq 1$.

$\sqrt{a} + 1 = a$.

$\sqrt{a} = a - 1$. Elevant al quadrat:

$a^2 - 3a + 1 = 0$, $a \geq 1$. Resolent l'equació:

$a = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Desfent el canvi:

$\log_7 x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$, aleshores, $x = 3^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

111.- Resoleu la inequació:

$\dfrac{|x + 2| - x}{x} < 2$.

Selectivitat russa 1993 3. 5.

Solució:

Suposem que $x + 2 \geq 0$. $x \geq -2$. L'equació es transformaria:

$\dfrac{2}{x} < 2$.

$\dfrac{2}{x} - 2 < 0$.

$\dfrac{2 - 2x}{x} < 0$, $x \geq -2$. La solució és: $x \in [-2, 0[\cup]1, +\infty[$

Suposem que $x + 2 < 0$. $x < -2$. L'equació es transformaria:

$\dfrac{-x - 2 - x}{x} < 2$.

$\dfrac{-2x - 2}{x} - 2 < 0$.

$\dfrac{-4x - 2}{x} < 0$, $x \leq -2$. La solució és: $x \in]-\infty, -2[$.

Aleshores la solució de la inequació inicial és:

$x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

112.- Resoleu la inequació:

$\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| > 2$.

Selectivitat russa 1993 4. 5.

Solució:

Notem que si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left]1, +\infty\right[$ aleshores, $\frac{2x-1}{x-1} \geq 0$. Si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ aleshores,

$\frac{2x-1}{x-1} < 0$.

Si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left]1, +\infty\right[$, l'equació inicial es transformaria:

$\frac{2x-1}{x-1} > 2$.

$\frac{2x-1}{x-1} - 2 > 0$.

$\frac{1}{x-1} > 0$. Aleshores:

$x > 1$, aleshores, $x \in \left]1, +\infty\right[$.

Si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, l'equació inicial es transformaria:

$-\frac{2x-1}{x-1} > 2$.

$-\frac{2x-1}{x-1} - 2 > 0$.

$\frac{-4x+3}{x-1} > 0$. Aleshores, $x \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[$.

Aleshores, la solució de la inequació inicial és:

$x \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

113.- Resoleu l'equació:

$\log_3(x-4) = 1 + 6\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{x-2}$.

Selectivitat russa 1994 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x-4>0 \\ x-2>0 \end{cases}$, $x \neq 0$. És a dir, $x > 4$.

$\log_3(x-4) = 1 + 6\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{x-2}$. Canvi de base:

$\log_3(x-4)=1+6\dfrac{\log_3\sqrt{x-2}}{\log_3\dfrac{1}{27}}$.

$\log_3(x-4)=1-2\log_3\sqrt{x-2}$.

$\log_3(x-4)=\log_3 3-\log_3\left(\sqrt{x-2}\right)^2$.

$\log_3(x-4)=\log_3\dfrac{3}{x-2}$.

$x-4=\dfrac{3}{x-2}$. Resolent l'equació:

$x=5$.

114.- Resoleu l'equació:

$7^{\sqrt{x}}-2\cdot 7^{2-\sqrt{x}}=47$.

Selectivitat russa 1994 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x\geq 0$.

$7^{\sqrt{x}}-2\cdot 7^{2-\sqrt{x}}=47$.

$7^{\sqrt{x}}-2\cdot 49\cdot\dfrac{1}{7^{\sqrt{x}}}=47$.

Efectuant el canvi $a=7^{\sqrt{x}}$, $a>0$.

$a-\dfrac{98}{a}=47$.

$a^2-47a-98=0$. Resolent l'equació:

$a=49$.

Desfent el canvi:

$7^{\sqrt{x}}=49=7^2$.

$\sqrt{x}=2$. Elevant al quadrat:

$x=4$.

115.- Resoleu l'equació:

$2^{\sqrt{-x}}-3\cdot 2^{4-\sqrt{-x}}=13$.

Selectivitat russa 1994 2. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x\leq 0$.

$2^{\sqrt{-x}}-3\cdot 2^{4-\sqrt{-x}}=13$

$2^{\sqrt{-x}}-3\cdot 2^4\dfrac{1}{2^{\sqrt{-x}}}=13$.

Efectuant el canvi $a=2^{\sqrt{-x}}$, $a>0$.

$a-\dfrac{48}{a}=13$.

$a^2-13a-48=0$. Resolent l'equació:

$a = 16$.
Desfent el canvi:
$2^{\sqrt{-x}} = 16 = 2^4$.
$\sqrt{-x} = 4$. Elevant al quadrat:
$-x = 16$.
$x = -16$.

116.- Resoleu el sistema d'equacions:
$$\begin{cases} |x+2| + |y-3| = 1 \\ y = 3 - |x+2| \end{cases}.$$
Selectivitat russa 1994 1. 5.

Solució:
$$\begin{cases} |x+2| + |y-3| = 1 \\ y = 3 - |x+2| \end{cases}.$$
$$\begin{cases} |x+2| = 1 - |y-3| \\ y = 3 - |x+2| \end{cases}$$. Substituint en la segona equació:
$$\begin{cases} |x+2| = 1 - |y-3| \\ y = 3 - (1 - |y-3|) \end{cases}.$$
Si $y \geq 3$, el sistema quedaria:
$$\begin{cases} |x+2| = 1 - (y-3) \\ y = 3 - (1 - (y-3)) \end{cases}.$$
$$\begin{cases} |x+2| = 1 - (y-3) \\ y = 3 - (1 - (y-3)) \end{cases}$$
$$\begin{cases} |x+2| = 1 - (y-3) \\ 0 = -1 \end{cases}$$. Aleshores, el sistema no té solució.
Si $y < 3$, el sistema quedaria:
$$\begin{cases} |x+2| = 1 + (y-3) \\ y = 3 - (1 + (y-3)) \end{cases}.$$
$$\begin{cases} |x+2| = y - 2 \\ 2y = 5 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} |x+2| = 1 + (y-3) \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$. Substituint en la primera equació:
$$\begin{cases} |x+2| = \frac{1}{2} \\ 2y = 5 \end{cases}$$, aleshores:
$\begin{cases} x+2 = \frac{1}{2} \\ 2y = 5 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} x+2 = -\frac{1}{2} \\ 2y = 5 \end{cases}$. Aleshores les solucions del sistema són:

$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ 2y = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ 2y = 5 \end{cases}$.

117.- Resoleu la inequació:

$\frac{2-x}{\log_2 x} > 0$.

Selectivitat russa 1994 3. 1.

Solució:
El domini de les solucions és $x > 0$.

El signe del numerador i denominador de la fracció són iguals, aleshores la solució de la inequació és la unió de les solucions dels sistemes d'inequacions:

$\begin{cases} 2-x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} 2-x < 0 \\ \log_2 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} 2-x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x < 2 \\ \log_2 x > 0 = \log_2 1 \\ x > 0 \end{cases}$. La funció $y = \log_2 x$ és estrictament creixent en el seu domini, aleshores,

$\begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \\ x > 0 \end{cases}$, la solució és: $x \in \left]1, 2\right[$.

Si $\begin{cases} 2-x < 0 \\ \log_2 x < 0 \\ x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x > 2 \\ \log_2 x < 0 = \log_3 1 \\ x > 0 \end{cases}$, aleshores:

$\begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$, el sistema no té solució real.

La solució de la inequació inicial és: $x \in \left]1, 2\right[$.

118.- Resoleu la inequació:

$\frac{\log_{\frac{2}{3}} x}{2-3x} < 0$.

Selectivitat russa 1994 4. 1.

Solució:
El domini de les solucions és $x > 0$.

El signe del numerador i denominador de la fracció són contraris, aleshores la solució de la inequació és la unió de les solucions dels sistemes d'inequacions:

$\begin{cases} 2-3x>0 \\ \log_{\frac{2}{3}} x<0 \\ x>0 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} 2-3x<0 \\ \log_{\frac{2}{3}} x>0 \\ x>0 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} 2-3x>0 \\ \log_{\frac{2}{3}} x<0 \\ x>0 \end{cases}$, $\begin{cases} x<\frac{2}{3} \\ \log_{\frac{2}{3}} x<0=\log_{\frac{2}{3}} 1 \\ x>0 \end{cases}$. La funció $y=\log_{\frac{2}{3}} x$ és estrictament decreixent en el seu domini, aleshores,

$\begin{cases} x<\frac{2}{3} \\ x>1 \\ x>0 \end{cases}$. El sistema no té solució real.

Si $\begin{cases} 2-3x<0 \\ \log_{\frac{2}{3}} x>0 \\ x>0 \end{cases}$, $\begin{cases} x>\frac{2}{3} \\ \log_{\frac{2}{3}} x<0=\log_{\frac{2}{3}} 1 \\ x>0 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x>\frac{2}{3} \\ x<1 \\ x>0 \end{cases}$. La solució és: $x\in \left]\frac{2}{3},1\right[$.

La solució de la inequació és: $x\in \left]\frac{2}{3},1\right[$.

119.- Resoleu l'equació:

$4^{x-1}+4\cdot(0.25)^{x-2}=17$.

Selectivitat russa 1994 3. 3.

Solució:

$4^{x-1}+4\cdot(0.25)^{x-2}=17$.

$4^{x-1}+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=17$.

$\frac{1}{4}4^x+4^3\frac{1}{4^x}=17$.

Efectuant el canvi $a=4^x$, $a>0$.

$\frac{1}{4}a+\frac{64}{a}=17$.

$a^2-68a+256=0$. Resolent l'equació:

$a=4, 64$.

Desfent el canvi:

Si $a=4$, $4^x=4=4^1$, aleshores, $x=1$.

Si $a=64$, $4^x=64=4^3$, aleshores, $x=3$.

120.- Resoleu l'equació:

$3^{x+3}+3\cdot\sqrt{3^{-2x-4}}=10$.

Selectivitat russa 1994 4. 3.

Solució:

$3^{x+3}+3\cdot\sqrt{3^{-2x-4}}=10$.

$3^3\cdot 3^x+3\cdot\dfrac{1}{3^2}\dfrac{1}{3^x}=10$.

Efectuant el canvi $a=3^x$, $a>0$.

$27a+\dfrac{1}{3a}=10$.

$82a^2-30a+1=0$. Resolent l'equació: $a=\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{27}$.

Desfent el canvi:

Si $a=\dfrac{1}{3}$, $3^x=\dfrac{1}{3}=3^{-1}$. Aleshores, $x=-1$.

Si $a=\dfrac{1}{27}$, $3^x=\dfrac{1}{27}=3^{-3}$. Aleshores, $x=-3$.

121.- Resoleu l'equació:

$\left(\log_{\frac{1}{3}}(9x)\right)^2+\log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)=9$.

Selectivitat russa 1994 3. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $x>0$.

$\left(\log_{\frac{1}{3}}(9x)\right)^2+\log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)=9$. Canvi de variable:

$\left(\dfrac{\log_3(9x)}{\log_3\dfrac{1}{3}}\right)^2+\log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)=9$.

$\left(\dfrac{\log_3 9+\log_3 x}{-1}\right)^2+\log_3 x-\log_3 3=9$.

$(2+\log_3 x)^2+\log_3 x-1=9$.

Efectuant el canvi $a=\log_3 x$:

$(2+a)^2+a-1=9$.

$a^2+5a-6=0$. Resolent l'equació:

$a=-6,1$.

Desfent el canvi:

Si $a=-6$, $\log_3 x=-6$, aleshores, $x=3^{-6}$.

Si $a=1$, $\log_3 x=1$, aleshores, $x=3$.

122.- Resoleu l'equació:

$$\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{25}\right)\right)^2+\log_5\left(25x^2\right)=9\,.$$

Selectivitat russa 1994 4. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$.

$\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x}{25}\right)\right)^2-\log_5\left(25x^2\right)=9$. Canvi de base:

$$\left(\frac{\log_5\left(\frac{x}{25}\right)}{\log_5\frac{1}{5}}\right)^2-\log_5\left(25x^2\right)=9\,.$$

$$\left(\frac{\log_5 x-\log_5 25}{-1}\right)^2-\left(\log_5 25+2\log_5 x\right)=9\,.$$

$$\left(\log_5 x-2\right)^2-\left(2+2\log_5 x\right)=9\,.$$

Efectuant el canvi $a=\log_5 x$:

$(a-2)^2-2(1+a)=9$.

$a^2-6a+7=0$. Resolent l'equació:
$a=-1,7$.

Desfent el canvi:

Si $a=-1$, $\log_5 x=-1$, aleshores, $x=5^{-1}$.

Si $a=7$, $\log_5 x=7$, aleshores, $x=5^7$.

123.- Resoleu l'equació:

$\log_3 x\left(\log_9 x+7\right)=12\left(2+\log_9 x\right)$.

Selectivitat russa 1995 1. 2.

Solució:
El domini de les solucions és $x>0$.

$\log_3 x\left(\log_9 x+7\right)=12\left(2+\log_9 x\right)$. Canvi de base:

$$\log_3 x\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 9}+7\right)=12\left(2+\frac{\log_3 x}{\log_3 9}\right)$$

$$\log_3 x\left(\frac{\log_3 x}{2}+7\right)=12\left(2+\frac{\log_3 x}{2}\right).$$

Efectuant el canvi $a=\log_3 x$:

$$a\left(\frac{a}{2}+7\right)=12\left(2+\frac{a}{2}\right).$$

$a^2+2a-48=0$. Resolent l'equació:
$a=-8,6$.

Desfent el canvi:

Si $a = -8$, $\log_3 x = -8$, aleshores, $x = 3^{-8}$.

Si $a = 6$, $\log_3 x = 6$, aleshores, $x = 3^6$.

124.- Resoleu l'equació:

$5(6 - \log_2 x) = 2\log_4 x(\log_4 x - 3)$.

Selectivitat russa 1995 2. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $x > 0$.

$5(6 - \log_2 x) = 2\log_4 x(\log_4 x - 3)$. Canvi de base:

$$5(6 - \log_2 x) = 2\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4} - 3\right).$$

$$5(6 - \log_2 x) = \log_2 x\left(\frac{\log_2 x}{2} - 3\right).$$

Efectuant el canvi $a = \log_2 x$:

$$5(6 - a) = a\left(\frac{a}{2} - 3\right).$$

$a^2 + 4a - 60 = 0$. Resolent l'equació:

$a = -10, 6$.

Desfent el canvi:

Si $a = -10$, $\log_2 x = -10$, aleshores, $x = 2^{-10}$.

Si $a = 6$, $\log_2 x = 6$, aleshores, $x = 2^6$.

125.- Resoleu l'equació:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} \cdot 7^{10-x} = 49^{-1}.$$

Selectivitat russa 1995 1. 3.

Solució:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} \cdot 7^{10-x} = 49^{-1}.$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{x-10} = \frac{1}{49}.$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+x-10} = \left(\frac{1}{7}\right)^2.$$

$x^2 + x - 10 = 2$.

$x^2 + x - 8 = 0$. Resolent l'equació:

$x = -4, 3$.

126.- Resoleu l'equació:
$(0'2)^{x^2} \cdot 5^{17-2x} = 25$.
Selectivitat russa 1995 2. 3.

Solució:
$(0'2)^{x^2} \cdot 5^{17-2x} = 25$.
$5^{-x^2} \cdot 5^{17-2x} = 5^2$.
$5^{-x^2-2x+17} = 5^2$.
$-x^2 - 2x + 17 = 2$.
$x^2 + 2x - 15 = 0$. Resolent l'equació:
$x = -5, 3$.

127.- Resoleu la inequació:
$2^{\log_{1/6}\left(x^2+x\right)} \geq 0'5$.
Selectivitat russa 1995 1. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x^2 + x > 0$, és a dir, $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

$2^{\log_{1/6}\left(x^2+x\right)} \geq 0'5$.
$2^{\log_{1/6}\left(x^2+x\right)} \geq 2^{-1}$. La funció $y = 2^x$, és estrictament creixent en el seu domini:
$\log_{1/6}\left(x^2 + x\right) \geq -1$.
$\log_{1/6}\left(x^2 + x\right) \geq -1 = \log_{1/6}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$. La funció $y = \log_{1/6} x$, és estrictament decreixent en el seu domini:
$x^2 + x \leq 6$.
$(x+3)(x-2) \leq 0$.
La solució d'aquesta inequació és $x \in [-3, 2]$.
La solució de la inequació inicial és la intersecció de la solució anterior i el domini de les solucions:
$x \in [-3, 2] \cap \left(\left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[\right) = \left[-3, -1\right[\cup \left]0, 2\right]$.

128.- Resoleu la inequació:
$7^{\log_3\left(x^2-8x\right)} \geq \frac{1}{49}$.
Selectivitat russa 1995 2. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x^2 - 8x > 0$, és a dir, $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]8, +\infty\right[$.

$7^{-\log_3\left(x^2-8x\right)} \geq \frac{1}{49}$.
$7^{-\log_3\left(x^2-8x\right)} \geq 7^{-2}$. La funció $y = 7^x$, és estrictament creixent en el seu domini:

$-\log_3\left(x^2-8x\right)\geq -2$.

$\log_3\left(x^2-8x\right)\leq 2=\log_3 9$. La funció $y=\log_3 x$, és estrictament creixent en el seu domini:

$x^2-8x\leq 9$.

$(x+1)(x-9)\leq 0$.

La solució d'aquesta inequació és $x\in[-1,9]$.

La solució de la inequació inicial és la intersecció de la solució anterior i el domini de les solucions:

$x\in[-1,9]\cap\left(]-\infty,0[\cup]8,+\infty[\right)=[-1,0[\cup]8,9]$.

129.- Determineu el valor mínim del producte xy, on x, y satisfan el sistema d'equacions $\begin{cases}x+y=2a-1\\ x^2+y^2=\dfrac{3}{2}a^2-a+2\end{cases}$.

Selectivitat russa 1995 1. 7.

Solució:

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$:

$xy=\dfrac{1}{2}\left((x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)\right)$. Substituint els valors del sistema.

$$xy=\frac{1}{2}\left((2a-1)^2+\frac{3}{2}a^2-a+2\right).$$

$$xy=\frac{5}{4}\left(a^2-\frac{6}{5}a-\frac{2}{5}\right).$$

$$xy=\frac{5}{4}\left(\left(a-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{19}{20}\right).$$

El valor mínim del producte xy s'assoleix quan $a=\dfrac{3}{5}$ i el producte mínim és $\dfrac{-19}{20}$.

130.- Determineu el valor de a a fi que el producte xy, siga màxim si x, y satisfan el sistema d'equacions $\begin{cases}x-y=2a-1\\ x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\left(3a^2-2a+4\right)\end{cases}$.

Selectivitat russa 1995 2. 7.

Solució:

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$:

$xy=-\dfrac{1}{2}\left((x-y)^2-\left(x^2+y^2\right)\right)$. Substituint els valors del sistema.

$$xy=-\frac{1}{2}\left((2a-1)^2-\left(\frac{1}{2}\left(3a^2-2a+4\right)\right)\right).$$

$$xy=-\frac{5}{4}\left(a^2-\frac{6}{5}a-\frac{2}{5}\right).$$

$$xy=-\frac{5}{4}\left(\left(a-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{19}{20}\right).$$

El valor màxim del producte xy s'assoleix quan $a=\frac{3}{5}$ i el producte màxim és $\frac{19}{20}$.

131.- Resoleu l'equació:

$2^x\cdot 5^{x-1}=0'2\cdot 10^{2-x}$.

Selectivitat russa 1995 3. 1.

Solució:

$2^x\cdot 5^{x-1}=0'2\cdot 10^{2-x}$.

$\frac{1}{5}2^x\cdot 5^x=\frac{1}{5}\cdot 10^2\frac{1}{10^x}$.

$10^x\cdot 10^x=10^2$.

$10^{2x}=10^2$.

$2x=2$.

$x=1$.

132.- Resoleu l'equació:

$3^{x-3}\cdot 5^{x-1}=\frac{15^{3-x}}{9}$.

Selectivitat russa 1995 4. 1.

Solució:

$3^{x-3}\cdot 5^{x-1}=\frac{15^{3-x}}{9}$.

$\frac{1}{3^3}\frac{1}{5}3^x\cdot 5^x=\frac{1}{3^2}15^3\frac{1}{15^x}$

$15^x=3^3\cdot 5\frac{1}{3^2}3^3\cdot 5^3\frac{1}{15^x}$.

$15^{2x}=15^4$.

$2x=4$.

$x=2$.

133.- Resoleu l'equació:

$4\log_9 x+2=\log_3(12x+12)$.

Selectivitat russa 1995 3. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}x>0\\12x+12>0\end{cases}$, és a dir, $x>0$.

$4\log_9 x+2=\log_3(12x+12)$. Canvi de base:

$4\dfrac{\log_2 x}{\log_3 9}+2=\log_3(12x+12)$.

$2\log_3 x+\log_3 9=\log_3(12x+12)$.

$\log_3 9x^2=\log_3(12x+12)$

$9x^2=12x+12$. Resolent l'equació:

$x=3$.

134.- Resoleu l'equació:

$1-\log_7(4x+3)+4\log_{49} x=0$.

Selectivitat russa 1995 4. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x>0 \\ 4x+3>0 \end{cases}$, és a dir, $x>0$.

$1-\log_7(4x+3)+4\log_{49} x=0$. Canvi de base:

$1-\log_7(4x+3)+4\dfrac{\log_7 x}{\log_7 49}=0$

$\log_7 7-\log_7(4x+3)+2\log_7 x=0$

$\log_7\dfrac{7x^2}{4x+3}=0=\log_7 1$. Aleshores:

$\dfrac{7x^2}{4x+3}=1$.

$7x^2-4x-3=0$. Resolent l'equació:

$x=1$.

135.- Resoleu la inequació:

$\dfrac{x+2}{x}\le\dfrac{x}{x+1}$.

Selectivitat russa 1995 3. 3.

Solució:

$\dfrac{x+2}{x}\le\dfrac{x}{x+1}$.

$\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{x+1}\le$.

$\dfrac{3x+2}{x(x-1)}\le 0$.

La solució és, $x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left[\dfrac{-2}{3},0\right[$.

136.- Resoleu la inequació:

$\frac{x+2}{x+1} \geq \frac{x}{x+2}$.

Selectivitat russa 1995 4. 3.

Solució:

$\frac{x+2}{x+1} \geq \frac{x}{x+2}$.

$\frac{x+2}{x+1} - \frac{x}{x+2} \geq 0$.

$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)} \geq 0$.

La solució és, $x \in [-4, -2[\cup]1, +\infty[$.

137.- Resoleu la inequació:

$|\log_5(x+3)| > 1$.

Selectivitat russa 1995 3. 5.

Solució:

Recordem que: $|y| > k \geq 0$ si $y > k$, o bé, $y < -k$.

El domini de les solucions és $x+3 > 0$, és a dir, $x > -3$.

$|\log_5(x+3)| > 1$ si, $\log_5(x+3) > 1$, o bé, $\log_5(x+3) < -1$.

Si $\log_5(x+3) > 1 = \log_5 5$. La funció $y = \log_3 x$, és estrictament creixent en el seu domini:

$\begin{cases} x+3 > 5 \\ x > -3 \end{cases}$. La solució és, $x > 2$.

Si $\log_5(x+3) < -1 = \log_5 \frac{1}{5}$. La funció $y = \log_3 x$, és estrictament creixent en el seu domini:

$\begin{cases} x+3 < \frac{1}{5} \\ x > -3 \end{cases}$. La solució és, $-3 < x < -\frac{14}{5}$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions:

$x \in \left]-3, -\frac{14}{5}\right[\cup]2, +\infty[$.

138.- Resoleu la inequació:

$|\log_2(x-5)| > 3$.

Selectivitat russa 1995 4. 5.

Solució:

Recordem que: $|y| > k \geq 0$ si $y > k$, o bé, $y < -k$.

El domini de les solucions és $x-5 > 0$, és a dir, $x > 5$.

$\left|\log_2(x-5)\right| > 3$ si $\log_2(x-5) > 3$, o bé, $\log_2(x-5) < -3$.

Si $\log_2(x-5) > 3 = \log_2 8$. La funció $y = \log_2 x$, és estrictament creixent en el seu domini:

$\begin{cases} x-5 > 8 \\ x > 5 \end{cases}$. La solució és, $x > 13$.

Si $\log_2(x-5) < -3 = \log_2 \frac{1}{8}$. La funció $y = \log_2 x$, és estrictament creixent en el seu domini:

$\begin{cases} x-5 < \frac{1}{8} \\ x > 5 \end{cases}$. La solució és, $5 < x < \frac{41}{8}$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions:

$x \in \left]5, \frac{41}{8}\right[\cup \left]13, +\infty\right[$.

139.- Resoleu l'equació:

$25^{x+1} + 5^{x+2} - 50 = 0$.

Selectivitat russa 1995 5. 2.

Solució:

$25^{x+1} + 5^{x+2} - 50 = 0$.

$25 \cdot \left(5^x\right)^2 + 25 \cdot 5^x - 50 = 0$.

Efectuant el canvi $a = 5^x$, $a > 0$.

$25a^2 + 25a - 50 = 0$. Resolent l'equació:

$a = 1$.

Desfent el canvi:

$5^x = 1 = 5^0$.

$x = 0$.

140.- Resoleu l'equació:

$4^{x-1} - 2^{x-2} - 3 = 0$.

Selectivitat russa 1995 6. 2.

Solució:

$4^{x-1} - 2^{x-2} - 3 = 0$.

$\frac{1}{4}\left(2^x\right)^2 - \frac{1}{4}2^x - 3 = 0$.

Efectuant el canvi $a = 2^x$, $a > 0$.

$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a - 3 = 0$. Resolent l'equació:

$a = 4$.

Desfent el canvi:

$2^x = 4 = 2^2$.

$x = 2$.

141.- Resoleu l'equació:
$2|x-1| = 2 + x$.
Selectivitat russa 1995 5. 3.

Solució:
$2|x-1| = 2 + x$.
Si $x-1 \geq 0$, $x \geq 1$. L'equació quedaria:
$2(x-1) = 2 + x$. Resolent l'equació:
$x = 4$, que és solució ja que $x \geq 1$.
Si $x-2 < 0$, $x < 2$ l'equació quedaria:
$2(-x+1) = 2 + x$. Resolent l'equació:
$x = 0$, que és solució ja que $x < 2$.

142.- Resoleu l'equació:
$3|x+2| = 6 - x$.
Selectivitat russa 1995 6. 3.

Solució:
$3|x+2| = 6 - x$.
Si $x+2 \geq 0$, $x \geq -2$. L'equació quedaria:
$3(x+2) = 6 - x$. Resolent l'equació:
$x = 1$, que és solució ja que $x \geq -2$.
Si $x+2 < 0$, $x < -2$ l'equació quedaria:
$3(-x-2) = 6 - x$. Resolent l'equació:
$x = -6$, que és solució ja que $x < -2$.

143.- Resoleu l'equació:
$9^{\log_3 x} + 3x^2 < 16$.
Selectivitat russa 1995 5. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x > 0$.

$9^{\log_3 x} + 3x^2 < 16$.
$3^{\log_3 x^2} + 3x^2 < 16$.
$x^2 + 3x^2 < 16$.
$\begin{cases} 4x^2 - 16 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$. La solució és, $]0, 2[$.

144.- Resoleu l'equació:

$49^{\log_7 x} + 18 > 3x^2$.

Selectivitat russa 1995 6. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x > 0$.

$79^{\log_7 x} + 18 > 3x^2$.

$7^{\log_7 x^2} + 18 > 3x^2$.

$x^2 + 18 > 3x^2$.

$\begin{cases} 2x^2 - 18 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$. La solució és, $]0, 3[$.

145.- Resoleu la inequació:

$\frac{1-2x}{x-5} < \frac{1}{3-x}$.

Selectivitat russa 1996 1. 2.

Solució:

$\frac{1-2x}{x-5} < \frac{1}{3-x}$.

$\frac{1-2x}{x-5} - \frac{1}{3-x} < 0$.

$\frac{2(x-2)^2}{(x-5)(3-x)} < 0$. El numerador és $2(x-2)^2 \geq 0$, és zero en $x = 2$.

$(x-5)(3-x) < 0$, $x \neq 2$. Aleshores:

$x \in]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]5, +\infty[$.

146.- Resoleu la inequació:

$\frac{1}{4-x} > \frac{2x-5}{x-2}$.

Selectivitat russa 1996 2. 2.

Solució:

$\frac{1}{4-x} > \frac{2x-5}{x-2}$.

$\frac{1}{4-x} - \frac{2x-5}{x-2} > 0$.

$\frac{2(x-3)^2}{(4-x)(x-2)} > 0$. El numerador és $2(x-3)^2 \geq 0$, és zero en $x = 3$.

$(4-x)(x-2) > 0$, $x \neq 3$. Aleshores:

$x \in]2, 4[\sim \{3\}$.

147.- Resoleu l'equació:
$7^{2x}=\left(6-0'7^x\right)\cdot 100^x$.
Selectivitat russa 1996 1. 3.

Solució:
$7^{2x}=\left(6-0'7^x\right)\cdot 100^x$.
$$\frac{7^{2x}}{100^x}=6-\left(\frac{7}{10}\right)^x.$$
$$\left(\left(\frac{7}{10}\right)^x\right)^2=6-\left(\frac{7}{10}\right)^x.$$
Efectuant el canvi $a=\left(\frac{7}{10}\right)^x$, $a>0$
$a^2=6-a$. Resolent l'equació:
$a=2$.
Desfent el canvi:
$\left(\frac{7}{10}\right)^x=2$, aleshores, $x=\log_{7/10}2$.

148.- Resoleu l'equació:
$\left(3\cdot 0'75^x+4\right)\cdot 16^x=3^{2x}$.
Selectivitat russa 1996 2. 3.

Solució:
$\left(3\cdot 0'75^x+4\right)\cdot 16^x=3^{2x}$.
$$3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x+4=\frac{3^{2x}}{16^x}.$$
$$3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x+4=\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}.$$
Efectuant el canvi $a=\left(\frac{3}{4}\right)^x$, $a>0$
$3a+4=a^2$. Resolent l'equació:
$a=4$.
$\left(\frac{3}{4}\right)^x=4$, aleshores, $x=\log_{3/4}4$.

149.- Resoleu l'equació:
$\log_{25} x^6 + \log_5 (-x)^5 = 5$.
Selectivitat russa 1996 1. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x < 0$.

$\log_{25} x^6 + \log_5 (-x)^5 = 5$. Canvi de base:
$\frac{\log_5 (-x)^6}{\log_5 25} + \log_5 (-x)^5 = 5$.
$\log_5 - x^3 + \log_5 (-x)^5 = 5$.
$\log_5 x^8 = 5$. Definició de logaritme:
$x^8 = 5^5$, $x < 0$. Aleshores: $x = -\left(5^{5/8}\right)$.

150.- Resoleu l'equació:
$\log_3\left(-x^5\right) + 1 = \log_9 x^2$.
Selectivitat russa 1996 2. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x < 0$.

$\log_3\left(-x^5\right) + 1 = \log_9 x^2$. Canvi de base:
$\log_3\left(-x^5\right) + 1 = \frac{\log_3 (-x)^2}{\log_3 9}$.
$\log_3\left(-x^5\right) + \log_3 3 = \log_3 - x$
$\log_3\left(-3x^5\right) = \log_3 - x$.
$3x^5 = x$.
$x^4 = \frac{1}{3}$, $x < 0$. Aleshores, $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

151.- Resoleu la inequació:
$-3 < \left|x^2 - 9\right| < 16$.
Selectivitat russa 1996 3. 3.

Solució:
$-3 < \left|x^2 - 9\right| < 16$.
Si $x^2 - 9 \geq 0$, és a dir, si $x \in R \sim \left]-3, 3\right[$ el sistema d'inequacions quedaria:
$-3 < x^2 - 9 < 16$.
$\begin{cases} x^2 > 6 \\ x < 25 \\ x \in R \sim \left]-3, 3\right[\end{cases}$, la solució és: $x \in \left]-5, -\sqrt{6}\right[\cup \left]\sqrt{6}, 5\right[$.

Si $x^2-9<0$, és a dir, si $x\in\left]-3,3\right[$ el sistema d'inequacions quedaria:

$-3<-x^2+9<16$.

$\begin{cases} x^2>-7 \\ x<12 \\ x\in\left]-3,3\right[\end{cases}$, la solució és: $x\in\left]-\sqrt{12},\sqrt{12}\right[$.

Aleshores, la solució del sistema d'inequacions inicial és igual a la unió de les solucions anteriors, és a dir, $x\in\left]-5,5\right[$.

152.- Resoleu la inequació:

$-2<\left|4-x^2\right|<21$.

Selectivitat russa 1996 4. 3.

Solució:

$-2<\left|4-x^2\right|<21$.

Si $4-x^2>0$, és a dir, si $x\in\left]-2,2\right[$ el sistema d'inequacions quedaria:

$-2<4-x^2<21$.

$\begin{cases} x^2>-17 \\ x<6 \\ x\in\left]-2,2\right[\end{cases}$, la solució és: $x\in\left]-\sqrt{6},\sqrt{6}\right[$.

Si $4-x^2\leq 0$, és a dir, si $x\in R\sim\left]-2,2\right[$ el sistema d'inequacions quedaria:

$-2<x^2-4<21$.

$\begin{cases} x^2>2 \\ x<25 \\ x\in R\sim\left]-2,2\right[\end{cases}$, la solució és: $x\in\left]-5,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},5\right[$.

Aleshores, la solució del sistema d'inequacions inicial és igual a la unió de les solucions anteriors, és a dir, $x\in\left]-5,5\right[$.

153.- Resoleu la inequació:

$4^{x+1}+2^{x+2}-8<0$.

Selectivitat russa 1996 3. 5.

Solució:

$4^{x+1}+2^{x+2}-8<0$.

$4\cdot\left(2^x\right)^2+4\cdot 2^x-8<0$.

Efectuem el canvi $a=2^x$, la funció és creixent i definida positiva $a>0$:

$4a^2+4a-8<0$, $a>0$.

La solució del sistema d'inequacions és: $0<a<1$.

Desfent el canvi:

$0<2^x<1$

$2^x<1=2^0$.

Aleshores, $x<0$.

154.- Resoleu la inequació:

$9^{x+0'5}+3^{x+1}-18>0$.

Selectivitat russa 1996 4. 5.

Solució:

$9^{x+0'5}+3^{x+1}-18>0$.

$\sqrt{9}\cdot\left(3^{x}\right)^{2}+3\cdot 3^{x}-18>0$.

Efectuem el canvi $a=3^{x}$, la funció és creixent i definida positiva $a>0$:

$3a^{2}+3a-18>0$, $a>0$.

La solució del sistema d'inequacions és: $3<a$.

Desfent el canvi:

$3<3^{x}$

Aleshores, $x>1$.

155.- Resoleu la inequació:

$\dfrac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^{2}}}>0$.

Selectivitat russa 1996 5. 2.

Solució:

El domini de les solucions satisfà el sistema d'inequacions $\begin{cases}4+3x-x^{2}>0\\ x\neq 0\\ x\neq 1\end{cases}$.

És a dir, $x\in\left]-1,4\right[$.

$\dfrac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^{2}}}>0$. Notem que $\sqrt{4+3x-x^{2}}>0$

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}>0\\ x\in\left]-1,4\right[\end{cases}$.

La solució és $x\in\left]-1,0\right[\cup\left]1,4\right[$.

156.- Resoleu la inequació:

$\dfrac{x+1}{(2-x)\sqrt{8+2x-x^{2}}}<0$.

Selectivitat russa 1996 6. 2.

Solució:

El domini de les solucions satisfà el sistema d'inequacions $\begin{cases}8+2x-x^{2}>0\\ x\neq -1\\ x\neq 2\end{cases}$.

És a dir, $x\in\left]-2,4\right[\sim\{-1,2\}$.

$\dfrac{x+1}{(2-x)\sqrt{8+2x-x^2}}<0$. Notem que $\sqrt{8+2x-x^2}>0$.

$\begin{cases}\dfrac{x+1}{(2-x)}<0 \\ x\in\,]-2,\,4[\,\sim\{-1,\,2\}\end{cases}$.

La solució és $x\in\,]-2,-1[\,\cup\,]2,\,4[$.

157.- Resoleu l'equació:

$6^{\frac{x}{2}}-3\cdot 6^{1-\frac{3x}{2}}=3\cdot 6^{\frac{-x}{2}}$.

Selectivitat russa 1996 5. 3.

Solució:

$6^{\frac{x}{2}}-3\cdot 6^{1-\frac{3x}{2}}=3\cdot 6^{\frac{-x}{2}}$.

$6^{x/2}-3\cdot 6\cdot\dfrac{1}{\left(6^{x/2}\right)^2}=3\cdot\dfrac{1}{6^{x/2}}$.

Efectuant el canvi $a=6^{\frac{x}{2}}$, $a>0$.

$a-\dfrac{18}{a^3}=\dfrac{3}{a}$.

$a^4-3a^2-18=0$. Resolent l'equació:

$a=\sqrt{6}$.

Desfent el canvi:

$6^{\frac{x}{2}}=\sqrt{6}=6^{\frac{1}{2}}$. Aleshores:

$x=1$.

158.- Resoleu l'equació:

$2^{\frac{3x}{2}}-2^{5-\frac{x}{2}}=2^{2+\frac{x}{2}}$.

Selectivitat russa 1996 6. 3.

Solució:

$2^{\frac{3x}{2}}-2^{5-\frac{x}{2}}=2^{2+\frac{x}{2}}$.

$\left(2^{x/2}\right)^3-32\dfrac{1}{2^{x/2}}=4\cdot 2^{x/2}$

Efectuant el canvi $a=2^{\frac{x}{2}}$, $a>0$.

$a^3-\dfrac{32}{a}=4a$.

$a^4-4a^2-32=0$. Resolent l'equació:

$a=\sqrt{8}$.

Desfent el canvi:

$2^{\frac{x}{2}}=\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$. Aleshores: $x=3$.

159.- Resoleu el sistema d'equacions:
$$\begin{cases} \log_2\left(3y^2 - x^2\right) = 3 \\ 8\log_{16}(-x) + \log_2 y^2 = 4 \end{cases}.$$
Selectivitat russa 1996 5. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x < 0 \\ y \neq 0 \\ 3y^2 - x^2 > 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \log_2\left(3y^2 - x^2\right) = 3 \\ 8\log_{16}(-x) + \log_2 y^2 = 4 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} 3y^2 - x^2 = 2^3 \\ 8\dfrac{\log_2(-x)}{\log_2 16} + \log_2 y^2 = 4 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} 3y^2 - x^2 = 8 \\ 2\log_2(-x) + \log_2 y^2 = 4 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} 3y^2 - x^2 = 8 \\ \log_2 x^2y^2 = \log_2 2^4 \end{cases}.$$
$\begin{cases} 3y^2 - x^2 = 8 \\ x^2y^2 = 16 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$. Aquestes solucions pertanyen al domini.

160.- Resoleu el sistema d'equacions:
$$\begin{cases} \log_3\left(2x^2 - 9y^2\right) = 2 \\ \log_3 x^2 + 4\log_9(-y) = 2 \end{cases}.$$
Selectivitat russa 1996 6. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x \neq 0 \\ y < 0 \\ 2x^2 - 9y^2 > 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \log_3\left(2x^2 - 9y^2\right) = 2 \\ \log_3 x^2 + 4\log_9(-y) = 2 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} 2x^2 - 9y^2 = 3^2 \\ \log_3 x^2 + 4\dfrac{\log_3(-y)}{\log_3 9} = 2 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} 2x^2 - 9y^2 = 9 \\ \log_3 x^2 + 2\log_3(-y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 9y^2 = 9 \\ \log_3 x^2 y^2 = 2 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x^2 - 9y^2 = 9 \\ x^2 y^2 = 9 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$. Aquestes solucions pertanyen al domini.

161.- Resoleu la inequació:

$$\frac{3x}{x^2 - 9} < \frac{1}{x + 2}.$$

Selectivitat russa 1997 1. 2.

Solució:

$$\frac{3x}{x^2 - 9} < \frac{1}{x + 2}.$$

$$\frac{3x}{x^2 - 9} - \frac{1}{x + 2} < 0.$$

$\dfrac{2x^2 + 6x + 9}{(x+3)(x-3)(x+2)} < 0$. El numeradors $2x^2 + 6x + 9 > 0$:

$(x+3)(x-3)(x+2) < 0$.

La solució és $x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-2, 3\right[$.

162.- Resoleu la inequació:

$$\frac{3x}{x^2 - 25} \geq \frac{2}{x + 1}.$$

Selectivitat russa 1997 2. 2.

Solució:

$$\frac{3x}{x^2 - 25} < \frac{2}{x + 1}.$$

$$\frac{3x}{x^2 - 25} - \frac{2}{x + 1} \geq 0.$$

$\dfrac{x^2 + 3x + 50}{(x+5)(x-5)(x+1)} \geq 0$. El numeradors $x^2 + 3x + 50 > 0$:

$(x+5)(x-5)(x+5) > 0$.

La solució és $x \in \left]-5, -1\right[\cup \left]5, +\infty\right[$.

163.- Resoleu l'equació:

$$\log_{100}\left(\frac{x^2}{9}\right)+\log_{10}(x+13)=1.$$

Selectivitat russa 1997 1. 3.

Solució:
El domini de les solucions és $x>-13$, $x\neq 0$.

$\log_{100}\left(\frac{x^2}{9}\right)+\log_{10}(x+13)=1$. Canvi de base:

$$\frac{\log_{10}\left(\frac{x^2}{9}\right)}{\log_{10}100}+\log_{10}(x+13)=1.$$

$$\log_{10}\frac{\sqrt{x^2}}{3}+\log_{10}(x+13)=\log_{10}10 \qquad (1)$$

Suposem que $x>0$. L'equació (1) quedaria:

$\log_{10}\frac{x}{3}(x+13)=\log_{10}10$.

$\frac{x}{3}(x+13)=10$. Resolent l'equació:

$x=2$.

Suposem que $-13<x<0$. L'equació (1) quedaria:

$\log_{10}\frac{-x}{3}(x+13)=\log_{10}10$.

$-\frac{x}{3}(x+13)=10$. Resolent l'equació:

$x=-10,\,-3$.

164.- Resoleu l'equació:

$$\log_{36}x^2+\log_6(x+5)=1.$$

Selectivitat russa 1997 2. 3.

Solució:
El domini de les solucions és $x>-5$, $x\neq 0$.

$\log_{36}x^2+\log_6(x+5)=1$. Canvi de base:

$$\frac{\log_6 x^2}{\log_6 36}+\log_6(x+5)=1.$$

$$\log_6\sqrt{x^2}+\log_6(x+5)=\log_6 6 \qquad (1)$$

Suposem que $x>0$. L'equació (1) quedaria:

$\log_6 x(x+5)=\log_6 6$.

$x(x+5)=6$. Resolent l'equació:

$x=1$.

Suposem que $-13<x<0$. L'equació (1) quedaria:

$\log_6 -x(x+5)=\log_6 6$.

$-x(x+5)=6$. Resolent l'equació:

$x=-3,\,-2$.

165.- Resoleu la inequació:

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} < 25^{\frac{-1}{x}}$.

Selectivitat russa 1997 1. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x \neq 0$.

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} < 25^{\frac{-1}{x}}$.

$5^{-x+1} < 5^{-2/x}$. La funció $y = 5^x$ és estrictament creixent:

$-x+1 < \frac{-2}{x}$.

$-x+1+\frac{2}{x} < 0$.

$\frac{-x^2+x+2}{x} < 0$.

$\frac{-(x+1)(x-2)}{x} < 0$.

La solució és, $x \in \left]-1, 0\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

166.- Resoleu la inequació:

$4^{x-1} < \frac{16}{2^{\frac{4}{x}}}$.

Selectivitat russa 1997 2. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $x \neq 0$.

$4^{x-1} < \frac{16}{2^{\frac{4}{x}}}$.

$2^{2(x-1)} < 2^{4-\frac{4}{x}}$, la funció $y = 2^x$ és estrictament creixent:

$2x-2 < 4-\frac{4}{x}$.

$2x-6+\frac{4}{x} < 0$.

$\frac{2x^2-6x+4}{x} < 0$.

$\frac{2(x-1)(x-2)}{x} < 0$.

La solució és, $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, 2\right[$.

167.- Resoleu l'equació:
$49^{x+1}+6\cdot 7^{x}-6^{-\log_6 7}=0$.
Selectivitat russa 1997 3. 2.

Solució:
$49^{x+1}+6\cdot 7^{x}-6^{-\log_6 7}=0$. Definició de logaritme i propietats de potències:
$49\cdot\left(7^{x}\right)^{2}+6\cdot 7^{x}-\dfrac{1}{7}=0$
Efectuant el canvi $a=7^{x}$, $a>0$:
$49a^{2}+6a-\dfrac{1}{7}=0$. Resolent l'equació:
$a=\dfrac{1}{49}$.
Desfent el canvi:
$7^{x}=\dfrac{1}{49}=7^{-2}$.
$x=-2$.

168.- Resoleu l'equació:
$4^{x+3}-7\cdot 2^{x+3}+2^{\log_2 3}-11=0$.
Selectivitat russa 1997 4. 2.

Solució:
$4^{x+3}-7\cdot 2^{x+3}+2^{\log_2 3}-11=0$. Definició de logaritme i propietats de potències:
$64\cdot\left(2^{x}\right)^{2}-7\cdot 8\cdot 2^{x}+3-11=0$.
Efectuant el canvi $a=2^{x}$, $a>0$:
$64a^{2}-56a-8=0$. Resolent l'equació:
$a=1$.
Desfent el canvi:
$2^{x}=1=2^{0}$.
$x=0$

169.- Resoleu la inequació:
$\sqrt{x^{2}+2x+9}\leq x+|2x-3|$.
Selectivitat russa 1997 3. 3.

Solució:
Notem que $x^{2}+2x+9>0$ i que $\sqrt{x^{2}+2x+9}>0$
Suposem que $2x-3\geq 0$, la inequació quedaria:
$\sqrt{x^{2}+2x+9}\leq x+2x-3$.
$\sqrt{x^{2}+2x+9}\leq 3x-3$. Elevant al quadrat:
$x^{2}+2x+9\leq 9\left(x^{2}-2x+1\right)$.
$\begin{cases}2x^{2}-5x\geq 0\\ 2x-3>0\end{cases}$. La solució és $x\in\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right[$.

Suposem que $2x-3<0$, la inequació quedaria:

$\sqrt{x^2+2x+9} \le x-2x+3$.

$\sqrt{x^2+2x+9} \le -x+3$. Elevant al quadrat:

$x^2+2x+9 \le x^2-6x+9$.

$\begin{cases} 8x \le 0 \\ 2x-3<0 \end{cases}$. La solució és $x \in \left]-\infty, 0\right]$.

La solució de la iniquació inicial és la unió de les dues solucions:

$x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

170.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{x^2+3x+9}+2x \le 3|x+1|$.

Selectivitat russa 1997 4. 3.

Solució:

Notem que $x^2+3x+9>0$ i que $\sqrt{x^2+3x+9}>0$

Suposem que $x+1 \ge 0$, la inequació quedaria:

$\sqrt{x^2+3x+9}+2x \le 3(x+1)$.

$\sqrt{x^2+3x+9} \le x+3$. Elevant al quadrat:

$x^2+3x+9 \le x^2+6x+9$.

$\begin{cases} 3x \ge 0 \\ x+1>0 \end{cases}$. La solució és $x \in \left[0, +\infty\right[$.

Suposem que $x+1<0$, la inequació quedaria:

$\sqrt{x^2+3x+9}+2x \le 3(-x-1)$.

$\sqrt{x^2+3x+9} \le -5x-3$. Elevant al quadrat:

$x^2+3x+9 \le 25x^2+30x+9$.

$\begin{cases} 25x^2+27x \ge 0 \\ x+1<0 \end{cases}$. La solució és $x \in \left]-\infty, \frac{-9}{8}\right]$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions:

$x \in \left]-\infty, \frac{-9}{8}\right] \cup \left[0, +\infty\right[$.

171.- Resoleu la inequació:

$\log_6 \log_{1/\sqrt[6]{6}}(x+1) > 1$.

Selectivitat russa 1997 3. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+1>0 \\ \log_{1/\sqrt[6]{6}}(x+1) > 0 = \log_{1/\sqrt[6]{6}} 1 \end{cases}$, és a dir, $x \in \left]-1, 0\right[$.

$\log_6 \log_{1/\sqrt[6]{6}}(x+1) > 1$.

$\log_6 \log_{1/\sqrt[6]{6}}(x+1) > \log_6 6$. La funció $y=\log_6 x$ és estrictament creixent:

$\log_{1/\sqrt[6]{6}}(x+1) > 6 = \log_{1/\sqrt[6]{6}}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}\right)^6$.

$\log_{1/\sqrt[6]{6}}(x+1) > \log_{1/\sqrt[6]{6}}\frac{1}{6}$. La funció $y=\log_{1/\sqrt[6]{6}} x$ és estrictament decreixent:

$\begin{cases} x+1<\frac{1}{6} \\ -1<x<0 \end{cases}$. La solució és $x\in\left]-1,\frac{-5}{6}\right[$.

172.- Resoleu la inequació:

$\log_7 \log_{1/\sqrt[7]{7}}(x-4)<1$.

Selectivitat russa 1997 4. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x-4>0 \\ \log_{1/\sqrt[7]{7}}(x-4)>0=\log_{1/\sqrt[7]{7}}1 \end{cases}$, és a dir, $x\in\left]4,5\right[$.

$\log_7 \log_{1/\sqrt[7]{7}}(x-4)<1=\log_7 7$.

$\log_{1/\sqrt[7]{7}}(x-4)<7=\log_{1/\sqrt[7]{7}}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{7}}\right)^7$.

$\begin{cases} x-4>\frac{1}{7} \\ 4<x<5 \end{cases}$. La solució és $x\in\left]\frac{29}{7},5\right[$.

173.- Resoleu l'equació:

$6\frac{2^{x-3}}{2^x-3^x}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Selectivitat russa 1997 5. 2.

$6\frac{2^{x-3}}{2^x-3^x}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

$6\frac{\frac{2^{x-3}}{2^x}}{\frac{2^x-3^x}{2^x}}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

$6\frac{\frac{1}{8}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^x}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Efectuant el canvi $a=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $a>0$

$\frac{3}{4}\frac{1}{1-a}=1+a$.

$4a^2=1$. Resolent l'equació:

$a = \frac{1}{2}$.

Desfent el canvi:

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$. Aleshores, $x = \log_{3/2}\frac{1}{2}$.

174.- Resoleu l'equació:

$$15\frac{3^{x-3}}{3^x - 2\cdot 5^x} = 1 + 2\left(\frac{5}{3}\right)^x.$$

Selectivitat russa 1997 6. 2.

Solució:

$$15\frac{3^{x-3}}{3^x - 2\cdot 5^x} = 1 + 2\left(\frac{5}{3}\right)^x.$$

$$15\frac{\frac{3^{x-3}}{3^x}}{\frac{3^x - 2\cdot 5^x}{3^x}} = 1 + 2\left(\frac{5}{3}\right)^x.$$

$$15\frac{\frac{1}{27}}{1 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x} = 1 + 2\left(\frac{5}{3}\right)^x.$$

Efectuant el canvi $a = \left(\frac{5}{3}\right)^x$, $a > 0$

$$\frac{5}{9}\frac{1}{1-2a} = 1 + 2a$$

$4a^2 = \frac{4}{9}$. Resolent l'equació:

$a = \frac{1}{3}$.

Desfent el canvi:

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{1}{3}$. Aleshores, $x = \log_{5/3}\frac{1}{3}$.

175.- Resoleu la inequació:

$$\sqrt{\log_4(x-5)} > \log_{\frac{1}{4}}\frac{64}{x-5}.$$

Selectivitat russa 1997 5. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x-5>0 \\ \log_4(x-5) \geq 0 = \log_4 1 \end{cases}$, és a dir, $x \in [6, +\infty[$.

$\sqrt{\log_4(x-5)} > \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{64}{x-5}$. Canvi de base:

$\sqrt{\log_4(x-5)} > \log_4 \dfrac{x-5}{64}$.

Efectuant el canvi $a = \log_4(x-5)$:

$\sqrt{a} > a-3$, $a \geq 0$ ja que $x \in [6, +\infty[$.

Si $a-3>0$. Elevant al quadrat:

$a > a^2 + 9 - 6a$.

$a^2 - 7a + 9 < 0$, $a > 3$. Resolent el sistema d'inequacions:

$0 \leq a < \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Desfent el canvi:

$0 \leq \log_4(x-5) < \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

$\log_4 1 \leq \log_4(x-5) < \log_4 4^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}$ La funció $y = \log_4 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$1 \leq x-5 < 4^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}$

$6 \leq x < 4^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} + 5$.

176.- Resoleu la inequació:

$\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27(x+4)} > 5\sqrt{\log_3(x+4)}$.

Selectivitat russa 1997 6. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+4>0 \\ \log_3(x+4) \geq 0 = \log_3 1 \end{cases}$, és a dir, $x \in [-3, +\infty[$.

$\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27(x+4)} > 5\sqrt{\log_3(x+4)}$. Canvi de base:

$\log_3(27(x+4)) > 5\sqrt{\log_3(x+4)}$.

$3 + \log_3(x+4) > 5\sqrt{\log_3(x+4)}$.

Efectuant el canvi $a = \log_3(x+4)$, $a \geq 0$.

$3 + a > 5\sqrt{a}$. Elevant al quadrat:

$a^2 + 6a + 9 > 25a$.

$a^2 - 19a + 9 > 0$, $a \geq 0$. Resolent el sistemea d'inequacions:

$a \in \left[0, \dfrac{19-5\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{19+5\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$.

Desfent el canvi:

$0 \leq \log_3(x+4) < \dfrac{19-5\sqrt{13}}{2}$,o bé, $\dfrac{19+5\sqrt{13}}{2} < \log_3(x+4)$.

$\log_3 1 \leq \log_3(x+4) < \log_3 3^{\frac{19-5\sqrt{13}}{2}}$,o bé, $\log_3 3^{\frac{19+5\sqrt{13}}{2}} < \log_3(x+4)$.

La funció $y = \log_4 x$ és estrictament creixent en el seu domini:

$1 \leq x+4 < 3^{\frac{19-5\sqrt{13}}{2}}$, o bé, $3^{\frac{19+5\sqrt{13}}{2}} < x+4$

$$x \in \left[-3, 4 < 3^{\frac{19-5\sqrt{13}}{2}} - 4\right[\cup \left]3^{\frac{19+5\sqrt{13}}{2}} - 4, +\infty\right[.$$

177.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y - |x-3| = 1 \\ |x-y| = 3 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1997 5. 5.

Solució:

Si $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$, el sistema quedaria:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-y \geq 0 \\ y-x+3=1 \\ x-y=3 \end{cases}, \begin{cases} x \geq 3 \\ x-y \geq 0 \\ y-x=-2 \\ x-y=3 \end{cases}.$$ El sistema no té solució.

Si $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-y < 0 \end{cases}$, el sistema quedaria:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-y < 0 \\ y-x+3=1 \\ -x+y=3 \end{cases}, \begin{cases} x \geq 3 \\ x-y \geq 0 \\ y-x=-2 \\ x-y=3 \end{cases}.$$ El sistema no té solució.

Si $\begin{cases} x-3 < 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$, el sistema quedaria:

$$\begin{cases} x-3 < 0 \\ x-y \geq 0 \\ y+x-3=1 \\ x-y=3 \end{cases}, \begin{cases} x < 3 \\ x-y \geq 0 \\ y+x=4 \\ x-y=3 \end{cases}.$$ El sistema no té solució.

Si $\begin{cases} x-3 < 0 \\ x-y < 0 \end{cases}$, el sistema quedaria:

$$\begin{cases} x-3 < 0 \\ x-y < 0 \\ y+x-3=1 \\ -x+y=3 \end{cases}, \begin{cases} x < 3 \\ x-y \geq 0 \\ y+x=4 \\ -x+y=3 \end{cases}. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

178.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y-|x+2|=2 \\ \big||x+y|=5 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1997 6. 5.

Solució:

Si $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$, el sistema quedaria:

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+y\geq 0 \\ y-x-2=2 \\ x+y=5 \end{cases}, \begin{cases} x\geq -2 \\ x+y\geq 0 \\ y-x=4 \\ x+y=5 \end{cases}. \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases}.$$

Si $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+y<0 \end{cases}$, el sistema quedaria:

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+y<0 \\ y-x-2=2 \\ x+y=-5 \end{cases}, \begin{cases} x\geq -2 \\ x+y<0 \\ y-x=4 \\ x+y=-5 \end{cases}.$$ El sistema no té solució.

Si $\begin{cases} x+2<0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$, el sistema quedaria:

$$\begin{cases} x+2<0 \\ x+y\geq 0 \\ y+x+2=2 \\ x+y=5 \end{cases}, \begin{cases} x\geq -2 \\ x+y<0 \\ y+x=0 \\ x+y=5 \end{cases}.$$ El sistema no té solució.

$$\begin{cases} x+2<0 \\ x+y<0 \\ y+x+2=2 \\ x+y=-5 \end{cases}, \begin{cases} x\geq -2 \\ x+y<0 \\ y+x=0 \\ x+y=-5 \end{cases}.$$ El sistema no té solució.

179.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{4x-x^2-3}=3x-6$.

Selectivitat russa 1998 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} 3x-6\geq 0 \\ 4x-x^2-3\geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x\in[2,3]$.

$\sqrt{4x-x^2-3}=3x-6$. Elevant al quadrat:

$4x-x^2-3=9x^2-36x+36$

$10x^2-40x+39=0$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{20+\sqrt{10}}{10}$. Notem que $2<\dfrac{20+\sqrt{10}}{10}<3$.

180.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{5x - x^2 + 6} = 5 - 2x$.

Selectivitat russa 1998 2. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ 5x - x^2 + 6 \geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x \in \left[-1, \frac{5}{2}\right]$.

$\sqrt{5x - x^2 + 6} = 5 - 2x$.

$-x^2 + 5x + 6 = 4x^2 - 206x + 25$.

$5x^2 - 25x + 19 = 0$. Resolent l'equació:

$x = \frac{25 - 7\sqrt{5}}{10}$. Notem que $-1 < \frac{25 - 7\sqrt{5}}{10} < \frac{5}{2}$.

181.- Resoleu la inequació:

$3^{\frac{2x-15}{x}} > \sqrt[3]{27^{2x+15}}$.

Selectivitat russa 1998 1. 3.

Solució:

$3^{\frac{2x-15}{x}} > \sqrt[3]{27^{2x+15}}$.

$3^{\frac{2x-15}{x}} > \sqrt[3]{\left(3^{2x+15}\right)^3}$.

$3^{\frac{2x-15}{x}} > 3^{2x+15}$. La funció $y = 3^x$ és estrictament creixent:

$\frac{2x-15}{x} > 2x + 15$.

$\frac{2x-15}{x} - (2x + 15) > 0$.

$\frac{-2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 5)}{x} > 0$.

La solució és, $x \in \left]-\infty, -5\right[\cup \left]\frac{-3}{2}, 0\right[$.

182.- Resoleu la inequació:

$5^{\frac{3x-4}{x}} > \sqrt[3]{125^{2x+12}}$.

Selectivitat russa 1998 2. 3.

Solució:

$5^{\frac{3x-4}{x}} > \sqrt[3]{125^{2x+12}}$.

$5^{\frac{3x-4}{x}} > \sqrt[3]{\left(5^{2x+12}\right)^3}$.

$5^{\frac{3x-4}{x}} > 5^{2x+12}$. La funció $y = 5^x$ és estrictament creixent:

$\dfrac{3x-4}{x} > 2x+12$.

$\dfrac{3x-4}{x} - (2x+12) > 0$.

$\dfrac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+4)}{x} > 0$.

La solució és, $x \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left]\dfrac{-1}{2}, 0\right[$.

183.- Resoleu el sistema d'equacions:

$\begin{cases} 5^{\log_4(2x-y)} = 1 \\ 9^{3x-2y} - 6 \cdot 3^{3x-2y} = 27 \end{cases}$.

Selectivitat russa 1998 1. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $2x - y > 0$.

$\begin{cases} 5^{\log_4(2x-y)} = 1 \\ 9^{3x-2y} - 6 \cdot 3^{3x-2y} = 27 \end{cases}$.

$\begin{cases} 5^{\log_4(2x-y)} = 1 = 5^0 \\ \left(3^{3x-2y}\right)^2 - 6 \cdot 3^{3x-2y} = 27 \end{cases}$.

$\begin{cases} \log_4(2x-y) = 0 = \log_4 1 \\ \left(3^{3x-2y}\right)^2 - 6 \cdot 3^{3x-2y} = 27 \end{cases}$.

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ \left(3^{3x-2y}\right)^2 - 6 \cdot 3^{3x-2y} = 27 \end{cases}$.

$\begin{cases} y = 2x-1 \\ \left(3^{3x-2(2x-1)}\right)^2 - 6 \cdot 3^{3x-2(2x-1)} = 27 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x-1 \\ \left(3^{-x+2}\right)^2 - 6 \cdot 3^{-x+2} = 27 \end{cases}$.

Efectuant el canvi $a = 3^{-x+2}$, $a > 0$.

$\begin{cases} y = 2x-1 \\ a^2 - 6a = 27 \end{cases}$. Resolent l'equació en la incògnita a:

$\begin{cases} y = 2x-1 \\ a = 9 \end{cases}$. Desfent el canvi:

$\begin{cases} y = 2x-1 \\ 3^{-x+2} = 9 = 3^2 \end{cases}$.

$\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$.

184.- Resoleu el sistema d'equacions:
$$\begin{cases} 5^{\log_7(y-x)}=1 \\ 4^{5y-6x}-5\cdot 2^{5y-6x}=24 \end{cases}.$$
Selectivitat russa 1998 2. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $y-x>0$.
$$\begin{cases} 5^{\log_7(y-x)}=1 \\ 4^{5y-6x}-5\cdot 2^{5y-6x}=24 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} 5^{\log_7(y-x)}=1=5^0 \\ \left(2^{5y-6x}\right)^2-5\cdot 2^{5y-6x}=24 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \log_7(y-x)=0=\log_7 1 \\ \left(2^{5y-6x}\right)^2-5\cdot 2^{5y-6x}=24 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} y-x=1 \\ \left(2^{5y-6x}\right)^2-5\cdot 2^{5y-6x}=24 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y=x+1 \\ \left(2^{5(x+1)-6x}\right)^2-5\cdot 2^{5(x+1)-6x}=24 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y=x+1 \\ \left(2^{-x+5}\right)^2-5\cdot 2^{-x+5}=24 \end{cases}.$$
Efectuant el canvi $a=2^{-x+5}$, $a>0$.
$$\begin{cases} y=x+1 \\ a^2-5a=24 \end{cases}.$$ Resolent l'equació en la incògnita a:
$$\begin{cases} y=x+1 \\ a^2-5a=24 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} y=x+1 \\ a=8 \end{cases}.$$ Desfent el canvi:
$$\begin{cases} y=x+1 \\ 2^{-x+5}=8=2^3 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}.$$

185.- Resoleu la inequació
$\left|x^2+3x-4\right|>x$.
Selectivitat russa 1998 3. 2.

Solució:
L'equació $x^2+3x-4=0$, te solucions $x=-4,\ x=1$.
Si $x<-4$, o bé $x>1$, la inequació quedaria:
$x^3+3x-4>x$.

$x^2+2x-4>0$, $x\in\,]-\infty,-4[\,\cup\,]1,+\infty[$.

La solució és $x\in\,]-\infty,-4[\,\cup\,]-1+\sqrt{5},+\infty[$ (1)

Si $-4\le x\le 1$, la inequació quedaria:

$-x^2-3x+4>x$.

$-x^2-4x+4>0$, $x\in[-4,1]$.

La solució és $x\in\,]-4,-2+2\sqrt{2}[$ (2)

La solució de la inequació inicial és la unió de les solucions (1) (2):

$x\in\,]-\infty,-2+2\sqrt{2}[\,\cup\,]-1+\sqrt{5},+\infty[$.

186.- Resoleu la inequació

$\left|x^2+2x-3\right|>0$.

Selectivitat russa 1998 4. 2.

Solució:

L'equació $x^2+2x-3=0$, te solucions $x=-3, x=1$.

Si $x<-3$, o bé $x>1$, la inequació quedaria:

$x^3+2x-3>x$

$x^3+x-3>0$, $x\in\,]-\infty,-3[\,\cup\,]1,+\infty[$

La solució és $x\in\,]-\infty,-3[\,\cup\left]\frac{-1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right[$ (1)

Si $-3\le x\le 1$, la inequació quedaria:

$-x^2-2x+3>x$.

$-x^2-3x+3>0$, $x\in[-3,1]$.

La solució és $x\in\left[-3,\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[$ (2)

La solució de la inequació inicial és la unió de les solucions (1) (2):

$x\in\left]-\infty,\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right[$.

187.- Resoleu l'equació:

$81^{\frac{2}{x}}+12\cdot 3^{\frac{4}{x}-1}-21=0$.

Selectivitat russa 1998 3. 3.

Solució:

$81^{\frac{2}{x}}+12\cdot 3^{\frac{4}{x}-1}-21=0$.

$\left(3^{4/x}\right)^2+12\cdot\frac{1}{3}\cdot 3^{4/x}-21=0$.

Efectuant el canvi $a=3^{\frac{4}{x}}$, $a>0$.

$a^2+4a-21=0$. Resolent l'equació:

$a=3$.

Desfent el canvi:

$3^{\frac{4}{x}} = 3 = 3^1$.

$\frac{4}{x} = 1$.

$x = 4$.

188.- Resoleu l'equació:

$64^{\frac{1}{x}} + 4 \cdot 2^{\frac{3}{x}-1} - 24 = 0$.

Selectivitat russa 1998 4. 3.

Solució:

$64^{\frac{1}{x}} + 4 \cdot 2^{\frac{3}{x}-1} - 24 = 0$.

$\left(2^{3/x}\right)^2 + 2 \cdot 2^{3/x} - 24 = 0$.

Efectuant el canvi $a = 2^{\frac{3}{x}}$, $a > 0$.

$a^2 + 2a - 24 = 0$.

$a = 4$.

Desfent el canvi:

$2^{\frac{3}{x}} = 4 = 2^2$.

$\frac{3}{x} = 2$.

$x = \frac{3}{2}$.

189.- Resoleu la inequació:

$\log_2 \left\{ \log_{\frac{9}{16}} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{1}{4} \right) \right\} \le -1.$

Selectivitat russa 1998 3. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} \left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{1}{4} > 0 \\ \log_{\frac{6}{16}} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{1}{4} \right) > 0 = \log_{\frac{6}{16}} 1 \end{cases}$, és a dir, $\log_{\frac{5}{4}} \frac{1}{4} < x < 1$.

$\log_2 \left\{ \log_{\frac{9}{16}} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{1}{4} \right) \right\} \le -1.$

$\log_2 \left\{ \log_{\frac{9}{16}} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{1}{4} \right) \right\} \le -1 = \log_2 \frac{1}{2}$. La funció $y = \log_2 x$ és estrictament creixent:

$\log_{\frac{9}{16}}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^x-\frac{1}{4}\right)\le\frac{1}{2}=\log_{\frac{9}{16}}\left(\frac{9}{16}\right)^{1/2}$. La funció $y=\log_{\frac{9}{16}}x$ és estrictament decreixent:

$\left(\frac{5}{4}\right)^x-\frac{1}{4}\ge\left(\frac{9}{16}\right)^{1/2}=\frac{3}{4}$.

$\left(\frac{5}{4}\right)^x\ge 1=\left(\frac{5}{4}\right)^0$, $\log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{4}<x<1$. La funció $y=\left(\frac{5}{4}\right)^x$ és estrictament creixent:

$0\le x\le 1$.

190.- Resoleu la inequació:

$\log_{\frac{1}{3}}\left\{\log_{\frac{64}{27}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)\right\}\ge 1$.

Selectivitat russa 1998 4. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\log_{\frac{64}{27}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)>0=\log_{\frac{64}{27}}1$, és a dir, $x<1$.

$\log_{\frac{1}{3}}\left\{\log_{\frac{64}{27}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)\right\}\ge 1$.

$\log_{\frac{1}{3}}\left\{\log_{\frac{64}{27}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)\right\}\ge 1=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$. La funció $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ és estrictament decreixent:

$\log_{\frac{64}{27}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)\le\frac{1}{3}$.

$\log_{\frac{64}{27}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)\le\frac{1}{3}=\log_{\frac{64}{27}}\left(\frac{64}{27}\right)^{1/3}$. La funció $y=\log_{\frac{64}{27}}x$ és estrictament creixent:

$\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\le\left(\frac{64}{27}\right)^{1/3}=\frac{4}{3}$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^x\le 1=\left(\frac{2}{3}\right)^0$, $x<1$. La funció $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ és estrictament decreixent:

$0\le x\le 1$.

191.- Resoleu l'equació:

$\log_5(x+1)-\log_{25}\left(x^2-4x+4\right)=\log_5 2$.

Selectivitat russa 1998 5. 2.

Solució:

El domini de les solucions és, $\begin{cases}x+1>0\\ x^2-4x+4>0\end{cases}$, és a dir, $\begin{cases}x>-1\\ x\ne 2\end{cases}$.

$\log_5(x+1)-\log_{25}\left(x^2-4x+4\right)=\log_5 2$. Canvi de base:

$\log_5(x+1)-\frac{\log_5\left(x^2-4x+4\right)}{\log_5 25}=\log_5 2$

$\log_5(x+1)-\log_5\sqrt{x^2-4x+4}=\log_5 2$.

$\log_5\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\log_5 2$.

$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+4}}=2$.

$x+1=2\sqrt{x^2-4x+4}$. Elevant al quadrat:

$3x^2-18x+15=0$, $\begin{cases}x>-1\\x\neq 2\end{cases}$. Resolent l'equació:

$x=1,5$.

192.- Resoleu l'equació:

$\log_6(x-3)-\log_{36}\left(x^2-12x+36\right)=\log_6 2$.

Selectivitat russa 1998 6. 2.

Solució:

El domini de les solucions és, $\begin{cases}x-3>0\\x^2-12x+36>0\end{cases}$, és a dir, $\begin{cases}x>3\\x\neq 6\end{cases}$.

$\log_6(x-3)-\log_{36}\left(x^2-12x+36\right)=\log_6 2$. Canvi de base:

$\log_6(x-3)-\frac{\log_6\left(x^2-12x+36\right)}{\log_6 36}=\log_6 2$.

$\log_6\frac{x-3}{\sqrt{x^2-12x+36}}=\log_6 2$.

$\frac{x-3}{\sqrt{x^2-12x+36}}=2$.

$x-3=2\sqrt{x^2-12x+36}$. Elevant al quadrat:

$3x^2-42x+135=0$, $\begin{cases}x>3\\x\neq 6\end{cases}$. Resolent l'equació:

$x=5, 9$.

193.- Resoleu la inequació:

$25^{\frac{2x+1}{2}}-2^{\frac{2x+3}{2}}<2^{\frac{2x+7}{2}}+5^{2x}$.

Selectivitat russa 1998 5. 3.

Solució:

$25^{\frac{2x+1}{2}}-2^{\frac{2x+3}{2}}<2^{\frac{2x+7}{2}}+5^{2x}$.

$25^{\frac{2x+1}{2}}-25^{\frac{2x}{2}}<2^{\frac{2x+7}{2}}+2^{\frac{2x+3}{2}}$.

$4\cdot 25^{x}<5\cdot 2^{\frac{2x+3}{2}}$.

$4\cdot 25^{x} < 25^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{x}$. Com que $2^{x} > 0$.

$\left(\frac{25}{2}\right)^{x} < \left(\frac{25}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. La funció $y=\left(\frac{25}{2}\right)^{x}$ és estrictament creixent:

$x < \frac{1}{2}$.

194.- Resoleu la inequació:

$2^{2x+3} + 3^{\frac{2x+1}{2}} > 3^{\frac{2x+5}{2}} - 4^{x}$.

Selectivitat russa 1998 6. 3.

Solució:

$2^{2x+3} + 4^{x} > 3^{\frac{2x+5}{2}} - 3^{\frac{2x+1}{2}}$.

$8\cdot 2^{2x} + 2^{2x} > \sqrt{3}^{2x+5} - \sqrt{3}^{2x+1}$.

$9\cdot 2^{2x} > \left(\sqrt{3}^{5} - \sqrt{3}\right)\sqrt{3}^{2x}$.

$9\cdot 2^{2x} > 8\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}^{2x}$. Com que $\sqrt{3}^{2x} > 0$:

$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} > 8\sqrt{3}\,\frac{1}{9} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{3}$. La funció $y=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{x}$ és estrictament creixent:

$2x > 3$.

$x > \frac{3}{2}$.

195.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + |x+y| = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x-y+5} = 0 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1998 5. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x \le 0 \\ x - y + 5 \ge 0 \\ 2 - y \ge 0 \end{cases}$.

Suposem que $x + y \ge 0$. El sistema quedaria:

$$\begin{cases} x + x + y = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x-y+5} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x-y+5} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ -2x - 2 + \sqrt{3x+5} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ 2x + 2 = \sqrt{3x+5} \end{cases}. \quad x \le 0\,,\ x \ge \frac{-5}{3}$$

Elevant al quadrat la segona equació:

$$\begin{cases} y = -2x \\ 4x^2 + 5x - 1 = 0 \end{cases}$$. La segona equació no té solució en el domini:

Suposem que $x + y < 0$. El sistema quedaria:

$$\begin{cases} -y = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 5} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2 + \sqrt{x+5} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{x+5} = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

196.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x - 2 + |x + y - 2| = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 3} = 0 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1998 6. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x - 2 \le 0 \\ x - y + 3 \ge 0 \\ 2 - y \ge 0 \end{cases}$.

Suposem que $x + y \ge 2$. El sistema quedaria:

$$\begin{cases} x - 2 + x + y - 2 = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 3} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 3} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x + x + y = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 5} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 4 - 2x - 2 + \sqrt{x - 4 + 2x + 3} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 2 - 2x + \sqrt{3x - 1} = 0 \end{cases},\quad x \le 2\,,\ x \ge \frac{1}{3}.$$

$$\begin{cases} y = 4 - 2x \\ \sqrt{3x - 1} = 2x - 2 \end{cases}$$. Elevant al quadrat la segona equació:

$\begin{cases} y = -2x \\ 4x^2 - 11x + 3 = 0 \end{cases}$. La segona equació no té solució en el domini:

Suposem que $x + y \leq 2$. El sistema quedaria:

$\begin{cases} x - 2 - x + y + 2 = 0 \\ y - 2 + \sqrt{x - y + 3} = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} y = 0 \\ -2 + \sqrt{x + 3} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{x + 3} = 2 \end{cases}$. Elevant al quadrat:

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

197.- Resoleu l'equació:

$2^{5x-4} - 32^{x-2} + 5 \cdot 64^{\frac{5x-4}{6}} = 383$.

Selectivitat russa 1999 1. 2.

Solució:

$2^{5x-4} - 32^{x-2} + 5 \cdot 64^{\frac{5x-4}{6}} = 383$.

$2^{5x-4} - 2^{5x-10} + 5 \cdot 2^{5x-4} = 383$.

$\frac{1}{16}2^{5x} - \frac{1}{1024}2^{5x} + 5 \cdot \frac{1}{16}2^{5x} = 383$.

$\frac{383}{1024}2^{5x} = 383$.

$2^{5x} = 1024 = 2^{10}$.

$x = 2$.

198.- Resoleu l'equació:

$5^{3x-2} + 125^{x-1} + 25^{\frac{3x}{2}} = 131$.

Selectivitat russa 1999 2. 2.

Solució:

$5^{3x-2} + 125^{x-1} + 25^{\frac{3x}{2}} = 131$.

$5^{3x-2} + 5^{3x-3} + 5^{3x} = 131$.

$\frac{1}{25}5^{3x} - \frac{1}{1125}5^{3x} + 5^{5x} = 131$.

$\frac{131}{125}5^{3x} = 131$

$5^{3x} = 125 = 5^3$

$x = 1$.

199.- Resoleu la inequació:

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+2)-2\log_{49}(x+8)>-2$.

Selectivitat russa 1999 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+2>0 \\ x+8>0 \end{cases}$, és a dir, $x>-2$.

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+2)-2\log_{49}(x+8)>-2$. Canvi de base:

$$\frac{1}{2}\frac{\log_7(x+2)}{\log_7\frac{1}{\sqrt{7}}}-2\frac{\log_7(x+8)}{\log_7 49}>-2$$

$-\log_7(x+2)-\log_7(x+8)>-2$.

$\log_7(x+2)+\log_7(x+8)<2=\log_7 49$.

$\log_7\left((x+2)(x+8)\right)<\log_7 49$. La funció $y=\log_7 x$ és estrictament creixent:

$(x+2)(x+8)<49$.

$x^2+10x-33<0$, $x>-2$.

La solució és: $x\in\left]-2,-5+\sqrt{58}\right[$.

200.- Resoleu la inequació:

$4\log_{\frac{1}{25}}(3-x)-\log_{\sqrt{5}}(7-x)<-6$.

Selectivitat russa 1999 2. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} 3-x>0 \\ 7-x>0 \end{cases}$, és a dir, $x<3$.

$4\log_{\frac{1}{25}}(3-x)-\log_{\sqrt{5}}(7-x)<-6$. Canvi de base:

$$4\frac{\log_5(3-x)}{\log_5\frac{1}{25}}-\frac{\log_5(7-x)}{\log_5\sqrt{5}}<-6.$$

$-2\log_5(3-x)-2\log_5(7-x)<-6$.

$\log_5(3-x)+\log_5(7-x)>3=\log_5 125$.

$\log_5\left((3-x)(7-x)\right)>\log_5 125$. La funció $y=\log_5 x$ és estrictament creixent:

$(3-x)(7-x)>125$.

$x^2-10x-104>0$, $x<3$.

La solució és: $x\in\left]-\infty,5-\sqrt{129}\right[$.

201.- Resoleu el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+2}-|y+2|=0 \\ 2\sqrt{y^2+4y+4}+\sqrt{x^2-x-2}=0 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1999 1. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x^2+3x+2\geq 0 \\ x^2-x-2\geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x=-1$.

$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+2}-|y+2|=0 \\ 2\sqrt{y^2+4y+4}+\sqrt{x^2-x-2}=0 \end{cases}$. El sistema es quedaria:

$\begin{cases} x=-1 \\ |y+2|=0 \\ 2\sqrt{y^2+4y+4}=0 \end{cases}$. La solució de la tercera equació és $y=-2$.

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}.$$

202.- Resoleu el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-6}-|3y+2|=0 \\ 5\sqrt{9y^2+12y+4}+\sqrt{x^2-3x+2}=0 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1999 2. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x^2+x-6\geq 0 \\ x^2-3x+2\geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x=2$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-6}-|3y+2|=0 \\ 5\sqrt{9y^2+12y+4}+\sqrt{x^2-3x+2}=0 \end{cases}.$$

$\begin{cases} x=2 \\ |3y+2|=0 \\ 5\sqrt{9y^2+12y+4}=0 \end{cases}$. La solució de la tercera equació és $y=-\frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}.$$

203.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{2x+3}=x+7$.

Selectivitat russa 1999 3. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+5\geq 0 \\ 2x+3\geq 0 \\ x+7\geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x\geq\frac{-3}{2}$.

$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{2x+3}=x+7$. Elevant al quadrat:

$(x+5)(2x+3)=(x+7)^2$.

$x^2-x-34=0$, $x\geq\frac{-3}{2}$. Resolent l'equació:

$x=\frac{1+\sqrt{137}}{2}$.

204.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+5$.

Selectivitat russa 1999 4. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 2x+3\geq 0 \\ x+5\geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x\geq 1$.

$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+5$. Elevant al quadrat:

$(x++1)(2x+3)=(x+5)^2$.

$x^2-5x-22=0$, $x\geq -1$. Resolent l'equació:

$x=\frac{5+\sqrt{113}}{2}$.

205.- Resoleu la inequació:

$\frac{1}{\log_{25}(x+2)}\leq\frac{2}{\log_5(x+6)}$.

Selectivitat russa 1999 3. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+2>0 \\ x+6>0 \\ x\neq -1 \\ x\neq -5 \end{cases}$, és a dir, $x>-2$, $x\neq -1$.

$\frac{1}{\log_{25}(x+2)}\leq\frac{2}{\log_5(x+6)}$. Canvi de base:

$$\frac{1}{\frac{\log_5(x+2)}{\log_5 25}} \le \frac{2}{\log_5(x+6)}.$$

$$\frac{1}{\log_5(x+2)} \le \frac{1}{\log_5(x+6)}.$$

Si $x > -1$
$\log_5(x+2) > 0$, $\log_5(x+6) > \log_5 x+2 > 0$.

Aleshores, $\frac{1}{\log_5(x+2)} > \frac{1}{\log_5(x+6)}$.

Per tant, si $x > -1$ la inequació no té solució.
Si $-2 < x < -1$.

$\log_5(x+2) < 0$, $\log_5(x+6) > 0$. Aleshores, $\frac{1}{\log_5(x+2)} < 0 < \frac{1}{\log_5(x+6)}$.

Aleshores, la solució de la inequació és $x \in \left]-1, 2\right[$.

206.- Resoleu la inequació:

$$\frac{1}{\log_{16}(x+3)} \ge \frac{4}{\log_2(x+9)}.$$

Selectivitat russa 1999 4. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+3>0 \\ x+9>0 \\ x \ne -2 \\ x \ne -8 \end{cases}$, és a dir, $x > -3$, $x \ne -2$.

$$\frac{1}{\frac{\log_2(x+3)}{\log_1 16}} \ge \frac{4}{\log_2(x+9)}.$$

$$\frac{1}{\log_2(x+3)} \ge \frac{1}{\log_2(x+9)}.$$

Si $x > -2$
$\log_2(x+3) > 0$, $\log_2(x+9) > \log_2 x+3 > 0$.

Aleshores, $\frac{1}{\log_2(x+3)} > \frac{1}{\log_2(x+9)}$.

Si $-3 < x < -2$.
$\log_2(x+3) < 0$, $\log_2(x+9) > 0$.

$$\frac{1}{\log_2(x+3)} < 0 < \frac{1}{\log_2(x+9)}.$$

Per tant, si $-3 < x < -2$ la inequació no té solució.
Aleshores, la solució de la inequació és $x \in \left]-2, +\infty\right[$.

207.- Resoleu el sistema:

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{8x}{y}\right)}=64 \\ \sqrt{y}-\sqrt{3x}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1999 3. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{8x}{y}\right)}=64 \\ \sqrt{y}-\sqrt{3x}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \end{cases}$$. Dividint la segona equació per $\sqrt{x}$:

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{8x}{y}\right)}=64 \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}.$$

Efectuem el canvi $a=\dfrac{y}{x}$, $a>0$.

$$\begin{cases} 2^{a+\frac{8}{a}}=64=2^6 \\ \sqrt{a}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$. $\sqrt{a}-\sqrt{3}>0$, $a>3$.

$$\begin{cases} a+\dfrac{8}{a}=6 \\ \sqrt{a}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a^2-6a+8=0 \\ \sqrt{a}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$ Resolent la primera equació:

$$\begin{cases} a=4 \\ 2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$. Resolent la segona equació:

$\begin{cases} x=1 \\ a=4 \end{cases}$. Desfent el canvi:

$\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y}{x}=4 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$.

208.- Resoleu el sistema:

$$\begin{cases} 7^{\left(\frac{y}{4x}+\frac{3x}{y}\right)} = 49 \\ \sqrt{7y}-\sqrt{2x} = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}} \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1999 4. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 7^{\left(\frac{x}{4y}+\frac{3y}{x}\right)} = 49 \\ \sqrt{7y}-\sqrt{2x} = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}} \end{cases}$$. Dividint la segona equació per $\sqrt{y}$:

$$\begin{cases} 7^{\left(\frac{x}{4y}+\frac{3y}{x}\right)} = 49 \\ \sqrt{7}-\sqrt{2\dfrac{x}{y}} = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}}\dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$$

Efectuem el canvi $a=\dfrac{x}{y}$, $a>0$.

$$\begin{cases} 7^{\frac{a}{4}+\frac{3}{a}} = 49 = 7^2 \\ \sqrt{7}-\sqrt{2a} = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}}\dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}.\quad \sqrt{7}-\sqrt{2a}>0,\ a<\frac{7}{2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{4}+\dfrac{3}{a} = 2 \\ \sqrt{7}-\sqrt{2a} = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}}\dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a^2-8a+12 = 0 \\ \sqrt{7}-\sqrt{2a} = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}}\dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$$. Resolent la primera equació:

$$\begin{cases} a = 2 \\ \sqrt{7}-2 = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}}\dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$$. Resolent la segona equació:

$\begin{cases} a = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. Desfent el canvi:

$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

209.- Resoleu la inequació:

$\left|2-\frac{1}{x-3}\right|<3$.

Selectivitat russa 1999 5. 2.

Solució:

$\left|2-\frac{1}{x-3}\right|<3$. Definició de valor absolut:

$-3<2-\frac{1}{x-3}<3$.

$-5<-\frac{1}{x-3}<1$.

$\begin{cases} -\frac{1}{x-3}<1 \\ \frac{1}{x-3}<5 \end{cases}$.

$\begin{cases} -\frac{1}{x-3}-1<0 \\ \frac{1}{x-3}-5<0 \end{cases}$.

$\begin{cases} \frac{-x+2}{x-3}<0 \\ \frac{-5x+16}{x-3}-5<0 \end{cases}$.

La solució de la primera inequació del sistema és $x \left]-\infty, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[$.

La solució de la segona inequació del sistema és $x \left]-\infty, 3\right[\cup \left]\frac{16}{5}, +\infty\right[$.

La solució de la inequació inicial és la intersecció d'ambdues solucions:

$x \left]-\infty, 2\right[\cup \left]\frac{16}{5}, +\infty\right[$.

210.- Resoleu la inequació:

$\left|3+\frac{1}{x+2}\right|<5$.

Selectivitat russa 1999 6. 2.

Solució:

$\left|3+\frac{1}{x+2}\right|<5$. Definició de valor absolut:

$-5<3+\frac{1}{x+2}<5$.

$-8<\frac{1}{x+2}<2$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} < 2 \\ -8 < \dfrac{1}{x+2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} - 2 < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} + 8 > 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{-2x-3}{x+2} < 0 \\ \dfrac{8x+17}{x+2} > 0 \end{cases}.$$

La solució de la primera inequació del sistema és $x \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

La solució de la segona inequació del sistema és $x \left]-\infty, -\frac{17}{8}\right[\cup \left]-2, +\infty\right[$.

La solució de la inequació inicial és la intersecció d'ambdues solucions:

$x \left]-\infty, -\frac{17}{8}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

211.- Resoleu el següent sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{2^{3-x}} + 2 \cdot 5^{y+1} = 25 \\ 3 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{20}{5^{1-y}} = 52 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1999 5. 3.

Solució:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{2^{3-x}} + 2 \cdot 5^{y+1} = 25 \\ 3 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{20}{5^{1-y}} = 52 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2^x + 10 \cdot 5^y = 25 \\ 12 \cdot 2^x - 4 \cdot 5^x = 52 \end{cases}.$$

Efectuant el canvi $a = 2^x$, $b = 5^x$, $a > 0, b > 0$.

$\begin{cases} a + 10b = 25 \\ 12a - 4b = 52 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$. Desfent el canvi:

$\begin{cases} 2^x = 5 \\ 5^y = 2 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x = \log_2 5 \\ y = \log_5 2 \end{cases}$.

212.- Resoleu el següent sistema:

$$\begin{cases} 2\cdot 7^{x+1}-\dfrac{27}{3^{2-y}}=21 \\ \dfrac{21}{7^{1-x}}+2\cdot 3^{y+1}=51 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 1999 6. 3.

Solució:

$$\begin{cases} 2\cdot 7^{x+1}-\dfrac{27}{3^{2-y}}=21 \\ \dfrac{21}{7^{1-x}}+2\cdot 3^{y+1}=51 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 14\cdot 7^{x}-3\cdot 3^{y}=21 \\ 3\cdot 7^{x}+6\cdot 3^{y}=51 \end{cases}.$$

Efectuant el canvi $a=7^{x}$, $b=3^{x}$, $a>0, b>0$.

$\begin{cases} 14a-3b=21 \\ 3a+6b=51 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases}$. Desfent el canvi:

$\begin{cases} 7^{x}=3 \\ 3^{y}=7 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=\log_7 3 \\ y=\log_3 7 \end{cases}$.

213.- Resoleu l'equació:

$$\sqrt{1-\frac{4}{2-x}}=\frac{1}{2-x}.$$

Selectivitat russa 1999 5. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} 1-\dfrac{4}{2-x}\geq 0 \\ 2-x>0 \end{cases}$, és a dir, $x\in \left]-\infty,-2\right]$.

$$\sqrt{1-\frac{4}{2-x}}=\frac{1}{2-x}.$$

Efectuem el canvi $a=\dfrac{1}{2-x}$, $a>0$.

$\sqrt{1-4a}=a$. Elevant al quadrat:

$a^2+4a-1=0$. Resolent l'equació:

$a=-2+\sqrt{5}$.

Desfent el canvi:

$\dfrac{1}{2-x}=-2+\sqrt{5}$. Resolent l'equació:

$x=-\sqrt{5}$.

214.- Resoleu l’equació:

$$\sqrt{\frac{6}{x-3}+1}=\frac{1}{x-3}.$$

Selectivitat russa 1999 6. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}\frac{6}{x-3}+1\geq 0\\ x-3>0\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]3,+\infty\right[$.

Efectuem el canvi $a=\frac{1}{x-3}$, $a>0$.

$\sqrt{6a+1}=a$. Elevant al quadrat:

$a^2-6a-1=0$. Resolent l’equació:

$a=3+\sqrt{10}$.

Desfent el canvi:

$\frac{1}{x-3}=3+\sqrt{10}$. Resolent l’equació:

$x=\sqrt{10}$.

215.- Resoleu l’equació:

$$5^{\sqrt{x}-1}-24\cdot 5^{-\sqrt{x}-1}=1.$$

Selectivitat russa 2000 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $x\geq 0$.

$5^{\sqrt{x}-1}-24\cdot 5^{-\sqrt{x}-1}=1.$

$\frac{5^{\sqrt{x}}}{5}-24\cdot\frac{1}{5}\frac{1}{5^{\sqrt{x}}}=1.$

Efectuant el canvi $a=5^{\sqrt{x}}$, $a>0$:

$\frac{a}{5}-\frac{24}{5}\frac{1}{a}=1.$

$a^2-5a-24=0$. Resolent l’equació:

$a=8$.

Desfent el canvi:

$5^{\sqrt{x}}=8$.

$\sqrt{x}=\log_5 8$.

$x=(\log_5 8)^2$.

216.- Resoleu l'equació:

$4\cdot 3^{-\sqrt{x}}+1=3^{\sqrt{x}-2}$.

Selectivitat russa 2000 2. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $x\geq 0$.

$4\cdot 3^{-\sqrt{x}}+1=3^{\sqrt{x}-2}$.

$4\cdot\dfrac{1}{3^{\sqrt{x}}}+1=\dfrac{1}{9}3^{\sqrt{x}}$.

Efectuant el canvi $a=3^{\sqrt{x}}$, $a>0$:

$\dfrac{4}{a}+1=\dfrac{1}{9}a$.

$a^2-9a-36=0$. Resolent l'equació:

$a=12$.

Desfent el canvi:

$3^{\sqrt{x}}=12$.

$\sqrt{x}=\log_3 12$.

$x=(\log_3 12)^2$.

217.- Resoleu la inequació:

$x^2+\sqrt{3x^3}>x$.

Selectivitat russa 2000 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x>0$.

$x^2+\sqrt{3x^3}-x>0$.

$x\left(x+\sqrt{3x}-1\right)>0$.

$x+\sqrt{3x}-1>0$.

$\sqrt{3x}>1-x$.

Si $1-x\geq 0$, aleshores, $0<x\leq 1$. Elevant al quadrat:

$3x>x^2-2x+1$.

$\begin{cases} x^2-2x+1<0 \\ 0<x\leq 1\end{cases}$, la solució és, $x\in\left]\dfrac{5-\sqrt{21}}{2},1\right]$.

Si $1-x<0$, aleshores, $x>1$. Per tant:

$\sqrt{3x}\geq 0$.

Aleshores, $\begin{cases} x\geq 0 \\ x>1\end{cases}$. a solució és, $x\in\left]1,+\infty\right[$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions anteriors:

$x\in\left]\dfrac{5-\sqrt{21}}{2},+\infty\right[$.

218.- Resoleu la inequació:

$3x-\sqrt{2x^3}<x^2$.

Selectivitat russa 2000 2. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x>0$.

$3x-\sqrt{2x^3}<x^2$.

$x^2+\sqrt{2x^3}-3x>0$.

$x\left(x+\sqrt{2x}-3\right)>0$.

$x+\sqrt{2x}-3>0$.

$\sqrt{2x}>3-x$.

Si $3-x\geq 0$, aleshores, $0<x\leq 3$. Elevant al quadrat:

$2x>x^2-6x+9$.

$\begin{cases} x^2-8x+9<0 \\ 0<x\leq 3 \end{cases}$, la solució és, $x\in \left]4-\sqrt{7},3\right]$.

Si $3-x<0$, aleshores, $x>3$. Per tant:

$\sqrt{2x}\geq 0$.

Aleshores, $\begin{cases} x\geq 0 \\ x>3 \end{cases}$. a solució és, $x\in \left]3,+\infty\right[$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions anteriors:

$x\in \left]4-\sqrt{7},+\infty\right[$.

219.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{6}} x+2\log_6 y=2 \\ \log_{27}(3y-3x-1)^3+\log_2(3y-3x+1)=\log_3 8 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 2000 1. 5.

Solució:

El domini de les solucions és: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 3y-3x>1 \\ 3y-3x>-1 \end{cases}$.

$\begin{cases} \log_{\sqrt{6}} x+2\log_6 y=2 \\ \log_{27}(3y-3x-1)^3+\log_3(3y-3x+1)=\log_3 8 \end{cases}$. Canvi de base:

$$\begin{cases} \dfrac{\log_6 x}{\log_6\sqrt{6}}+2\log_6 y=2 \\ \dfrac{\log_3(3y-3x-1)^3}{\log_3 27}+\log_3(3y-3x+1)=\log_3 8 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2\log_6 x+2\log_6 y=2 \\ \log_3(3y-3x-1)+\log_3(3y-3x+1)=\log_3 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_6(xy) = \log_6 6 \\ \log_3\left((3y-3x-1)(3y-3x+1)\right) = \log_3 8 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ (3y-3x-1)(3y-3x+1) = 8 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ que satisfan les 4 inequacions del domini.

220.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2\log_3 x - \log_{\sqrt{3}} y = 2 \\ \log_8(x-y-1)^3 + \log_2(x-y+1) = \log_2 3 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 2000 2. 5.

Solució:

El domini de les solucions és: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x-y > 1 \\ x-y > -1 \end{cases}$.

$\begin{cases} 2\log_3 x - \log_{\sqrt{3}} y = 2 \\ \log_8(x-y-1)^3 + \log_2(x-y+1) = \log_2 3 \end{cases}$. Canvi de base:

$$\begin{cases} 2\log_3 x - \dfrac{\log_3 y}{\log_3 \sqrt{3}} = 2 \\ \dfrac{\log_8(x-y-1)^3}{\log_2 8} + \log_2(x-y+1) = \log_2 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2\log_3 x - 2\log_3 y = 2 \\ \log_2(x-y-1) + \log_2(x-y+1) = \log_2 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x}{y} = \log_3 3 \\ \log_2\left((x-y-1)(x-y+1)\right) = \log_2 3 \end{cases}.$$

$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3 \\ (x-y-1)(x-y+1) = 3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ que satisfan les 4 inequacions del domini.

221.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{x^2 + |3-x| - 10} > x - 3$.

Selectivitat russa 2000 3. 2.

Solució:
Suposem que $3 - x \geq 0$, aleshores, $x \leq 3$. La inequació inicial quedaria:

$\sqrt{x^2-x-7}>x-3$.

$x-3\le 0$, $\sqrt{x^2-x-7}>0$.

$\begin{cases} x^2-x-7>0 \\ x\le 3 \end{cases}$. La solució és $x\in \left]-\infty,\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}\right[$ (1)

Suposem que $3-x<0$, aleshores, $x>3$. La inequació inicial quedaria:

$\sqrt{x^2+x-13}>x-3$. Elevant al quadrat:

$x^2+x-13>x^2-6x+9$.

$\begin{cases} 7x>22 \\ x>3 \end{cases}$. La solució és $x\in \left]\dfrac{22}{7},+\infty\right[$ (2)

La solució de la inequació és la unió de les solucions (1) (2):

$x\in \left]-\infty,\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{22}{7},+\infty\right[$.

222.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{x^2+|x-2|-5}>x-2$.

Selectivitat russa 2000 4. 2.

Solució:

Suposem que $x-2\ge 0$, aleshores, $x\ge 2$. La inequació inicial quedaria:

$\sqrt{x^2+x-7}>x-2$. Elevant al quadrat:

$x^2+x-7>x^2-4x+4$.

$\begin{cases} 5x>11 \\ x\ge 2 \end{cases}$. La solució és $x\in \left]\dfrac{11}{5},+\infty\right[$ (1)

Suposem que $x-2<0$, aleshores, $x<2$. La inequació inicial quedaria:

$\sqrt{x^2-x-3}>x-2$.

$x-2<0$, $\sqrt{x^2-x-3}>0$.

$\begin{cases} x^2-x-3>0 \\ x<2 \end{cases}$. La solució és $x\in \left]-\infty,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right[$ (2)

La solució de la inequació és la unió de les solucions (1) (2):

$x\in \left]-\infty,\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{11}{5},+\infty\right[$.

223.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{2^x}+\left(\sqrt{2}\right)^x-\sqrt{2}\cdot 2^x+\sqrt{2}=0$.

Selectivitat russa 2000 3. 3.

Solució:

$\sqrt{2^x}+\left(\sqrt{2}\right)^x-\sqrt{2}\cdot 2^x+\sqrt{2}=0$

$2^{x/2}+2^{x/2}-\sqrt{2}\cdot 2^x+\sqrt{2}=0$.

$2\cdot 2^{x/2}-\sqrt{2}\cdot 2^{x}+\sqrt{2}=0$

Efectuant el canvi $a=2^{x/2}$, $a>0$:

$2a-\sqrt{2}a^{2}+\sqrt{2}=0$.

$a^{2}-\sqrt{2}a-1=0$. Resolent l'equació:

$a=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

Desfent el canvi:

$2^{x/2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

$a=2\log_{2}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

224.- Resoleu l'equació:

$6\sqrt{7^{x}}+\left(\sqrt{7}\right)^{x}-\sqrt{7}\cdot 7^{x}+\sqrt{7}=0$.

Selectivitat russa 2000 4. 3.

Solució:

$6\sqrt{7^{x}}+\left(\sqrt{7}\right)^{x}-\sqrt{7}\cdot 7^{x}+\sqrt{7}=0$.

$6\cdot 7^{x/2}+7^{x/2}-\sqrt{7}\cdot 2^{x}+\sqrt{7}=0$.

$7\cdot 7^{x/2}-\sqrt{7}\cdot 7^{x}+\sqrt{7}=0$

Efectuant el canvi $a=7^{x/2}$, $a>0$:

$7a-\sqrt{7}a^{2}+\sqrt{7}=0$.

$a^{2}-\sqrt{7}a-1=0$. Resolent l'equació:

$a=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{2}$.

Desfent el canvi:

$7^{x/2}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{2}$.

$a=2\log_{7}\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{2}$.

225.- Resoleu l'equació:

$2\sqrt{(\log_{4}(2x-1))^{2}}=3-\log_{2}(x+3)$.

Selectivitat russa 2000 3. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}2x-1>0\\ x+3>0\end{cases}$, és a dir, $x>\dfrac{1}{2}$.

Suposem que $x\geq 1$, aleshores, $\log_{4}(2x-1)\geq 0$. L'equació inicial quedaria:

$2\log_{4}(2x-1)=3-\log_{2}(x+3)$. Canvi de base:

$2\dfrac{\log_2(2x-1)}{\log_2 4}=3-\log_2(x+3)$.

$\log_2(2x-1)=\log_2 2^3-\log_2(x+3)$.

$\log_2(2x-1)=\log_2\dfrac{8}{x+3}$.

$2x-1=\dfrac{8}{x+3}$, $x>\dfrac{1}{2}$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{-5+\sqrt{113}}{4}$.

Suposem que $\dfrac{1}{2}<x<1$. aleshores, $\log_4(2x-1)<0$. L'equació inicial quedaria:

$-2\log_4(2x-1)=3-\log_2(x+3)$.

$-\log_2(2x-1)=\log_2\dfrac{8}{x+3}$

$\log_2\dfrac{1}{2x-1}=\log_2\dfrac{8}{x+3}$

$\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{8}{x+3}$, $\dfrac{1}{2}<x<1$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{11}{15}$.

226.- Resoleu l'equació:

$3\sqrt{(\log_{27}(x+1))^2}=2-\log_2(2x+3)$.

Selectivitat russa 2000 4. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}x+1>0\\2x+3>0\end{cases}$, és a dir, $x>-1$.

Suposem que $x\geq 0$, aleshores, $\log_{27}(x+1)\geq 0$. L'equació inicial quedaria:

$3\log_{27}(x+1)=2-\log_2(2x+3)$. Canvi de base:

$3\dfrac{\log_3(x+1)}{\log_3 27}=2-\log_2(2x+3)$.

$\log_3(x+1)=\log_3 3^2-\log_2(2x+3)$.

$\log_3(x+1)=\log_3\dfrac{9}{2x+3}$.

$x+1=\dfrac{9}{2x+3}$, $x\geq 0$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{-5+\sqrt{73}}{4}$

Suposem que $-1<x<0$, aleshores, $\log_{27}(x+1)<0$. L'equació inicial quedaria:

$-3\log_{27}(x+1)=2-\log_2(2x+3)$. Aleshores:

$-\log_3(x+1)=\log_3\dfrac{9}{2x+3}$.

$\log_3 \frac{1}{x+1} = \log_3 \frac{9}{2x+3}$.

$\frac{1}{x+1} = \frac{9}{2x+3}$. Resolent l'equació:

$x = -\frac{6}{7}$.

227.- Resoleu l'equació:

$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x-1}$.

Selectivitat russa 2000 5. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x+1>0 \\ 3x-1 \geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x \geq \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x-1}$. Elevant al quadrat:

$\frac{1}{x+1} + x + 1 + 2 = 3x - 1$.

$2x^2 - 2x - 5 = 0$, $x \geq \frac{1}{3}$. Resolent l'equació: $x = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$.

228.- Resoleu l'equació:

$\frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-10}$.

Selectivitat russa 2000 6. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x-2>0 \\ 3x-10 \geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x \geq \frac{10}{3}$.

$\frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-10}$. Elevant al quadrat:

$\frac{1}{x-2} + x - 2 + 2 = 3x - 10$.

$2x^2 - 14x + 19 = 0$, $x \geq \frac{10}{3}$. Resolent l'equació:

$x = \frac{7+\sqrt{11}}{2}$.

229.- Resoleu la inequació:

$$\log_2 \frac{3x-5}{x-2} + 3\log_8 \frac{(x-2)^3}{3x-5} < 1.$$

Selectivitat russa 2000 5. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\left\{ \frac{3x-5}{x+2} > 0 \right.$, és a dir, $x \in \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

$\log_2 \frac{3x-5}{x-2} + 3\log_8 \frac{(x-2)^3}{3x-5} < 1$. Canvi de base:

$$\log_2 \frac{3x-5}{x-2} + 3\frac{\log_2 \frac{(x-2)^3}{3x-5}}{\log_2 8} < 1$$

$\log_2 \frac{3x-5}{x-2} + \log_2 \frac{(x-2)^3}{3x-5} < \log_2 2$.

$\log_2 (x-2)^2 < \log_2 2$. La funció $y = \log_2 x$ és estrictament creixent:

$(x-2)^2 < 2$.

$x^2 - 4x + 2 < 0$, $x \in \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

La solució de la inequació és: $x \in \left]2-\sqrt{2}, \frac{5}{3}\right[\cup \left]2, 2+\sqrt{2}\right[$

230.- Resoleu la inequació:

$$\log_3 \frac{4x-7}{2x-3} + 2\log_9 \frac{(2x-3)^3}{4x-7} < 1.$$

Selectivitat russa 2000 6. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\left\{ \frac{4x-7}{2x-3} > 0 \right.$, és a dir, $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{4}, +\infty\right[$.

$\log_3 \frac{4x-7}{2x-3} + 2\log_9 \frac{(2x-3)^3}{4x-7} < 1$. Canvi de base:

$$\log_3 \frac{4x-7}{2x-3} + 2\frac{\log_3 \frac{(2x-3)^3}{4x-7}}{\log_3 9} < 1.$$

$\log_3 \frac{4x-7}{2x-3} + \log_3 \frac{(2x-3)^3}{4x-7} < \log_3 3$.

$\log_3 (2x-3)^2 < \log_3 3$. La funció $y = \log_3 x$ és estrictament creixent:

$(2x-3)^2 < 3$.

$4x^2 - 12x + 6 < 0$, $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{4}, +\infty\right[$.

La solució de la inequació és $x \in \left]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right[$.

231.- Resoleu l'equació:

$2\left|2^{x-1}-1\right|+\left|4^{x/2}-3\right|=1.$

Selectivitat russa 2000 5. 5.

Solució:

Suposem $\begin{cases}2^{x-1}-1\geq 0\\ 4^{x/2}-3\geq 0\end{cases}$, aleshores, $x\geq \log_4 9=\log_2 3$. L'equació inicial quedaria:

$2\cdot 2^{x-1}-2+4^{x/2}-3=1.$

$2^x-2+2^x-3=1$

$2^x=3$, aleshores, $x=\log_2 3$.

Suposem $\begin{cases}2^{x-1}-1\leq 0\\ 4^{x/2}-3\leq 0\end{cases}$, aleshores, $x\leq 1$. L'equació inicial quedaria:

$-2\cdot 2^{x-1}+2-4^{x/2}+3=1.$

$-2^x+2-2^x+3=1$

$2^x=2$, aleshores, $x=1$.

Suposem $\begin{cases}2^{x-1}-1>0\\ 4^{x/2}-3<0\end{cases}$, Aleshores, $1<x<\log_4 9=\log_2 3$

L'equació inicial quedaria:

$2\cdot 2^{x-1}-2-4^{x/2}+3=1.$

Que és una identitat, aleshores la solució és $1<x<\log_4 9=\log_2 3$.

Per tant la solució de l'equació inicial és $1\leq x\leq \log_4 9=\log_2 3$.

232.- Resoleu l'equació:

$7\left|\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1}-1\right|+\left|5-\left(\frac{1}{49}\right)^{x/2}\right|=2.$

Selectivitat russa 2000 6. 5.

Solució:

$$7\left|\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1}-1\right|+\left|5-\left(\frac{1}{49}\right)^{x/2}\right|=2$$

$7\left|7^{-x-1}-1\right|+\left|7^{-x}-5\right|=2$.

Suposem $\begin{cases}7^{-x-1}-1\geq 0\\ 7^{-x}-5\geq 0\end{cases}$, aleshores, $x\leq 1$. L'equació inicial quedaria:

$7\cdot 7^{-x-1}-7+7^{-x}-5=2$.

$7^{-x}+7^{-x}=14$.

$7^{-x}=7$, $x=-1$.

Suposem $\begin{cases}7^{-x-1}-1\leq 0\\ 7^{-x}-5\leq 0\end{cases}$, aleshores, $x\geq -\log_7 5$. L'equació inicial quedaria:

$-7\cdot 7^{-x-1}+7-7^{-x}+5=2$.

$-2\cdot 7^{-x}=-10$

$7^{-x}=5$.

$x=-\log_7 5$

Suposem $\begin{cases}7^{-x-1}-1<0\\ 7^{-x}-5>0\end{cases}$, Aleshores, $-1<x<-\log_7 5$

L'equació inicial quedaria:

$-7\cdot 2^{x-1}+7+7^{-x}-5=2$.

Que és una identitat, aleshores la solució és $-1<x<-\log_7 5$.

Per tant la solució de l'equació inicial és $1\le x\le \log_7 5$.

233.- Resoleu la inequació:

$\dfrac{3^x+2x-35}{x-4}\le 2$.

Selectivitat russa 2001 1. 1.

Solució:

El domini de les solucions és $x\neq 4$.

$\dfrac{3^x+2x-35}{x-4}\le 2$.

$\dfrac{3^x+2x-35}{x-4}-2\le 0$.

$\dfrac{3^x-27}{x-4}\le 0$. Aleshores:

$\begin{cases}3^x-27\ge 0\\ x-4<0\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}3^x-27\le 0\\ x-4>0\end{cases}$.

Si $\begin{cases}3^x-27\ge 0\\ x-4<0\end{cases}$, $\begin{cases}3^x\ge 27=3^3\\ x<4\end{cases}$, $\begin{cases}x\ge 3\\ x<4\end{cases}$, la solució és $x\in[3,4[$.

Si $\begin{cases}3^x-27\le 0\\ x-4>0\end{cases}$, $\begin{cases}x\le 3\\ x>4\end{cases}$, que no té solució real.

La solució de la inequació inicial és $x\in[3,4[$.

234.- Resoleu la inequació:

$\dfrac{3x+7^x-25}{x+8}\ge 3$.

Selectivitat russa 2001 2. 1.

Solució:

$\dfrac{3x+7^x-25}{x+8}\ge 3$.

$\dfrac{3x+7^x-25}{x+8}-3\ge 0$.

$\frac{7^x - 1}{x+8} \geq 3$.

$\begin{cases} 7^x - 1 \geq 0 \\ x+8 > 0 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} 7^x - 1 \leq 0 \\ x+8 < 0 \end{cases}$

Si $\begin{cases} 7^x - 1 \geq 0 \\ x+8 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 7^x \geq 1 = 7^0 \\ x > -8 \end{cases}$, $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > -8 \end{cases}$, aleshores, $x \geq 0$.

Si $\begin{cases} 7^x - 1 \leq 0 \\ x+8 < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \leq 0 \\ x < -8 \end{cases}$, aleshores, $x < -8$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions:
$x \in \left]-\infty, -8\right[\cup \left[0, +\infty\right[$.

235.- Resoleu l'equació:
$10^x - 2^{x+1} - 5^{x+2} + 50 = 0$.
Selectivitat russa 2000 1. 3.

Solució:
$10^x - 2^{x+1} - 5^{x+2} + 50 = 0$.
$2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 2^x - 25 \cdot 5^x + 50 = 0$.
$2^x\left(5^x - 2\right) - 25\left(5^x - 2\right) = 0$.
$\left(2^x - 25\right)\left(5^x - 2\right) = 0$. Aleshores:
$2^x - 25 = 0$, o bé, $5^x - 2 = 0$. Per tant:
$x = \log_2 25$, $x = \log_5 2$.

236.- Resoleu l'equació:
$20^x - 4^{x+2} - 5^{x+1} + 80 = 0$.
Selectivitat russa 2000 2. 3.

Solució:
$20^x - 4^{x+2} - 5^{x+1} + 80 = 0$.
$4^x \cdot 5^x - 16 \cdot 4^x - 5 \cdot 5^x + 80 = 0$.
$4^x\left(5^x - 16\right) - 5\left(5^x - 16\right) = 0$.
$\left(4^x - 5\right)\left(5^x - 16\right) = 0$. Aleshores:
$4^x - 5 = 0$, o bé, $5^x - 16 = 0$. Per tant:
$x = \log_4 5$, $x = \log_5 16$.

237.- Resoleu la inequació:

$$\sqrt{\frac{3}{2}\log_9\left(4x^2-3\right)} > \log_3\sqrt{4x^2-3}\ .$$

Selectivitat russa 2001 1. 5.

Solució:

El domini de les solucions és: $\begin{cases}4x^2-3>0\\ \log_9\left(4x^2-3\right)>0=\log_9 1\end{cases}$, és a dir, $x\in R\sim\left[-1,1\right]$.

$\sqrt{\frac{3}{2}\log_9\left(4x^2-3\right)} > \log_3\sqrt{4x^2-3}$. Canvi de base:

$$\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\log_3\left(4x^2-3\right)}{\log_3 9}} > \log_3\sqrt{4x^2-3}\ .$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}\log_3\left(4x^2-3\right)} > \log_3\sqrt{4x^2-3} = \frac{1}{2}\log_3\left(4x^2-3\right).$$

Efectuant el canvi $a=\log_3\left(4x^2-3\right)$, $a\geq 0$.

$\sqrt{\frac{3}{4}a} > \frac{1}{2}a$, $a\geq 0$. Elevant al quadrat:

$3a>a^2$.

$a^2-3a<0$. Resolent la inequació:

$0<a<3$.

Desfent el canvi:

$0<\log_3\left(4x^2-3\right)<3=\log_3 27$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent:

$0<4x^2-3<27$, $x\in R\sim\left[-1,1\right]$.

La solució de la inequació és:

$$x\in\left]-\sqrt{\frac{15}{2}},-1\right[\cup\left]1,\sqrt{\frac{15}{2}}\right[\ .$$

238.- Resoleu la inequació:

$$\sqrt{\frac{5}{2}\log_4\left(5x^2-2\right)} > \log_2\sqrt{5x^2-2}\ .$$

Selectivitat russa 2001 2. 5.

Solució:

El domini de les solucions és: $\begin{cases}5x^2-2>0\\ \log_4\left(5x^2-2\right)>0=\log_4 1\end{cases}$, és a dir, $x\in R\sim\left[-\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$.

$\sqrt{\frac{5}{2}\log_4\left(5x^2-2\right)} > \log_2\sqrt{5x^2-2}$. Canvi de base:

$$\sqrt{\frac{5}{2}\frac{\log_2\left(5x^2-2\right)}{\log_2 4}} > \log_2\sqrt{5x^2-2}\ .$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}\log_2\left(5x^2-2\right)} > \frac{1}{2}\log_2\left(5x^2-2\right).$$

Efectuant el canvi $a = \log_2\left(5x^2 - 2\right)$, $a \geq 0$.

$\sqrt{\frac{5}{4}a} > \frac{1}{2}a$, $a \geq 0$. Elevant al quadrat:

$5a > a^2$.

$a^2 - 5a < 0$. Resolent la inequació:

$0 < a < 5$.

Desfent el canvi:

$0 < \log_2\left(5x^2 - 2\right) < 5 = \log_2 32$. La funció $y = \log_2 x$ és estrictament creixent:

$0 < 5x^2 - 2 < 32$, $x \in R \sim \left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right]$.

La solució de la inequació és:

$x \in \left]-\sqrt{\frac{34}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{34}{5}}\right[$.

239.- Resoleu la inequació:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \cdot 3^{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{9}$.

Selectivitat russa 2001 3. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $2 - x \geq 0$, és a dir, $x \in \left]-\infty, 2\right]$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \cdot 3^{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{9}$.

$3^{x-1} \cdot 3^{\sqrt{2-x}} > 3^{-2}$

$3^{x-1+\sqrt{2-x}} > 3^{-2}$. La funció $y = 3^x$ és estrictament creixent:

$x - 1 + \sqrt{2-x} > -2$.

$\sqrt{2-x} > -x - 1$, $x \in \left]-\infty, 2\right]$.

Suposem que $-x - 1 \geq 0$, $x \leq -1$.

Elevant al quadrat:

$2 - x > x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 3x - 1 < 0$, $x \leq -1$. La solució és, $x \in \left]\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, -1\right]$.

Suposem que $-x - 1 < 0$, $-1 < x \leq 2$.

$\sqrt{2-x} \geq 0$, $x \leq 2$. La solució és, $x \in \left[-1, 2\right]$.

La solució de la inequació és la unió d'ambdues solucions:

$x \in \left]\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, 2\right]$.

240.- Resoleu la inequació:

$$6^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{x+2}}<\frac{1}{36}.$$

Selectivitat russa 2001 4. 2.

Solució:
El domini de les solucions és $x+2\geq 0$, és a dir, $x\in[2,+\infty[$.

$$6^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{x+2}}<\frac{1}{36}.$$

$6^{x-1}\cdot 6^{-\sqrt{x+2}}<6^{-2}$.

$6^{x-1-\sqrt{x+2}}<6^{-2}$. La funció $y=6^x$ és estrictament creixent:

$x-1-\sqrt{2+x}<-2$.

$\sqrt{2+x}>x+1$.

Suposem que $x+1\geq 0$, $x\geq -1$.
Elevant al quadrat:

$2+x>x^2+2x+1$.

$x^2+x-1<0$, $x\in[-2,+\infty[$. La solució és $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

Suposem que $x+1<0$, $-2\leq x<-1$.

$\sqrt{2+x}\geq 0$, $x\geq -1$. La solució és $x\in[-2,-1[$

La solució és: $x\in\left[-2,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

241.- Resoleu la inequació:

$\log_5\left(x^3-x^2-6x\right)-2\log_{25}\left(x^2-3x\right)<\log_5 7$.

Selectivitat russa 2001 3. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}x^3-x^2-6x>0\\ x^2-3x>0\end{cases}$, és a dir, $x\in]-2,0[\cup]3,+\infty[$.

$\log_5\left(x^3-x^2-6x\right)-2\log_{25}\left(x^2-3x\right)<\log_5 7$. Canvi de base:

$$\log_5\left(x^3-x^2-6x\right)-2\frac{\log_5\left(x^2-3x\right)}{\log_5 25}<\log_5 7.$$

$\log_5\left(x^3-x^2-6x\right)-\log_5\left(x^2-3x\right)<\log_5 7$.

$\log_5\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2+3x}<\log_5 7$. Simplificant $x\neq 0,-3$:

$\log_5(x+2)<\log_5 7$. La funció $y=\log_5 x$ és estrictament creixent:

$x+2<7$, $x\in]-2,0[\cup]3,+\infty[$.

$\begin{cases}x<5\\ x\in]-2,0[\cup]3,+\infty[\end{cases}$. La solució és, $x\in]-2,0[\cup]3,5[$.

242.- Resoleu la inequació:

$2\log_{36}\left(x^2-x\right)-\log_6\left(x^3+2x^2-3x\right)>\log_6\frac{1}{5}$.

Selectivitat russa 2001 4. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x^3+2x^2-3x>0 \\ x^2-x>0 \end{cases}$, és a dir, $x\in\left]-3,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

$2\log_{36}\left(x^2-x\right)-\log_6\left(x^3+2x^2-3x\right)>\log_6\frac{1}{5}$. Canvi de base:

$2\frac{\log_6\left(x^2-x\right)}{\log_6 36}-\log_6\left(x^3+2x^2-3x\right)>\log_6\frac{1}{5}$.

$\log_6\left(x^2-x\right)-\log_6\left(x^3+2x^2-3x\right)>\log_6\frac{1}{5}$.

$\log_{36}\frac{x^2-x}{x^3+2x^2-3x}>\log_6\frac{1}{5}$. Simplificant, $x\neq 0,1$:

$\log_{36}\frac{1}{x+3}>\log_6\frac{1}{5}$. La funció $y=\log_5 x$ és estrictament creixent:

$\begin{cases} \frac{1}{x+3}>\frac{1}{5} \\ x\in\left]-3,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{cases}$.

La solució és, $x\in\left]-3,0\right[\cup\left]1,2\right[$.

243.- Resoleu la inequació:

$\frac{1}{\sqrt{4-x}}>\frac{1}{2x-1}$.

Selectivitat russa 2001 5. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} 4-x>0 \\ x\neq\frac{1}{2} \end{cases}$, és a dir, $x\in\left]-\infty,4\right[\sim\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Suposem que, $2x-1>0$, és a dir, $x\in\left]\frac{1}{2},4\right[$.

$\frac{1}{\sqrt{4-x}}>\frac{1}{2x-1}$, elevant al quadrat:

$\frac{1}{4-x}>\frac{1}{4x^2-4x+1}$.

$4x^2-3x-3>0$, $x\in\left]-\infty,4\right[\sim\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

La solució és $x\in\left]\frac{-3+\sqrt{57}}{8},4\right[$.

Suposem que, $2x-1<0$, és a dir, $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$.

$\sqrt{4-x}>0$, $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$. La solució és: $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$.

La solució de la inequació inicial és, $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{-3+\sqrt{57}}{8},4\right[$.

244.- Resoleu la inequació:

$\frac{1}{\sqrt{3x-5}}>\frac{1}{4-x}$.

Selectivitat russa 2001 6. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}3x-5>0\\x\neq 4\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]\frac{5}{3},+\infty\right[\sim\{4\}$.

Suposem que, $4-x>0$, és a dir, $x\in\left]\frac{5}{3},4\right[$.

$\frac{1}{\sqrt{3x-5}}>\frac{1}{4-x}$, elevant al quadrat:

$\frac{1}{3x-5}>\frac{1}{x^2-8x+16}$.

$x^2-11x+21>0$, $x\in\left]\frac{5}{3},4\right[$.

La solució és $x\in\left]\frac{5}{3},\frac{11-\sqrt{37}}{2}\right[$.

Suposem que, $4-x<0$, $x\in\left]4,+\infty\right[$.

$\sqrt{3x-5}>0$, $x\in\left]4,+\infty\right[$

La solució de la inequació inicial és, $x\in\left]\frac{5}{3},\frac{11-\sqrt{37}}{3}\right[\cup\left]4,+\infty\right[$.

245.- Resoleu l'equació:

$2\cdot 4^{3x^2+5x}-4=7\cdot 8^{x^2+\frac{5x}{3}}$.

Selectivitat russa 2001 5. 3.

Solució:

$2\cdot 4^{3x^2+5x}-4=7\cdot 8^{x^2+\frac{5x}{3}}$

$2\cdot\left(2^{3x^2+5x}\right)^2-4=7\cdot 2^{3x^2+5x}$.

Efectuant el canvi $a=2^{3x^2+5x}$, $a>0$:

$2a^2-4=7a$.

$2a^2-7a-4=0$. Resolent l'equació:

$a=4$.
Desfent el canvi:
$2^{3x^2+5x}=8=2^2$
$3x^2-5x=2$. Resolent l'equació:
$x=-\frac{1}{2},2$.

246.- Resoleu l'equació:
$9^{2x^2+5x}-54=25\cdot 9^{x^2+\frac{5x}{2}}$.
Selectivitat russa 2001 6. 3.

Solució:
$9^{2x^2+5x}-54=25\cdot 9^{x^2+\frac{5x}{2}}$.
Efectuant el canvi $a=9^{x^2+\frac{5x}{2}}$, $a>0$:
$a^2-54=25a$.
$a^2-25a-54=0$. Resolent l'equació:
$a=27$.
Desfent el canvi:
$9^{x^2+\frac{5x}{2}}=27$.
$3^{2x^2+5x}=27=3^3$
$2x^2-5x=3$. Resolent l'equació: $x=-3,\frac{1}{2}$.

247.- Resoleu la inequació:
$\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]<\log_{\frac{1}{49}}\left[\log_{\frac{1}{9}}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right]$.
Selectivitat russa 2001 5. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $\begin{cases}\frac{x-1}{x+1}>0\\ \log_3\frac{x-1}{x+1}>0=\log_3 1\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]-\infty,-1\right[$.

$\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]<\log_{\frac{1}{49}}\left[\log_{\frac{1}{9}}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right]$. Canvi de base:
$\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]<\log_{\frac{1}{49}}\left[\frac{\log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}{\log_3\frac{1}{9}}\right]$.

$\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]<\log_{\frac{1}{49}}\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]$. Canvi de base:

$\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]<\dfrac{\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]}{\log_7\frac{1}{49}}$.

$\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]<\log_7\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]^{-2}$. La funció $y=\log_7 x$ és estrictament creixent:

$\log_3\frac{x-1}{x+1}<\left[\log_3\frac{x-1}{x+1}\right]^{-2}$.

Efectuem el canvi $a=\log_3\frac{x-1}{x+1}$, $a>0$.

$a<a^{-2}$.
$a^3<1$.
$0<a<1$.
Desfent el canvi:

$0<\log_3\frac{x-1}{x+1}<1=\log_3 3$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent:

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}<3\\ x<-1\end{cases}$.

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}-3<0\\ x<-1\end{cases}$.

$\begin{cases}\dfrac{-2x-4}{x+1}<0\\ x<-1\end{cases}$. La solució és $x<-2$.

248.- Resoleu la inequació:

$\log_{\frac{1}{27}}\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]>\log_3\left[\log_{\frac{1}{4}}\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right]$.

Selectivitat russa 2001 6. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}>0\\ \log_2\dfrac{x+1}{x-1}>0=\log_3 1\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]1,+\infty\right[$.

$\log_{\frac{1}{27}}\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]>\log_3\left[\log_{\frac{1}{4}}\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right]$. Canvi de base:

$$\log_{\frac{1}{27}}\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]>\log_3\left[\frac{\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}{\log_2\frac{1}{4}}\right].$$

$\log_{\frac{1}{27}}\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]>\log_3\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]$. Canvi de base:

$$\frac{\log_3\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]}{\log_3\frac{1}{27}}>\log_3\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right].$$

$\log_3\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]^{-\frac{1}{3}}>\log_3\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent:

$$\left[\log_2\frac{x+1}{x-1}\right]^{-\frac{1}{3}}>\log_2\frac{x+1}{x-1}.$$

Efectuem el canvi $a=\log_2\frac{x+1}{x-1}$, $a>0$.

$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}>a$, $a>0$.

$\frac{1}{a}>a^3$

$a^4<1$.

$0<a<1$.

Desfent el canvi:

$0<\log_2\frac{x+1}{x-1}<1=\log_2 2$. La funció $y=\log_2 x$ és estrictament creixent:

$\frac{x+1}{x-1}<2$.

$\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}-2<0\\ x>1\end{cases}$. La solució és $x>3$.

249.- Resoleu l'equació:

$2^{\log_x\left(x\left(9x^2-12x+4\right)\right)}-2^{\log_2 9+\log_x(3x-2)}+4=0$.

Selectivitat russa 2002 1.2.

Solució:

El domini de les solucions de l'equació és $\begin{cases}x>0\\ 3x-2>0\\ x\neq 1\end{cases}$, és a dir, $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[\sim\{1\}$.

$2^{\log_x\left(x\left(9x^2-12x+4\right)\right)}-2^{\log_2 9+\log_x(3x-2)}+4=0$.

$2^{\log_x\left(x(3x-2)^2\right)}-2^{\log_2 9}\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+4=0$

$2^{\log_x x}\cdot 2^{2\log_x(3x+2)}-2^{\log_2 9}\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+4=0$.

$2\cdot 2^{2\log_x(3x+2)}-9\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+4=0$

Efectuant el canvi $a=\log_x(3x-2)$

$2\cdot 2^{2a}-9\cdot 2^{a}+4=0$.

Efectuant el canvi $b=2^{a}$, $b>0$

$2b^2-9b+4=0$. Resolent l'equació:

$b=4,\ \dfrac{1}{2}$.

Desfent el canvi b:

Si $b=4$

$2^a=4=2^2$.

$a=2$.

Desfent el canvi a:

$\log_x(3x-2)=2$. Definició de logaritme:

$x^2=3x-2$. Resolent l'equació:

$x=2$.

Si $b=\dfrac{1}{2}$.

$2^a=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$.

$a=-1$.

Desfent el canvi a:

$\log_x(3x-2)=-1$. Definició de logaritme:

$\dfrac{1}{x}=3x-2$. Resolent el sistema:

$x=\dfrac{-1}{3}, 1$ que no pertanyen al domini de les solucions.

Aleshores, L'única solució és $x=2$.

250.- Resoleu la inequació:

$$\frac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3}<1.$$

Selectivitat russa 2002 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}9-4x-x^2\geq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}$, és a dir,

$x\in\left]-2-\sqrt{13},-2+\sqrt{13}\right[\sim\{-3\}$.

$$\frac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3}<1.$$

Suposem $x+3<0$, aleshores, $x\in\left]-2-\sqrt{13},-3\right[$.

$\sqrt{9-4x-x^2}>0$, $x+3<0$, aleshores, $\dfrac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3}<0<1$.

Per tant, $x \in \left]-2-\sqrt{13}, -3\right[$ és solució de la inequació:

Suposem $x+3>0$:

$\frac{\sqrt{9-4x-x^2}}{x+3}-1<0$.

$\frac{\sqrt{9-4x-x^2}-x-3}{x+3}<0$, $x+3>0$.

$\sqrt{9-4x-x^2}-x-3<0$.

$\sqrt{9-4x-x^2}<x+3$. Elevant al quadrat:

$9-4x-x^2<x^2+6x+9$.

$\begin{cases} x^2+5x>0 \\ x+3>0 \\ x\in\left]-3, 2+\sqrt{13}\right[\end{cases}$, aleshores, $x \in \left]0, -2+\sqrt{13}\right]$.

Aleshores, la solució de la inequació inicial és: $x \in \left]-2-\sqrt{13}, -3\right[\cup \left]0, -2+\sqrt{13}\right]$.

251.- Resoleu el sistema d'equacions:

$\begin{cases} 3\sqrt{3x^2-y^4}=2x-7y \\ 6\sqrt{3x^2-y^4}=x-8y \end{cases}$.

Selectivitat russa 2002 1. 5.

Solució:

El domini de les solucions és: $\begin{cases} 3x^2-y^4\geq 0 \\ 2x-7y\geq 0 \\ x-8y\geq 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} 3\sqrt{3x^2-y^4}=2x-7y \\ 6\sqrt{3x^2-y^4}=x-8y \end{cases}$.

$\begin{cases} 6\sqrt{3x^2-y^4}=4x-14y \\ 6\sqrt{3x^2-y^4}=x-8y \end{cases}$

$\begin{cases} 3\sqrt{3x^2-y^4}=2x-7y \\ x-2y=0 \end{cases}$.

Notem que $2y-8y\geq 0$. Aleshores, $y\leq 0$.

$\begin{cases} 3\sqrt{3(2y)^2-y^4}=2(2y)-7y \\ x=2y \end{cases}$. Simplificant:

$\begin{cases} \sqrt{y^2\left(12-y^2\right)}=-y \\ x=2y \end{cases}$

$\begin{cases} -y\sqrt{12-y^2}=-y \\ x=2y \end{cases}$.

$\begin{cases}\sqrt{12-y^2}=1\\ x=2y\end{cases}$. Elevant al quadrat:

$\begin{cases}y^2=11\\ x=2y\end{cases}$. Aleshores:

$\begin{cases}y=-\sqrt{11}\\ x=-2\sqrt{11}\end{cases}$ que satisfan totes les inequacions del domini de les solucions.

252.- Resoleu l'equació:

$\dfrac{\log_3(6x-5)}{\log_2 x}=\dfrac{3}{\log_2 3}$.

Selectivitat russa 2002 3. 1.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}6x-5>0\\ x\neq 1\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]\dfrac{5}{6},+\infty\right[\sim\{1\}$.

$\dfrac{\log_3(6x-5)}{\log_2 x}=\dfrac{3}{\log_2 3}$.

$\log_3(6x-5)\cdot\log_2 3=3\log_2 x$. Canvi de base:

$\log_2(6x-5)=3\log_2 x$.

$\log_2(6x-5)=\log_2 x^3$.

$x^3=6x-5$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\in\left]\dfrac{5}{6},+\infty\right[\sim\{1\}$.

253.- Resoleu l'equació:

$2+\sqrt{x+5}=|x+3|$.

Selectivitat russa 2002 3. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x+5\geq 0$, és a dir, $x\in[-5,+\infty[$

Suposem que $x+3\geq 0$, aleshores l'equació quedaria:

$2+\sqrt{x+5}=x+3$.

$\sqrt{x+5}=x+1$. Elevant al quadrat:

$x+5=x^2+2x+1$.

$x^2+x-4=0$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Suposem que $x+3<0$, és a dir, $x\in[-5,-3[$, aleshores l'equació quedaria:

$2+\sqrt{x+5}=-x-3$

$\sqrt{x+5}=-x-5$. Elevant al quadrat:

$x+5=(x+5)^2$. Resolent l'equació:
$x=-5$.

254.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2^{x-1}\cdot\log_3 y+2^{2x}=-1 \\ 9\cdot 2^{x}\cdot\log_{27} y+4(\log_9 y)^2=-5 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 2002 3. 5.

Solució:
El domini de les solucions és $y>0$.

$$\begin{cases} 2^{x+1}\cdot\log_3 y+2^{2x}=-1 \\ 9\cdot 2^{x}\cdot\log_{27} y+4(\log_9 y)^2=-5 \end{cases}$$. Canvi de base del logaritme:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2^{x}\cdot\log_3 y+\left(2^{x}\right)^2=-1 \\ 9\cdot 2^{x}\cdot\frac{\log_3 y}{\log_3 27}+4(\log_9 y)^2=-5 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2^{x}\cdot\log_3 y+\left(2^{x}\right)^2=-1 \\ 3\cdot 2^{x}\cdot\log_3 y+4(\log_9 y)^2=-5 \end{cases}.$$

Efectuant el canvi, $a=2^{x}$, $a>0$, $b=\log_3 y$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ab+a^2=-1 \\ 3ab+b^2=-5 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} b=\frac{-2-2a^2}{a} \\ 3a\frac{-2-2a^2}{a}+\left(\frac{-2-a^2}{a}\right)^2=-5 \end{cases}$$. Simplificant:

$$\begin{cases} b=\frac{-2-2a^2}{a} \\ 2a^4-7a^2-4=0 \end{cases}$$. Resolent la segona equació:

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-5 \end{cases}.$$

Desfent el canvi:

$$\begin{cases} 2^{x}=2=2^{1} \\ \log_3 y=-5 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3^{-5} \end{cases}.$$

255.- Resoleu la inequació:

$$\frac{\sqrt{5-x}}{3-x}<1.$$

Selectivitat russa 2002 5. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}5-x\geq 0\\ x\neq 3\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]-\infty,5\right]\sim\{3\}$.

Suposem que $3-x<0$, aleshores, $3<x\leq 5$.

$\sqrt{5-x}\geq 0$, $3-x<0$, aleshores, $\dfrac{\sqrt{5-x}}{3-x}<0<1$.

La solució és $3<x\leq 5$

Suposem que $3-x>0$, aleshores, $x<3$.

$$\frac{\sqrt{5-x}}{3-x}<1.$$

$\sqrt{5-x}<3-x$. Elevant al quadrat:

$5-x<x^2-6x+9$.

$\begin{cases}x^2-5x+4>0\\ 3<x\leq 5\end{cases}$. La solució és $x\in\left]4,5\right]$.

La solució de la inequació inicial és:

$x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]3,5\right]$.

256.- Resoleu la inequació:

$$8\frac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Selectivitat russa 2002 5. 3.

Solució:

$$8\frac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

$$8\frac{\frac{1}{9}\frac{3^x}{3^x}}{\frac{3^x}{3^x}-\frac{2^x}{3^x}}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

$$\frac{8}{9}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Efectuant el canvi $a=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, $a>0$. La funció és estrictament decreixent:

$$\frac{8}{9}\frac{1}{1-a}>1+a.$$

$\frac{8}{9(1-a)}-(1+a)>0$.

$\frac{9a^2-1}{9(1-a)}>0$.

$\frac{(3a+1)(3a-1)}{1-a}>0$.

La solució és $a\in \left]\frac{1}{3},1\right[$.

Desfent el canvi:

$\frac{1}{3}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$. $a=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ és estrictament decreixent:

$\begin{cases} x>0 \\ x<\log_{2/3}\frac{1}{3} \end{cases}$.

Aleshores, $x\in \left]0,\log_{2/3}\frac{1}{3}\right[$.

257.- Resoleu la inequació:

$9\log_5(3+x)^4<4\log_3(-x-1)^9\cdot\log_5 3$.

Selectivitat russa 2003 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} -x-1>0 \\ 3+x\neq 0 \end{cases}$, és a dir, $x\in \left]-\infty,-1\right[\sim\{-3\}$.

$9\log_5(3+x)^4<4\log_3(-x-1)^9\cdot\log_5 3$.

$\log_5(3+x)^{36}<\log_3(-x-1)^{36}\cdot\log_5 3$. Canvi de base:

$\log_5(3+x)^{36}<\log_5(-x-1)^{36}$. La funció $y=\log_5 x$ és estrictament creixent:

$(3+x)^{36}<(-x-1)^{36}$, $-x-1>0$.

Suposem $3+x>0$. Aleshores, $-3<x<-1$. L'equació quedaria:

$3+x<-x-1$.

La solució és $\begin{cases} 2x<-4 \\ -3<x<-1 \end{cases}$, és a dir, $x\in \left]-3,-1\right[$.

Suposem $3+x<0$. L'equació quedaria:

$-(3+x)<-x-1$.

$-3<-1$.

La solució és $x<-3$, és a dir, $x\in \left]-\infty,-3\right[$.

La solució de la inequació inicial és la unió d'ambdues solucions:

$x\in \left]-\infty,-3\right[\cup\left]-3,-1\right[$.

258.- Resoleu la inequació:

$$\left(25^{x}-5^{x+1}-6\right)\log_5 x-6\ge 25^{\frac{x+1}{2}}-5^{2x}.$$

Selectivitat russa 2003 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x>0$

$$\left(25^{x}-5^{x+1}-6\right)\log_5 x-6\ge 25^{\frac{x+1}{2}}-5^{2x}.$$

$$\left(5^{2x}-5^{x+1}-6\right)\log_5 x\ge -\left(5^{2\frac{x+1}{2}}-5^{2x}-6\right).$$

$$\left(5^{2x}-5^{x+1}-6\right)\log_5 x\ge -\left(5^{2x}-5^{x+1}-6\right).$$

$$\left(5^{2x}-5^{x+1}-6\right)\left(\log_5 x+1\right)\ge 0.$$

La solució s'assoleix quan $\begin{cases}5^{2x}-5^{x+1}-6\ge 0\\ \log_5 x+1\ge 0\end{cases}$ o bé, $\begin{cases}5^{2x}-5^{x+1}-6\le 0\\ \log_5 x+1\le 0\end{cases}$.

Si $\begin{cases}5^{2x}-5^{x+1}-6\ge 0\\ \log_5 x+1\ge 0\end{cases}$.

$$\begin{cases}\left(5^{x}\right)^2-5\cdot 5^{x}-6\ge 0\\ \log_5 x\ge -1=\log_5\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Efectuant el canvi $a=5^{x}$, $a>0$. La funció $y=\log_5 x$ és estrictament creixent:

$$\begin{cases}a^2-5\cdot a-6\ge 0\\ x\ge\dfrac{1}{5}\\ x>0\end{cases}.$$

$$\begin{cases}a\in\left[6,+\infty\right[\\ x\ge\dfrac{1}{5}\end{cases}.$$

Desfent el canvi:

$\begin{cases}5^{x}>6=5^{\log_5 6}\\ x\ge\dfrac{1}{5}\end{cases}$. La funció $y=5^{x}$ és estrictament creixent:

$\begin{cases}x>\log_5 6\\ x\ge\dfrac{1}{5}\end{cases}$, la solució és, $x\in\left]\log_5 6,+\infty\right[$.

Si $\begin{cases}5^{2x}-5^{x+1}-6\le 0\\ \log_5 x+1\le 0\end{cases}$.

$$\begin{cases}\left(5^{x}\right)^2-5\cdot 5^{x}-6\ge 0\\ \log_5 x\ge -1=\log_5\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^x < 6 = 5^{\log_5 6} \\ x \le \dfrac{1}{5} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \log_5 6 \\ x \le \dfrac{1}{5} \\ x > 0 \end{cases}$$, la solució és $x \in \left]0, \dfrac{1}{5}\right]$.

La solució de la inequació inicial és :

$x \in \left]0, \dfrac{1}{5}\right] \cup \left]\log_5 6, +\infty\right[$.

259.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \dfrac{18}{3x^2+2y} - \dfrac{14}{2x^2-5y} = 3 \\ \dfrac{7}{2x^2-5y} + \dfrac{36}{3x^2+2y} = 1 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 2003 1. 5.

Solució:

$$\begin{cases} \dfrac{18}{3x^2+2y} - \dfrac{14}{2x^2-5y} = 3 \\ \dfrac{7}{2x^2-5y} + \dfrac{36}{3x^2+2y} = 1 \end{cases}.$$

$a = \dfrac{1}{3x^2+2y}, b = \dfrac{1}{2x^2-5y}$ el sistema quedaria:

$\begin{cases} 18a - 14b = 3 \\ 36a + 7b = 1 \end{cases}$. Resolent el sistema lineal:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{18} \\ b = \dfrac{-1}{7} \end{cases}.$$

Desfent el canvi:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3x^2+2y} = \dfrac{1}{18} \\ \dfrac{1}{2x^2-5y} = \dfrac{-1}{7} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 18 \\ 2x^2 - 5y = -7 \end{cases}.$$

Resolent el sistema: $\begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$, cap de les dues solucions anul·la els denominadors de les equacions del sistema inicial.

260.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 4^{3y+1}\cdot 7^{2x}=32 \\ 13^{x}\cdot 9^{2y+1}=81 \end{cases}$$

Selectivitat russa 2003 4. 2.

Solució:

$\begin{cases} 4^{3y+1}\cdot 7^{2x}=32 \\ 13^{x}\cdot 9^{2y+1}=81 \end{cases}$. Aïllem x de la segona equació i substituïm en la primera:

$$\begin{cases} 2^{6y+2}\cdot 7^{(-4y+2)\log_{13}3}=32 \\ x=\log_{13}3^{-4y+2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2^{6y-3}\cdot 7^{(-4y+2)\log_{13}3}=1 \\ x=\log_{13}3^{-4y+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(2^{3}\right)^{2y-1}\cdot\left(7^{2\log_{13}3}\right)^{2y-1}=1 \\ x=\log_{13}3^{-4y+2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \left(2^{3}\cdot 7^{2\log_{13}3}\right)^{2y-1}=1 \\ x=\log_{13}3^{-4y+2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2y-1=0 \\ x=\log_{13}3^{-4y+2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ x=\log_{13}1=0 \end{cases}.$$

261.- Resoleu la inequació:

$\left(\log_3\left(x^2-7x+12\right)\right)^{-1}<\log_{42}3$.

Selectivitat russa 2003 4. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $x^2-7x+12>0$, és a dir, $]-\infty,3[\cup]4,+\infty[$.

$\left(\log_3\left(x^2-7x+12\right)\right)^{-1}<\log_{42}3$. Notem que $\log_{42}3>0$:

$\dfrac{1}{\log_3\left(x^2-7x+12\right)\cdot\log_{42}3}<1$. Canvi de base:

$$\frac{1}{\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)}<1.$$

$$\frac{1}{\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)}-1<0.$$

$\dfrac{1-\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)}{\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)}<0$. Aleshores:

$\begin{cases} 1-\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)>0 \\ \log_{42}\left(x^2-7x+12\right)<0 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} 1-\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)<0 \\ \log_{42}\left(x^2-7x+12\right)>0 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} 1-\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)>0 \\ \log_{42}\left(x^2-7x+12\right)<0 \end{cases}$.

$\begin{cases} \log_{42}\left(x^2-7x+12\right)<1=\log_{42}42 \\ \log_{42}\left(x^2-7x+12\right)<0=\log_{42}1 \end{cases}$. La funció $y=\log_{42}x$ és estrictament creixent:

$\begin{cases} x^2-7x+12<42 \\ x^2-7x+12<1 \\ x\in\left]-\infty,3\right[\cup\left]4,+\infty\right[\end{cases}$. La solució és $x\in\left]\frac{7-\sqrt{5}}{2},3\right[\cup\left]4,\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right[$.

Si $\begin{cases} 1-\log_{42}\left(x^2-7x+12\right)<0 \\ \log_{42}\left(x^2-7x+12\right)>0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x^2-7x+12>42 \\ x^2-7x+12>1 \\ x\in\left]-\infty,3\right[\cup\left]4,+\infty\right[\end{cases}$. La solució és $x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]10,+\infty\right[$.

La solució de la inequació és la unió de les dues solucions:

$x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]\frac{7-\sqrt{5}}{2},3\right[\cup\left]4,\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]10,+\infty\right[$.

262.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{12x^2+54+6}+\left|2x^2+9x\right|\geq 11$.

Selectivitat russa 2003 3. 5.

Solució:

$\sqrt{12x^2+54x+6}+\left|2x^2+9x\right|\geq 11$.

$\sqrt{6\left(2x^2+9\right)+6}+\left|2x^2+9x\right|\geq 11$.

Efectuem el canvi $a=2x^2+9x$.

$\sqrt{6a+6}+|a|\geq 11$

Si $a\geq 5$, aleshores, $6a+6\geq 36$, per tant, $\sqrt{6a+6}+|a|\geq 11$.

Si $a<-1$, aleshores, $6a+6<0$. Aleshores, l'equació no té solució.

Si $-1\leq a<5$. $|a|<5$, $6a+6<36$, per tant, $\sqrt{6a+6}+|a|<11$. En aquest cas no té solució.

Desfent el canvi:

$a\geq 5$, $\begin{cases} 2x^2+9x\geq 5 \\ 12x^2+54x+6\geq 0 \end{cases}$.

La solució és $x\in\left]-\infty,-5\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

263.- Resoleu la inequació:

$\left|x^2+2x\right|+x^2-\frac{3}{2}\geq 0$.

Selectivitat russa 2003 5. 2.

Solució:

Suposem que $x^2+2x\geq 0$, aleshores, $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[0,+\infty\right[$.

La inequació quedaria:

$x^2+2x+x^2-\frac{3}{2}\geq 0$.

$\begin{cases}2x^2+2x-\frac{3}{2}\geq 0\\ x^2+2x\geq 0\end{cases}$. La solució és, $\left]-\infty,-2\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Suposem que $x^2+2x<0$, aleshores, $x\in\left]-2,0\right[$.

La inequació quedaria:

$-\left(x^2+2x\right)+x^2-\frac{3}{2}\geq 0$.

$\begin{cases}x\leq\frac{-3}{4}\\ x^2+2x<0\end{cases}$. La solució és, $x\left]-2,\frac{-3}{4}\right]$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions:

$\left]-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

264.- Resoleu la inequació:

$\log_9\left(3^x-1\right)\cdot\log_3\left(3^{x+1}-3\right)<3$.

Selectivitat russa 2003 5. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $3^x-1>0$, és a dir, $x>0$.

$\log_9\left(3^x-1\right)\cdot\log_3\left(3^{x+1}-3\right)<3$. Canvi de base:

$\frac{\log_3\left(3^x-1\right)}{\log_3 9}\cdot\log_3\left(3\left(3^x-1\right)\right)<3$.

$\frac{\log_3\left(3^x-1\right)}{2}\cdot\left(1+\log_3\left(3^x-1\right)\right)<3$.

Efectuant el canvi $a=\log_3\left(3^x-1\right)$:

$a(1+a)<6$.

$(a+3)(a-2)<0$. Resolent la inequació:

$-3<a<2$.

Desfent el canvi:

$-3<\log_3\left(3^x-1\right)<2$.

$\log_3\frac{1}{27}<\log_3\left(3^x-1\right)<\log_3 9$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent:

$\frac{1}{27} < 3^x - 1 < 9$.

$\frac{28}{27} < 3^x < 10$.

$3^{\log_3 \frac{28}{27}} < 3^x < 3^{\log_3 10}$, $x > 0$.

La funció $y = 3^x$ és estrictament creixent:

$\log_3 \frac{28}{27} < x < \log_3 10$.

265.- Resoleu el sistema d'equacions:

$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y| \\ x(4y+x-3) + y(4y+3) = 61 \end{cases}$.

Selectivitat russa 2003 4. 2.

Solució.

Suposem que $x + 2y \geq 0$, $x - y \geq 0$. El sistema quedaria:

$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y| \\ (x+2y)^2 - 3(x-y) = 61 \end{cases}$.

Efectuant el canvi $a = x + 2y$, $b = x - y$, $-9 \leq a \leq 9$, $b \geq 0$, el sistema quedaria:

$\begin{cases} \sqrt{b} = 9 - |a| \\ a^2 - 3b = 61 \end{cases}$.

Suposem $0 \leq a \leq 9$, aleshores:

$\begin{cases} \sqrt{b} = 9 - a \\ a^2 - 3b = 61 \end{cases}$. Elevant al quadrat:

$\begin{cases} b = (9-a)^2 \\ a^2 - 3b = 61 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}$. Desfent el canvi:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$.

Suposem que $-9 \leq a < 0$, aleshores:

$\begin{cases} \sqrt{b} = 9 + a \\ a^2 - 3b = 61 \end{cases}$. Elevant al quadrat:

$\begin{cases} b = (9+a)^2 \\ a^2 - 3b = 61 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$. Desfent el canvi:

$\begin{cases} x + 2y = -8 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$.

266.- Resoleu el sistema d'inequacions:

$-2 < \dfrac{6}{x^2 - x - 6} < -1$.

Selectivitat russa 2004 1. 2.

Solució:

$-2 < \dfrac{6}{x^2 - x - 6} < -1$.

$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2 - x - 6} < -1 \\ \dfrac{6}{x^2 - x + 6} > -2 \end{cases}$.

$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2 - x - 6} + 1 < 0 \\ \dfrac{6}{x^2 - x + 6} + 2 > 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x - 6} < 0 \\ \dfrac{2\left(x^2 - x - 3\right)}{x^2 - x + 6} > 0 \end{cases}$.

La solució de la primera inequació és: $x \in \left]-2, 0\right[\cup \left]1, 3\right[$

La solució de la segona inequació és $x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]3, +\infty\right[$.

La solució del sistema inicial és igual a la intersecció de les solucions de les dues inequacions:

$x \in \left]\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, 0\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, 3\right[$.

267.- Resoleu la inequació:

$\log_{27}\left(x^2+4x+3\right)^3+\log_3\left(x^2-4x+3\right)<2$

Selectivitat russa 2004 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és: $\begin{cases} x^2+4x+3>0 \\ x^2-3x+4>0 \end{cases}$, és a dir,

$x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]3,+\infty\right[$.

$\log_{27}\left(x^2+4x+3\right)^3+\log_3\left(x^2-4x+3\right)<0$. Canvi de base:

$\dfrac{3\log_3\left(x^2+4x+3\right)}{\log_3 27}+\log_3\left(x^2-4x+3\right)<\log_3 3^2$.

$\log_3\left(x^2+4x+3\right)+\log_3\left(x^2-4x+3\right)<\log_3 9$.

$\log_3\left[\left(x^2+4x+3\right)\left(x^2-4x+3\right)\right]<\log_3 9$.

$\log_3\left(x^4-10^2+9\right)<\log_3 9$. La funció $y=\log_3 x$ és estrictament creixent:

$\begin{cases} x^4-10x^2<0 \\ x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]3,+\infty\right[\end{cases}$.

La solució del sistema inicial és:

$x\in\left]-\sqrt{10},-3\right[\cup\left]-1,0\right[\cup\left]0,1\right[\cup\left]3,\sqrt{10}\right[$.

268.- Resoleu el sistema d'equacions:

$\begin{cases} \left|3^x-3^y\right|+3^x+3\cdot 3^y=8\sqrt{3} \\ \left|3^x+3^{-y}\right|+2\cdot 3^x-28\cdot 3^{-y}=0 \end{cases}$.

Selectivitat russa 2004 1. 5.

Solució:

Notem que $3^x+3^{-y}>0$.

Suposem que $x\geq y$, aleshores, $3^x-3^y\geq 0$, per ser la funció $y=3^x$ estrictament creixent. El sistema quedaria:

$\begin{cases} 3^x-3^y+3^x+3\cdot 3^y=8\sqrt{3} \\ 3^x+3^{-y}+2\cdot 3^x-28\cdot 3^{-y}=0 \end{cases}$.

$\begin{cases} 3^x+3^y=4\sqrt{3} \\ 3^x=3^{-y+2} \end{cases}$.

$\begin{cases} 3^{-y+2}+3^y=4\sqrt{3} \\ x=-y+2 \end{cases}$.

Efectuem el canvi $a=3^y$, $a>0$.

$\begin{cases} \dfrac{9}{a}+a=4\sqrt{3} \\ x=-y+2 \end{cases}$. Resolent la primera equació:

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ x = -y + 2 \end{cases}.$$

Desfent el canvi:

$$\begin{cases} 3^y = \sqrt{3} = 3^{1/2} \\ x = -y + 2 \end{cases}, \text{ aleshores:}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Suposem que $x < y$, aleshores, $3^x - 3^y < 0$, per ser la funció $y = 3^x$ estrictament creixent. El sistema quedaria:

$$\begin{cases} -3^x + 3^y + 3^x + 3 \cdot 3^y = 8\sqrt{3} \\ 3^x + 3^{-y} + 2 \cdot 3^x - 28 \cdot 3^{-y} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 3^y = 2\sqrt{3} \\ x = -y + 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = \log_3\left(2\sqrt{3}\right) \\ x = 2 - \log_3\left(2\sqrt{3}\right) = \log_3 \dfrac{9}{2\sqrt{3}} \end{cases}.$$

269.- Resoleu la inequació:

$$\frac{|x-3|}{2 - \dfrac{8}{|x-3|}} < -1.$$

Selectivitat russa 2004 3. 2.

Solució:
Notem que $x - 3 \neq 0$.
Efectuem el canvi $a = x - 3$.
Suposem que $a > 0$, la inequació quedaria:

$$\frac{a}{2 - \dfrac{8}{a}} < -1.$$

$$\frac{a^2}{2a - 8} < -1.$$

$$\frac{a^2}{2a - 8} + 1 < 0.$$

$\dfrac{a^2 + 2a - 8}{2a - 8} < 0$, la solució és $a \in \left]2, 4\right[$

$2 < x - 3 < 4$, és a dir: $5 < x < 7$.

Suposem que $a < 0$, la inequació quedaria:

$$\frac{-a}{2+\frac{8}{a}}<-1.$$
$$\frac{-a^2}{2a+8}<-1.$$
$$\frac{-a^2}{2a+8}+1<0.$$
$\frac{-a^2+2a+8}{2a+8}<0$, la solució és $a\in\left]-4,-2\right[$
$-4<x-3<-2$, és a dir: $-1<x<1$.
La solució del sistema inicial és la unió ce les dues solucions:
$x\in\left]-1,1\right[\cup\left]5,7\right[$.

270.- Resoleu la inequació:
$\log_2\left[\left(3+2x-x^2\right)(x-2)\right]-\log_8\left[\left(4-4x+x^2\right)(8x-16)\right]+1>0$.
Selectivitat russa 2004 3. 3.

Solució:
El domini de les solucions és: $\left(3+2x-x^2\right)(x-2)>0$, és a dir, $x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]2,3\right[$.
$\log_2\left[\left(3+2x-x^2\right)(x-2)\right]-\log_8\left[\left(4-4x+x^2\right)(8x-16)\right]+1>0$.
$\log_2\left[\left(3+2x-x^2\right)(x-2)\right]-\log_8\left[8(x-2)^3\right]+1>0$.
$\log_2\left[\left(3+2x-x^2\right)(x-2)\right]-\log_8 8-\log_8(x-2)^3+1>0$.
$\log_2\left[\left(3+2x-x^2\right)(x-2)\right]-3\log_8(x-2)>0$. Canvi de base:
$$\log_2\left[\left(3+2x-x^2\right)(x-2)\right]-3\frac{\log_2(x-2)}{\log_2 8}>0.$$
$\log_2\left[\left(3+2x-x^2\right)(x-2)\right]-\log_2(x-2)>0$.
$$\log_2\left[\frac{\left(3+2x-x^2\right)(x-2}{x-2}\right]>0=\log_2 1$$
$\log_2\left(3+2x-x^2\right)>\log_2 1$. La funció $y=\log_2 x$ és estrictament creixent:
$$\begin{cases}3+2x-x^2>1\\ x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]2,3\right[\end{cases}.$$
$$\begin{cases}2+2x-x^2>0\\ x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]2,3\right[\end{cases}$$
La solució de l'equació és: $x\in\left]2,1+\sqrt{3}\right[$.

271.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 7\cdot 2^{2x-y}-5\sqrt{4x-y}=56-10x \\ 2\cdot 2^{2x-y}-3\sqrt{4x-y}=6x+16 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 2004 3. 5.

Solució:

$$\begin{cases} 7\cdot 2^{2x-y}-5\sqrt{4x-y}=56-10x \\ 2\cdot 2^{2x-y}-3\sqrt{4x-y}=6x+16 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 7\cdot 2^{2x-y}-5\left(\sqrt{4x-y}+2x\right)=56 \\ 2\cdot 2^{2x-y}-3\left(\sqrt{4x-y}+2x\right)=16 \end{cases}.$$

Efectuem el canvi $a=2^{2x-y}$, $b=\sqrt{4x-y}+2x$. El sistema quedaria:

$\begin{cases} 7a-5b=56 \\ 2a-3b=16 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} a=8 \\ b=0 \end{cases}.$$

Desfent el canvi:

$$\begin{cases} 2^{2x-y}=8=2^3 \\ \sqrt{4x-y}+2x=0 \end{cases},\quad x\le 0.$$

$\begin{cases} 2^{2x-y}=8=2^3 \\ \sqrt{4x-y}=-2x \end{cases},\quad x\le 0$. Elevant al quadrat la segona equació:

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-y=4x^2 \end{cases},\quad x\le 0.$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{4} \\ y=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

272.- Resolen la inequació:

$$\frac{\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x-2)}{\log_{\pi}\left(\dfrac{7}{2}-x\right)}>0.$$

Selectivitat russa 2005 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions de la inequació és: $\begin{cases} x-2>0 \\ \dfrac{7}{2}-x>0 \end{cases}$, és a dir, $x\in \left]2,\dfrac{7}{2}\right[$

$\dfrac{\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x-2)}{\log_{\pi}\left(\frac{7}{2}-x\right)}>0$, aleshores:

$\begin{cases}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x-2)>0=\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}1\\ \log_{\pi}\left(\frac{7}{2}-x\right)>0=\log_{\pi}1\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x-2)>0=\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}1\\ \log_{\pi}\left(\frac{7}{2}-x\right)>0=\log_{\pi}1\end{cases}$.

Suposem $\begin{cases}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x-2)>0=\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}1\\ \log_{\pi}\left(\frac{7}{2}-x\right)>0=\log_{\pi}1\end{cases}$, la funció $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}x$ és estrictament decreixent i la funció $y=\log_{\pi}x$ és estrictament creixent, aleshores:

$\begin{cases}x-2<1\\ \frac{7}{2}-x>1\\ x\in\left]2,\frac{7}{2}\right[\end{cases}$. Resolent la inequació: $2<x<\frac{5}{2}$.

Suposem $\begin{cases}\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x-2)<0=\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}1\\ \log_{\pi}\left(\frac{7}{2}-x\right)<0=\log_{\pi}1\end{cases}$, la funció $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}x$ és estrictament decreixent i la funció $y=\log_{\pi}x$ és estrictament creixent, aleshores:

$\begin{cases}x-2>1\\ \frac{7}{2}-x<1\\ x\in\left]2,\frac{7}{2}\right[\end{cases}$. Resolent la inequació: $3<x<\frac{7}{2}$.

La solució de la inequació inicial és igual a la unió de les dues solucions:

$x\in\left]2,\frac{5}{2}\right[\cup\left]3,\frac{7}{2}\right[$.

273.- Resoleu la inequació:

$2\sqrt{(x-3)\left(x^2-5x+6\right)}\le x^2-5x+6$.

Selectivitat russa 2005 1. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $(x-3)\left(x^2-5x+6\right)\ge 0$, és a dir, $x\in[2,+\infty[$.

$2\sqrt{(x-3)\left(x^2-5x+6\right)}\le x^2-5x+6$.

$0\le 2\sqrt{(x-3)^2(x-2)}\le(x-3)(x-2)$. Elevant al quadrat:

$4\left(x-3)^2(x-2\right)\le(x-3)^2(x-2)^2$.

$$\begin{cases}(x-3)^2(x-2)(x-6)\ge 0\\ x\in[2,+\infty[\end{cases}.$$

La solució és: $x\in[6,+\infty[\cup\{2,3\}$.

274.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases}x^2+4x(x+2)2^{-y}-5=0\\ 4^y-(5x+2)2^y+4x^2+8x=0\end{cases}.$$

Selectivitat russa 2005 2. 5.

Solució:

$$\begin{cases}x^2+4x(x+2)2^{-y}-5=0\\ 4^y-(5x+2)2^y+4x^2+8x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x^2+8x=\left(5-x^2\right)2^y\\ 2^{2y}-(5x+2)2^y+\left(5-x^2\right)2^y=0\end{cases}.$$

$$\begin{cases}4x^2+8x=\left(5-x^2\right)2^y\\ 2^y\left(2^y+\left(-x^2-5x+3\right)\right)=0\end{cases}.$$ Notem que $2^y\neq 0$:

$$\begin{cases}4x^2+8x=\left(5-x^2\right)2^y\\ 2^y=x^2+5x-3\end{cases}.$$ $x^2+5x-3>0$, $x\in R\sim\left[\frac{-5-\sqrt{37}}{2},\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right]$.

$$\begin{cases}4x^2+8x=\left(5-x^2\right)\left(x^2+5x-3\right)\\ 2^y=x^2+5x-3\end{cases}.$$

$$\begin{cases}x^4+5x^3-4x^2-17x+15=0\\ 2^y=x^2+5x-3\end{cases}.$$

Aplicant la regla de Ruffini les solucions de la primera equació que pertanyen al domini són $x=1,\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases}x=1\\ 2^y=3\end{cases},\ \text{aleshores,}\ \begin{cases}x=1\\ y=\log_2 3\end{cases}.$$

$$\begin{cases}x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\\ 2^y=-2+2\sqrt{13}\end{cases}.\ \begin{cases}x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\\ y=\log_2\left(-2+2\sqrt{13}\right)\end{cases}.$$

275.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{6-x^2-5x}<x+\sqrt{6}$.

Selectivitat russa 2005 3. 2.

Solució:

$0\le\sqrt{6-x^2-5x}<x+\sqrt{6}$.

El domini de les solucions és: $\begin{cases} 6-x^2-5x \ge 0 \\ x+\sqrt{6} > 0 \end{cases}$, és a dir, $x \in \left]-\sqrt{6}, 1\right]$.

Elevant al quadrat:

$6-x^2-5x \le x^2+2\sqrt{6}x+6$,

$\begin{cases} 2x^2+\left(2\sqrt{6}+5\right)x \ge 0 \\ x \in \left]-\sqrt{6}, 1\right] \end{cases}$.

La solució de la inequació és:

$x \in \left]0, 1\right]$.

276.- Resoleu l'equació:

$7^{x\sqrt{8}}-7\sqrt{2}\cdot 21^{x\sqrt{2}}+4\cdot 3^{1+x\sqrt{8}}=0$.

Selectivitat russa 2005 3. 3.

Solució:

$7^{x\sqrt{8}}-7\sqrt{2}\cdot 21^{x\sqrt{2}}+4\cdot 3^{1+x\sqrt{8}}=0$.

$7^{x2\sqrt{2}}-7\sqrt{2}\cdot 21^{x\sqrt{2}}+12\cdot 3^{x2\sqrt{2}}=0$

$\left(\frac{7}{3}\right)^{x\sqrt{2}}-7\sqrt{2}+12\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{x\sqrt{2}}=0$. Dividint l'equació per $21^{x\sqrt{2}} \ne 0$.

Efectuant el canvi $a=\left(\frac{7}{3}\right)^{x\sqrt{2}}$, $a>0$:

$a-7\sqrt{2}+12\frac{1}{a}=0$. Resolent l'equació:

$a=6\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Desfent el canvi:

Si $a=6\sqrt{2}$, $\left(\frac{7}{3}\right)^{x\sqrt{2}}=6\sqrt{2}=\left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\frac{7}{3}}6\sqrt{2}}$.

Aleshores, $x\sqrt{2}=\log_{\frac{7}{3}}6\sqrt{2}$.

$$x=\frac{\log_{\frac{7}{3}}6\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Si $a=\sqrt{2}$, $\left(\frac{7}{3}\right)^{x\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\frac{7}{3}}\sqrt{2}}$.

Aleshores, $x=\dfrac{\log_{\frac{7}{3}}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

277.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+2\sqrt{x-y}=y+3 \\ \left|(x+1)+2y\right|+2\left|x+2(y-1)\right|=3 \end{cases}.$$

Selectivitat russa 2005 3. 5.

Solució:
Considerem la primera equació:

$x+2\sqrt{x-y}=y+3$.

$x-y+2\sqrt{x-y}=3$.

Efectuant el canvi $a=x-y$, $a\geq 0$.

$a+2\sqrt{a}=3$. Resolent l'equació:

$a=1$.

Aleshores, $x-y=1$ (1)

$x=1+y$.

Substituint en la segona equació del sistema:

$\left|1+y+1+2y\right|+2\left|1+y+2y-2\right|=3$.

$\left|3y+2\right|+2\left|3y-1\right|=3$.

Suposem que $y\geq\frac{1}{3}$, el sistema quedaria:

$\begin{cases} x=y+1 \\ 3y+2+2(3y-1)=3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Suposem que $\frac{-2}{3}<y<\frac{1}{3}$, el sistema quedaria:

$\begin{cases} x=y+1 \\ 3y+2+2(-3y+1)=3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$, que no pertany al domini de la incògnita y.

Suposem que $y\leq\frac{-2}{3}$, el sistema quedaria:

$\begin{cases} x=y+1 \\ -3y-2+2(-3y+1)=3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{3} \end{cases}$, que no pertany al domini de la incògnita y.

La solució del sistema inicial és, $\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

278.- Resoleu la inequació:

$$\frac{10}{5-\sqrt{x}} > 1.$$

Selectivitat russa 2006 1. 2.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 25 \end{cases}$.

$$\frac{10}{5-\sqrt{x}} > 1.$$

$$\frac{10}{5-\sqrt{x}} - 1 > 0.$$

$\dfrac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} > 0$, $5+\sqrt{x} > 0$. Aleshores:

$$5-\sqrt{x} > 0.$$

$5 > \sqrt{x} \geq 0$. Elevant al quadrat:

$\begin{cases} x < 25 \\ x \geq 0 \\ x \neq 25 \end{cases}$, la solució de la inequació és $x \in [0,25[$.

279.- Resoleu l'equació:

$$\frac{2^{x+1}}{2^{x+2}-3^x} = \frac{2^{x+2}+3^x}{2^{x-1}}.$$

Selectivitat russa 2006 1. 3.

Solució:

$$\frac{2^{x+1}}{2^{x+2}-3^x} = \frac{2^{x+2}+3^x}{2^{x-1}}.$$

$\dfrac{2\cdot 2^x}{4\cdot 2^x - 3^x} = \dfrac{4\cdot 2^x + 3^x}{\frac{1}{2}2^x}$ Dividint l'equació per $3^x \neq 0$:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{4\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1} = \frac{4\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}.$$

Efectuant el canvi $a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, $a > 0$:

$\frac{a}{4a-1}=\frac{4a+1}{a}$. Resolent l'equació:

$a=\sqrt{\frac{1}{15}}$. Desfent el canvi:

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\sqrt{\frac{1}{15}}$.

Aleshores, $x=\log_{2/3}\sqrt{\frac{1}{15}}=-\frac{1}{2}\log_{2/3}15$.

280.- Resoleu la inequació:

$\log_4(4-x)^2-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0$.

Selectivitat russa 2006 1. 5.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}\frac{4-x}{5-x}>0\\ x\neq 4\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]-\infty,4\right[\cup\left]5,+\infty\right[$.

$\log_4(4-x)^2-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0$. Canvi de base:

$\frac{\log_4(4-x)^2}{\log_2 4}-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0$.

$\log_2|4-x|-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0$.

Suposem que $x>5$. La inequació quedaria:

$\log_2(x-4)-\log_2\frac{x-4}{x-5}>0$.

$\log_2 x-5>0=\log_2 1$. La funció $y=\log_2 x$ és estrictament creixent:

$x-5>1$. Resolent la inequació: $x>6$.

Suposem que $x<4$. La inequació quedaria:

$\log_2(4-x)-\log_2\frac{4-x}{5-x}>0$.

$\log_2 5-x>0=\log_2 1$. La funció $y=\log_2 x$ és estrictament creixent:

$5-x>1$. Resolent la inequació: $x<4$.

La solució de la inequació inicial és la unió de les dues solucions:

$x\in\left]-\infty,4\right[\cup\left]6,+\infty\right[$.

281.- Resoleu l'equació:

$9^{x-1}\cdot 3^{2x}\cdot 5^{4x}+81^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{4x-2}\cdot 3^{2x}-34=0$.

Selectivitat russa 2006 3. 2.

Solució:

$9^{x-1}\cdot 3^{2x}\cdot 5^{4x}+81^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{4x-2}\cdot 3^{2x}-34=0$.

$3^{4x-2}\cdot 5^{4x}+3^{4x}\cdot 5^{4x-2}-34=0$.

$\frac{1}{9}3^{4x}\cdot 5^{4x}+\frac{1}{25}3^{4x}\cdot 5^{4x}-34=0$.

$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}\right)15^{4x}=34$.

$15^{4x}=15^{2}$.

$4x=2$.

$x=\frac{1}{2}$.

282.- Resoleu la inequació:

$\sqrt{(4-x)\sqrt{2x^2-2x-4}}\leq 4-x$

Selectivitat russa 2006 3. 3.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases}4-x\geq 0\\ 2x^2-2x-4\geq 0\end{cases}$, és a dir, $x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[2,4\right]$.

$0\leq\sqrt{(4-x)\sqrt{2x^2-2x-4}}\leq 4-x$. Elevant al quadrat:

$(4-x)\sqrt{2x^2-2x-4}\leq(4-x)^2$, $4-x\geq 0$.

$\sqrt{2x^2-2x-4}\leq 4-x$. Elevant al quadrat:

$2x^2-2x-4\leq x^2-8x+16$.

$\begin{cases}x^2+6x-20\leq 0\\ x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[2,4\right]\end{cases}$.

La solució de la inequació és $x\in\left[-3-\sqrt{29},-1\right]\cup\left[2,-3+\sqrt{29}\right]$.

283.- Resoleu el sistema d'equacions:

$\begin{cases}2x+y+\sqrt{4x^2-y^2}=6\\ y\sqrt{(2x+y)(2x-y)}=2\end{cases}$.

Selectivitat russa 2006 3. 5.

Solució:

$4x^2\geq y^2$.

$$\begin{cases} 2x+y+\sqrt{4x^2-y^2}=6 \\ y\sqrt{(2x+y)(2x-y)}=2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x+y+\sqrt{(2x+y)(2x-y)}=6 \\ y\sqrt{(2x+y)(2x-y)}=2 \end{cases}.$$

Efectuant el canvi $a=2x+y$, $b=2x-y$, aleshores, $\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{4} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} a+\sqrt{ab}=6 \\ (a-b)\sqrt{ab}=2 \end{cases}$. Resolent l'equació:

$$\begin{cases} a=\dfrac{13+\sqrt{7}}{3} \\ b=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} a=\dfrac{13-\sqrt{7}}{3} \\ b=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Desfent el canvi:

Si $\begin{cases} a=\dfrac{13+\sqrt{7}}{3} \\ b=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{10+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$.

Si $\begin{cases} a=\dfrac{13-\sqrt{7}}{3} \\ b=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3} \end{cases}$.

284.- Resoleu l'equació:

$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x}$.

KöMaL, desembre 2012.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$, és a dir, $x\in[1,\infty[$.

$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x}$. Multipliquem l'equció per $\sqrt{x}\neq 0$.

$\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^2-x}=x^2$. Elevant al quadrat:

$x^3-x+x^2-x-2x\sqrt{(x^2-1)(x-1)}=x^4$. Simplificant:

$2\sqrt{(x^2-1)(x-1)}=x^3-x^2-x+2$. Elevant al quadrat:

$x^6-2x^5-x^4+2x^3+x^2=0$- Factoritzant el polinomi:

$x^2\left(x^2-x-1\right)^2=0$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Comprovant les solucions de l'equacio anterior en l'equació inicial l'única solució de l'equació és:

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

285.- Resoleu l'equació:

$\left(x^2-5x+5\right)^{x^2+4x-60}=1.$

Solució:

$1^a=1$ si $a\in R$. $b^0=1$ si $b\neq 0$. $(-1)^{2n}=1$ si $n\in Z$

a) Si $x^2-5x+5=1$. Resolent l'equació:

$x=1,4$.

b) Si $x^2+4x-60=0$. Resolent l'equació:

$x=-10,6$.

Notem que cap de les dues solucions no anul·la la base de la potència.

c) Si $x^2-5x+5=-1$. Resolent l'equació:

$x=2,3$.

Si $x=2$, l'exponent és $2^2+4\cdot 2-60=-52$ que és parell. Aleshores, és solució.

Si $x=3$, l'exponent és $3^2+4\cdot 3-60=-39$ que és imparell. Aleshores, no és solució.

Per tant, les solucions de l'equació inicial són:

$x=-10,1,2,4,6$.

286.- Resoleu l'equació segons els valors de a:

$2|x|+|x-3|=a$.

Selectivitat russa, 1993 1. 7.

Solució:

Suposem $\begin{cases}x\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}$, és a dir, $x\geq 3$. L'equació quedaria:

$2x+x-3=a$. Resolent l'equació:

$x=\frac{a+3}{3}\geq 3$.

$a\geq 6$.

Suposem $\begin{cases}x\leq 0\\ x-3\leq 0\end{cases}$, és a dir, $x\leq 0$. L'equació quedaria:

$-2x-(x-3)=a$. Resolent l'equació:

$x=\frac{3-a}{3}\leq 0$.

$a\geq 3$.

Suposem $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$, és a dir, $0 < x < 3$. L'equació quedaria:

$2x - (x - 3) = a$. Resolent l'equació:

$$\begin{array}{l} x = a - 3 \\ 0 < a - 3 < 3 \end{array}.$$

És a dir, si $3 < a < 6$.

Per tant:

Si $a < 3$ l'equació no té solució.

Si $a \geq 6$, $x = \dfrac{a+3}{3}, \dfrac{3-a}{3}$.

Si $3 \leq a < 6$, $x = \dfrac{3-a}{3}, a - 3$.

287.- Per a quins valors de a l'equació, $2ax^2 - (4a^3 + 8a^2 + 1)x + 2a(a+2) = 0$ totes les solucions satisfan la condició $|x| < 1$.

Selectivitat russa, 1991, 1. 5.

Solució:

$2ax^2 - (4a^3 + 8a^2 + 1)x + 2a(a+2) = 0$.

Suposem $a = 0$, l'equació quedaria de primer grau:

$x = 0$ que satisfà la condició.

Suposem $a \neq 0$

$2ax^2 - (4a^3 + 8a^2 + 1)x + 2a(a+2) = 0$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{4a^3 + 8a^2 - 1 \pm \sqrt{(4a^3 + 8a^2 + 1)^2 - 16a^2(a+2}}{4a}.$$

$$x = \frac{4a^3 + 8a^2 - 1 \pm \sqrt{(4a^3 + 8a^2 - 1)^2}}{4a}.$$

$x = 2a^2 + 4a, \dfrac{1}{2a}$, $|x| < 1$.

$\begin{cases} -1 < 2a^2 + 4a < 1 \\ -1 < \dfrac{1}{2a} < 1 \end{cases}$, Simplificant: $\begin{cases} 2a^2 + 4a - 1 < 0 \\ 2a^2 + 4a + 1 > 0 \\ \dfrac{1-2a}{2a} < 0 \\ \dfrac{1+2a}{2a} > 0 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$a \in \left] \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \right[$,

Aleshores, Si $a \in \left] \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \right[\cup \{0\}$, les solucions de l'equació inicial satisfan $|x| < 1$.

288.- Per a quins valors de a l'equació $a(x+3)^2-2|x+3|+2=0$ té quatre solucions distintes.
Selectivitat russa 1994 1.7.

Solució:
Suposem $a=0$, l'equació quedaria de primer grau:
$-2|x+3|+2=0$.
Si $x+3\geq 0$, aleshores:
$-2x-6+2=0$. $x=-2$.
Si $x+3<0$, aleshores:
$2x+6+2=0$. $x=-4$.

Siga $a\neq 0$
Efectuem el canvi $y=x+3$, l'equació quedaria:
$ay^2-2|y|+2=0$.
Suposem $y\geq 0$, aleshores:
$ay^2-2y+2=0$.
$y=\frac{2\pm\sqrt{4-8a}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1-2a}}{a}$.
A fi que tinga dues solucions distintes el seu discriminant ha de ser positiu:

$$\begin{cases}1-2a>0\\ y\geq 0\end{cases}.\ \begin{cases}1-2a>0\\ \frac{1+\sqrt{1-2a}}{a}\geq 0\\ \frac{1-\sqrt{1-2a}}{a}\geq 0\end{cases}$$. La solució és, $a\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

Suposem $y<0$, aleshores:
$ay^2+2y+2=0$.
$y=\frac{-2\pm\sqrt{4-8a}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-2a}}{a}$.
A fi que tinga dues solucions distintes el seu discriminant ha de ser positiu:

$$\begin{cases}1-2a>0\\ y<0\end{cases}.\ \begin{cases}1-2a>0\\ \frac{-1+\sqrt{1-2a}}{a}<0\\ \frac{-1-\sqrt{1-2a}}{a}<0\end{cases}$$. La solució és, $a\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

Aleshores l'equació inicial té quatre solucions si $a\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

289.- Per a quins valors de a la inequació $\begin{cases} -2x^2+12x+a\ge 0 \\ x\le -1 \end{cases}$ té solució.

Selectivitat russa 1994 3.7.

Solució:

Resolem l'equació $-2x^2+12x+a=0$.

$x=\dfrac{6\pm\sqrt{36+2a}}{2}$.

Per tindre solució el sistema s'ha d'acomplir:

$\begin{cases} 36+2a\ge 0 \\ \dfrac{6-\sqrt{36+2a}}{2}\le -1 \end{cases}$.

$\begin{cases} a\ge -18 \\ \sqrt{36+2a}\ge 8 \end{cases}$. és a dir, $a\ge 14$.

Per tant,

Si $a\ge 14$ el sistema té solució, $x\in\left[\dfrac{6-\sqrt{36+2a}}{2},-1\right]$.

290.- Resoleu segons els valors de a la inequació:

$2^{\sqrt{x-1}}>3^{a+1}$.

Selectivitat russa 1995 5.7.

Solució:

El domini de les solucions és $x\ge 1$.

$2^{\sqrt{x-1}}>3^{a+1}$

La funció $y=\log_2 x$ és estrictament creixent:

$\sqrt{x-1}>(a+1)\log_2 3$.

Si $a+1<0$, $x-1>0$, és a dir, $x>1$.

Si $a+1\ge 0$, elevant al quadrat:

$x-1>((a+1)\log_2 3)^2$, és a dir, $x>1+((a+1)\log_2 3)^2$.

Per tant:

Si $a<-1$, $x>1$.

Si $a\ge -1$, $x>1+((a+1)\log_2 3)^2$.

291.- Resoleu segons els valors de a la inequació:

$2-\log_a(x-3)<\log_a x$.

Selectivitat russa 1996 1.7.

Solució:

El domini de les solucions és $\begin{cases} x>0 \\ x-3>0 \end{cases}$., és a dir, $x>3$.

Per ser a base d'un logaritme, $a>0$, $a\neq 1$.

$2-\log_a(x-3)<\log_a x$.

$\log_a \dfrac{a^2}{x-3}<\log_a x$.

Suposem $a>1$, La funció $y=\log_a x$ és estrictament creixent:

$\dfrac{a^2}{x-3}<x$.

$\dfrac{a^2}{x-3}-x<0$.

$\begin{cases}\dfrac{-x^2+3x+a^2}{x-3}<0\\ x>3\end{cases}$.

$\begin{cases}-x^2+3x+a^2<0\\ x>3\end{cases}$.

$x\in\left]\dfrac{3+\sqrt{9+a^2}}{2},+\infty\right[$.

Suposem $0<a<1$, La funció $y=\log_a x$ és estrictament decreixent:

$\dfrac{a^2}{x-3}>x$

$\begin{cases}\dfrac{-x^2+3x+a^2}{x-3}>0\\ x>3\end{cases}$.

$x\in\left]3,\dfrac{3+\sqrt{9+a^2}}{2}\right[$.

292.- Resoleu segons els valors de a l'equació:

$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_4 25)^{\sqrt{x^2-3a-5}}$.

Selectivitat russa 1996 1.8.

Solució:

$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_4 25)^{\sqrt{x^2-3a-5}}$. Canvi de base:

$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}}=\left(\dfrac{\log_5 25}{\log_5 4}\right)^{\sqrt{x^2-3a-5}}$.

$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}}=\left(\dfrac{2}{2\log_5 2}\right)^{\sqrt{x^2-3a-5}}$.

$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_5 2)^{-\sqrt{x^2-3a-5}}$.

$\sqrt{x+a+2}=-\sqrt{x^2-3a-5}$.

L'equació té solució quan els dos radicands són zero:

$$\begin{cases} x + a + 2 = 0 \\ x^2 - 3a - 5 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -(a+2) \\ (a+2)^2 - 3a - 5 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -(a+2) \\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Per tant:

Si $a \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ l'equació no té solució.

Si $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x = -(a+2) = -\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\right) = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Si $a = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = -(a+2) = -\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} + 2\right) = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

293.- Resoleu segons els valors de b la inequació:

$\log_b(x^2 + 5) > 1$.

Selectivitat russa 1997 2.7.

Solució:

El domini de les solucions és $x^2 + 5 > 0$., és a dir, $x \in R$.

Per ser a base d'un logaritme, $b > 0$, $b \neq 1$.

$\log_b(x^2 + 5) > 1$.

$\log_b(x^2 + 5) > \log_b b$.

Suposem $b > 1$, La funció $y = \log_b x$ és estrictament creixent:

$x^2 + 5 > b$.

$x^2 > b - 5$.

Si $b \geq 5$, $x \in \left]-\infty, -\sqrt{b-5}\right[\cup \left]\sqrt{b-5}, +\infty\right[$.

Si $1 < b < 5$, $x^2 > b - 5 > 0$, $x > 0$

Suposem $0 < b < 1$, La funció $y = \log_b x$ és estrictament decreixent:

$x^2 + 5 < b$.

$x^2 < b - 5 < 0$. No té solució.

Per tant:

Si $0 < b < 1$, la inequació inicial no té solució:

Si $1 < b < 5$, la solució és $x > 0$.

Si $b \geq 5$, la solució és $x \in \left]-\infty, -\sqrt{b-5}\right[\cup \left]\sqrt{b-5}, +\infty\right[$.

294.- Determineu els valors de a tal que les solucions de la inequació $\frac{x-3a-1}{x+2a-2}\le 0$ pertanyen a l'interval $[2,3]$.
Selectivitat russa 1997 3.7.

Solució:
$\frac{x-3a-1}{x+2a-2}\le 0$.
Les arrels del numerador i del denominador són $x=3a+1$, $x=2-2a$, respectivament.

Suposem que $3a+1\le 2-2a$, és a dir, $a\le\frac{1}{5}$. Les solucions de la inequació són: $x\in[3a+1,2-2a[$.
Suposem que $2-2a<3a+1$, és a dir, $a>\frac{1}{5}$. Les solucions de la inequació són: $x\in]2-2a,3a+1]$.

A fi que les solucions pertanyen a l'interval $[2,3]$ s'ha d'acomplir:

$$\begin{cases} a\le\frac{1}{5} \\ 3a+1\le 2 \\ 2-2a>3 \end{cases},\ \text{o bé,}\ \begin{cases} a>\frac{1}{5} \\ 2-2a<2 \\ 3a+1\ge 3 \end{cases}.$$

És a dir, $a\in\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$.