Examen Pau's València. Juny 2015

Problema A1

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La matriu inversa de la matriu A.

b) Les matrius X i Y d'ordre 2×2 tal que $XA=B$ i $AY=B$.

c) Justifiqueu raonadament que si M és una matriu quadrada tal que $M^2=I$. On I és la matriu identitat del mateix ordre que M, llavors es verifica la igualtat $M^3=M^7$.

Problema A2

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'equació del plànol Π que passa pel punt $P(2,0,1)$ i és perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases}x+2y=0\\ z=0\end{cases}$.

b) Les coordenades del punt Q situat en la intersecció de la recta r i el plànol Π.

c) La distància del punt P a la recta r.

i justifiqueu raonadament que la distància del punt P a un punt qualsevol de la recta r és major o igual que $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Problema A3

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x) definida per $f(x)=(x-1)(x-3)$, sent, x un nombre real.

b) L'àrea del recinte afitat per les corbes $y=(x-1)(x-3)$, $y=-(x-1)(x-3)$.

c) El valor positiu de a per al qual l'àrea limitada entre la corba $y=a(x-1)(x-3)$, l'eix Y i el segment que uneix els punts $(0,0)$ i $(1,0)$ és $\dfrac{4}{3}$.

Problema B1

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases}(1-a)x+(2a+1)y+(2a+2)z=a\\ ax+ay=2a+2\\ 2x+(a+1)y+(a-1)z=a^2-2a+9\end{cases}$, on a és un paràmetre real. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Totes les solucions del sistema quan $a=1$.

b) La justificació raonada de si el sistema és compatible o incompatible quan $a=2$.

c) Els valors de a per als quals el sistema és compatible i determinat.

Problema B2

Es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El plànol paral·lel a la recta s que conté la recta r.

b) La recta t que passa pel punt $(0, 0, 0)$, sabent que un vector director de t és perpendicular a un vector director de r i també és perpendicular a un vector director de s.

c) Esbrineu raonadament si existeix o no un plànol perpendicular a s que continga la recta r.

Problema B3

Un poble està situat en el punt $A(0, 4)$ d'un sistema de referència cartesià. El tram d'un riu situat al terme municipal del poble descriu la corba $y = \dfrac{x^2}{4}$, sent $-6 \le x \le 6$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La distància entre un punt $P(x, y)$ del riu i el poble en funció de l'abscissa x de P.

b) El punt o punts del tram del riu situats a distància mínima del poble.

c) El punt o punts del tram del riu situats a distància màxima del poble.

Problema A1

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La matriu inversa de la matriu A.

b) Les matrius X i Y d'ordre 2×2 tal que $XA=B$ i $AY=B$.

c) Justifiqueu raonadament que si M és una matriu quadrada tal que $M^2=I$. On I és la matriu identitat del mateix ordre que M, llavors es verifica la igualtat $M^3=M^7$.

Solució:

a)

Calcularem la matriu inversa utilitzant el mètode de Gauss $(A\,|\,I)\sim(I\,|\,A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2=2F_1-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -8 & 2 & -1\end{array}\right)\underset{F_1=8F_1-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}8 & 0 & 2 & 3\\ 0 & -8 & 2 & -1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1=\frac{1}{8}F_1\\ F_2=\frac{-1}{8}F_2}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}\end{array}\right).$$

Aleshores, la matriu inversa de la matriu A és:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}.$$

a)

La matriu A té inversa si i només si $|A|\neq 0$ i la matriu inversa és $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}A)^t$.

$$|A|=8\neq 0,\quad \mathrm{Adj}A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}.$$

b)

$XA=B$. $\quad XAA^{-1}=BA^{-1}$. $\quad XI=BA^{-1}$.

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{3}{4}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$AY=B$. $\quad A^{-1}AY=A^{-1}B$. $\quad IY=A^{-1}B$.

$$Y=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

c).

$M^3=MM^2=MI=M$.

$M^7=MM^3M^3=MMM=MI=M$.

Aleshores, $M^3=M^7$.

Problema A2

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'equació del plànol Π que passa pel punt $P(2,0,1)$ i és perpendicular a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

b) Les coordenades del punt Q situat en la intersecció de la recta r i el plànol Π.

c) La distància del punt P a la recta r.

i justifiqueu raonadament que la distància del punt P a un punt qualsevol de la recta r és major o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Solució:

a)

Passem l'equació general de la recta r a la forma paramètrica:

$r \equiv \begin{cases} x=-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$. El vector director de la recta r és: $v=(-2,1,0)$.

El vector característic del plànol Π és el vector director de la recta r.

El feix de plànols perpendicular a la recta r té equació:

$\Pi_D \equiv -2x+y+D=0$.

El punt P passa pel plànol que cerquem, aleshores:

$-2\cdot 2+1\cdot 0+D=0$. Resolent l'equació:

$D=4$.

Aleshores, L'equació del plànol Π que passa pel punt $P(2,0,1)$ i és perpendicular a la recta r té equació:

$\Pi \equiv -2x+y+4=0$.

b)

Per determinar el punt intersecció de la recta r i el plànol Π resoldrem el sistema format per les seues equacions:

$\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$ .la solució és $\begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{-4}{5} \\ z=0 \end{cases}$ aleshores, $Q\left(\frac{8}{5},\frac{-4}{5},0\right)$.

c)

La distància del punt P a la recta r és igual a la distància entre els punts P, Q ja que $\overrightarrow{PQ}$ és perpendicular a v (vector director de r).

$$d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{8}{5}-2\right)^2+\left(\frac{-4}{5}-0\right)^2+(0-1)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

La distància d'un punt qualsevol de la recta r al punt P és major o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ que és la distància $d(P,r)$ i per tant la menor.

Problema A3

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x) definida per $f(x) = (x-1)(x-3)$, sent, x un nombre real.

b) L'àrea del recinte afitat per les corbes $y = (x-1)(x-3)$, $y = -(x-1)(x-3)$.

c) El valor positiu de a per al qual l'àrea limitada entre la corba $y = a(x-1)(x-3)$, l'eix Y i el segment que uneix els punts $(0,0)$ i $(1,0)$ és $\frac{4}{3}$.

Solució:

a)

$f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ és una paràbola còncava.

Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $f(x) = 0$, $x = 1, 3$: $(1,0)$, $(3,0)$.

L'eix de simetria és $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$.

El vèrtex és $V(2,-2)$.

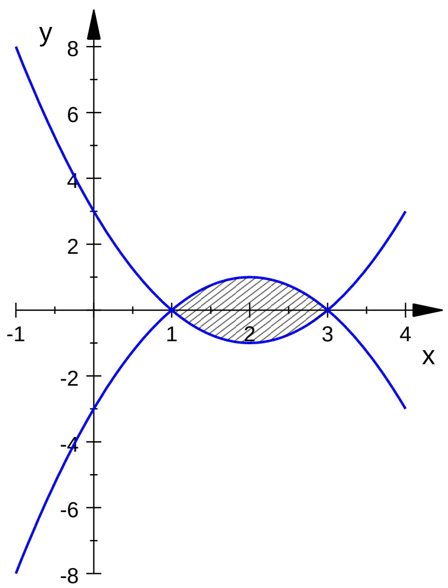
L'interval de creixement és $]2, +\infty[$.

L'interval de decreixement és $]-\infty, 2[$.

En $x = 2$ és un mínim de la funció.

b)

les corbes $y = (x-1)(x-3)$, $y = -(x-1)(x-3)$ són simètriques respecte de l'eix d'abscisses.



Els punts de tall de les dues corbes són $x = 1, 3$.

L'àrea del recinte limitat per les dues corbes és:

$$S = 2\left|\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx\right| = 2\left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3\right| = 2\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{8}{3}u^2.$$

c)

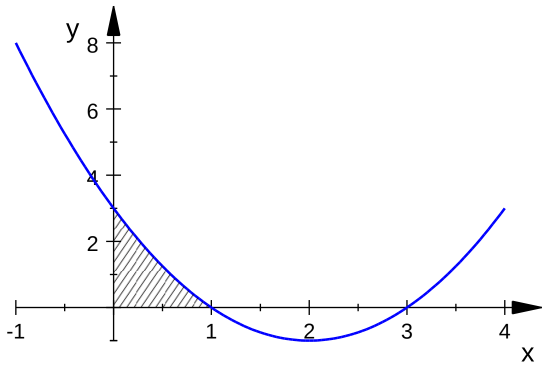
$(1,0)$ és punt de tall de la paràbola $y = a(x-1)(x-3)$ i l'eix d'abscisses

l'àrea limitada entre la corba $y = a(x-1)(x-3)$, l'eix Y i el segment que uneix els punts $(0,0)$ i $(1,0)$ és:

$$\int_0^1 a(x^2 - 4x + 3)dx = a\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = a\frac{4}{3} \ .$$

$$\int_0^1 a(x^2 - 4x + 3)dx = \frac{4}{3}.$$

Aleshores: $a\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$. Per tant, $a = 1$.



Problema B1

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases}(1-a)x+(2a+1)y+(2a+2)z=a\\ ax+ay=2a+2\\ 2x+(a+1)y+(a-1)z=a^2-2a+9\end{cases}$, on a és un paràmetre real. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Totes les solucions del sistema quan $a=1$.

b) La justificació raonada de si el sistema és compatible o incompatible quan $a=2$.

c) Els valors de a per als quals el sistema és compatible i determinat.

Solució:

a)

Siga $a=1$ el sistema ens quedaria: $\begin{cases}3y+4z=1\\ x+y=4\\ 2x+2y=8\end{cases}$.

La tercera equació del sistema és proporcional a la segona equació. Aleshores el sistema inicial és equivalent al sistema:

$\begin{cases}x+y=4\\ 3y+4z=1\end{cases}$ el sistema està triangularitzat.

És compatible indeterminat. Les solucions són: $\begin{cases}x=\dfrac{11+4\lambda}{3}\\ y=\dfrac{1-4\lambda}{3}\\ z=\lambda\end{cases}$.

b)

Siga $a=2$ el sistema ens quedaria: $\begin{cases}-x+5y+6z=2\\ 2x+2y=6\\ 2x+3y+z=9\end{cases}$.

La matriu de coeficients és $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. La matriu ampliada és $A'=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 9\end{pmatrix}$.

$|A|=0$, $\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 2 & 2\end{vmatrix}\neq 0$, aleshores, $\operatorname{rang}A=2$.

Considerem les columnes: 1ª, 2ª i 4ª de la matriu ampliada i calculem el seu determinant:

$\begin{vmatrix}-1 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 9\end{vmatrix}\neq 0$, aleshores, $\operatorname{rang}A'=3$.

Aplicant el teorema de Rouché-Frobenius el sistema és incompatible.

c)

La matriu de coeficients és $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$.

El sistema té tres equacions amb 3 incògnites el sistema és compatible determinat si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}\right| = a\left|\begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}\right| \underset{C_2 \equiv C_2 - C_1}{=} a\left|\begin{pmatrix} 1-a & 3a & 2a+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= -a\left|\begin{pmatrix} 3a & 2a+2 \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix}\right| = -a(a-1)\left|\begin{pmatrix} 3a & 2a+2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = -a(a-1)(a-2).$$

$|A| \neq 0$ si $-a(a-1)(a-2) \neq 0$ si $a \neq 0, 1, 2$.

Problema B2

Es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El plànol paral·lel a la recta s que conté la recta r.

b) La recta t que passa pel punt $(0, 0, 0)$, sabent que un vector director de t és perpendicular a un vector director de r i també és perpendicular a un vector director de s.

c) Esbrineu raonadament si existeix o no un plànol perpendicular a s que continga la recta r.

Solució:

a)

Passem l'equació general de la recta r a la forma paramètrica:

$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ $r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$. Un punt de la recta és $P(0, 3, 2)$ i el vector director és $v_r = (1, 1, 2)$.

Passem l'equació general de la recta s a la forma paramètrica:

$s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = \dfrac{-1}{3} \\ z = \alpha \end{cases}$. Un punt de la recta és $Q\left(3, \dfrac{-1}{3}, 0\right)$ i el vector director és $v_s = (2, 0, 1)$.

El plànol paral·lel a la recta s que conté la recta r passa pel punt P i té vectors directors v_r, v_s. La seua equació vectorial és:

$\Pi \equiv (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(2, 0, 1)$.

b)

La recta t que passa pel punt $(0, 0, 0)$, sabent que un vector director de t és perpendicular a un vector director de r i també és perpendicular a un vector director de s té vector director $v_r \times v_s$.

$$v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 3j - 2k = (1, 3, -2).$$

L'equació vectorial de la recta t és:

$y \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 3, -2)$.

c)

El vector director de la recta r, $v_r = (1, 1, 2)$ és el característic del plànol.

El vector director de la recta s, $v_s = (2, 0, 1)$ seria director del plànol.

Aleshores, $v_r \cdot v_s$

$v_r \cdot v_s = (1, 1, 2)(2, 0, 1) = 4 \neq 0$. Aleshores, els dos vectors no són perpendicular, per tant, no es pot construir aquest plànol.

Problema B3

Un poble està situat en el punt $A(0, 4)$ d'un sistema de referència cartesià. El tram d'un riu situat al terme municipal del poble descriu la corba $y = \frac{x^2}{4}$, sent $-6 \le x \le 6$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La distància entre un punt $P(x, y)$ del riu i el poble en funció de l'abscissa x de P.

b) El punt o punts del tram del riu situats a distància mínima del poble.

c) El punt o punts del tram del riu situats a distància màxima del poble.

Solució:

Siga $P\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$, $x \in [-6, 6]$ un punt qualsevol del riu.

La distància entre el punt P i A és: $d(A,P) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2}$.

Siga la funció $d(x) = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 - x^2 + 16}$, $x \in [-6, 6]$.

$$d'(x) = \frac{\frac{1}{4}x^3 - 2x}{2\sqrt{\frac{1}{16}x^4 - 2x^2 + 16}} .$$

$d'(x) = 0$, $\frac{1}{4}x^3 - 2x = 0$. Resolent l'equació:

$x = -2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}$.

Estudiant el signe de la derivada en els entorns de $x = -2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}$.

$x = -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ són mínims relatius.

$x = 0$ és un màxim relatiu.

$d(2\sqrt{2}) = d(-2\sqrt{2}) = \sqrt{12}$.

$d(0) = 4$.

$d(6) = d(-6) = \sqrt{61}$.

Aleshores, els mínim absoluts són els punts $(2\sqrt{2}, \sqrt{12})$, $(-2\sqrt{2}, \sqrt{12})$.

Els màxims absoluts són $(6, \sqrt{61})$, $(-6, \sqrt{61})$.