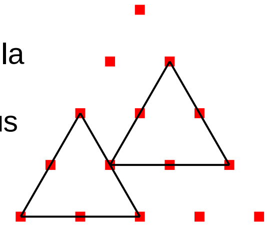
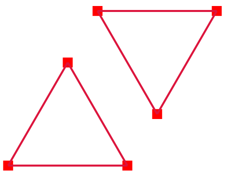
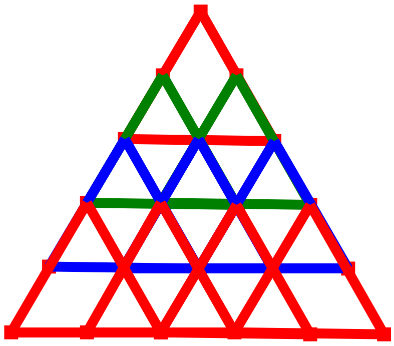
Graella isomètrica. Nombre de triangles

Siga una graella isomètrica (triangles equilàters) de claus a una distància 1 cm d'un a l'altre com indica l'esquema.
Amb elàstics es formen triangles equilàters de 2 cm de costat. (en la graella s'han dibuixat dos triangles).
Quants triangles equilàters diferents són possibles si la graella té 100 claus per costat del triangle equilàter.

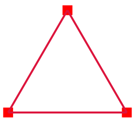


Solució:
Hi ha dos formes distintes de presentar-se els triangles:

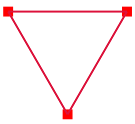


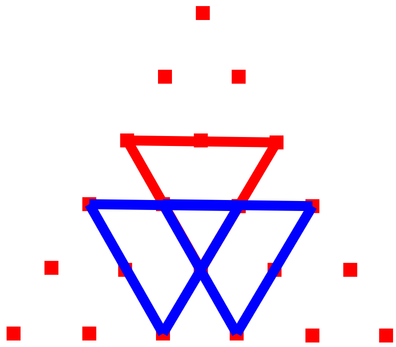


Suposem que hi ha 6 claus per costat.



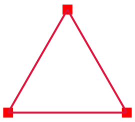
En la posició hi ha:
$1+2+3+4$ triangles.

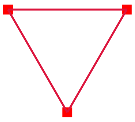


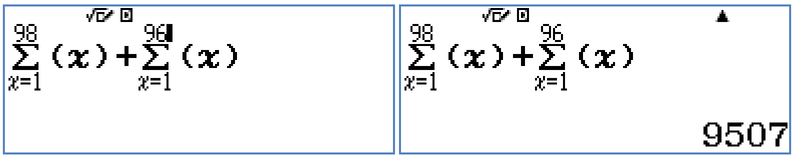


En la posició hi ha:
$1+2$ triangles.
En total hi ha:
$T_6 = (1+2+3+4)+(1+2)$.

Suposem que hi ha 100 claus per costat.

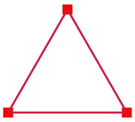
En la posició  hi ha:
$1+2+3+4+.........+98$ triangles.

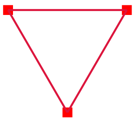
En la posició  hi ha:
$1+2+3+.......+96$ triangles.
En total hi ha:
$T_n = (1+2+3+......+98)+(1+2+3+......+96)$.
Amb la calculadora Classwiz 991.
Utilitzarem la funció de sumes finites.



Es posen formar 9507 triangles diferents.

Generalització:
Suposem que hi ha n claus per costat.

En la posició  hi ha:
$1+2+3+......+(n-2)$ triangles.

En la posició  hi ha:
$1+2+3+......+(n-4)$ triangles
En total hi ha:
$T_n = (1+2+3+......+(n-2))+(1+2+3+......+(n-4))$.
Sumant els termes de les dues progressions aritmètiques:

$$T_n = \left(\frac{1+n-2}{2}(n-2)\right)+\left(\frac{1+n-4}{2}(n-4)\right).$$

$$T_n = \left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right)+\left(\frac{n^2-7n+12}{2}\right).$$

$T_n = n^2-5n+7$ on n és el nombre de claus per costat.