Problema A.1. 2013 juny

Es té el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$, on a, b, c són tres nombres reals.

Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La relació que han de verificar els nombres a, b i c perquè el sistema siga compatible.

b) La solució del sistema quan $a=-1, b=2$ i $c=3$.

c) La solució quan els nombres a, b i c verifiquen la relació $a=c=-2b$.

Solució:

a)

Utilitzarem el mètode de Gauss per resoldre el sistema.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_1+2F_2 \\ F_3=F_1-F_3}}{\approx} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & a \\ 0 & -3 & a+2b \\ 0 & 4 & a-c \end{array}\right) \underset{F_3=4F_1+3F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & a \\ 0 & -3 & 2+2b \\ 0 & 0 & 7a+8b-3c \end{array}\right)$$

Discussió:

El sistema és compatible determinat si $7a+8b-3c=0$.

El sistema és incompatible si $7a+8b-3c\neq 0$.

b)

Si $a=-1, b=2$ i $c=3$ s'acompleix que $7(-1)+8\cdot 2-3\cdot 3=0$, per l'apartat a) el sistema és compatible determinat. Substituint en el mètode de Gauss el sistema inicial és equivalent a:

$\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ -3y=3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

c)

Si $a=c=-2b$ s'acompleix que $7(-2b)+8\cdot b-3\cdot(-2b)=0$, per l'apartat a) el sistema és compatible determinat. Substituint en el mètode de Gauss el sistema inicial és equivalent a:

$\begin{cases} 2x+5y=-2b \\ -3y=0 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x=-2b \\ y=0 \end{cases}$.

Problema A.2. 2013 juny

Tenim $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 2, 3)$

Determineu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'àrea del triangle de vèrtexs O, A i B i el volum del tetraedre de vèrtexs O, A, B, C.

b) La distància del vèrtex C al plànol que conté el triangle OAB.

c) La distància de C' al plànol que conté el triangle OAB, sent C' el punt mig del segment d'extrema O i C.

Solució:

a)

$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 1, 0)$. $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ són linealment independents, aleshores formen un triangle. La seua àrea és:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right\|.$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + 2j + k = (-1, 2, 1).$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$\overrightarrow{OC} = (0, 2, 3)$.

El volum del tetraedre és $V_{OABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right|$.

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{7}{6}.$$

b)

La distància del vèrtex C al plànol que conté el triangle OAB és igual a l'altura del tetraedre OABC sobre la base OAB.

El volum del tetraedre és $V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{OAB} \cdot d(C, OAB)$.

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot d(C, OAB) = \frac{7}{6}.$$

$$d(C, OAB) = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

c)

Per la propietat de semblança, per ser C' el punt mig del segment d'extrema O i C:

$$d(C', OAB) = \frac{1}{2}d(C, OAB) = \frac{7\sqrt{6}}{12}.$$

Un altre mètode per resoldre b) i c) Determinar el plànol que passa pels punts O, A, B:

b)

L'equació del plànol que passa pels punts O, A, B és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$. Simplificant:

$\Pi \equiv -x + 2y + z = 0$.

$$d(C, OAB) = d(C, \Pi) = \left| \frac{-0 + 2 \cdot 2 + 3}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

c)

Les coordenades del punt C’, punt mig del segment d’extrema O i C són:

$C'\left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$

$$d(C', OAB) = d(C', \Pi) = \left| \frac{-0 + 2 \cdot 1 + \frac{3}{2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{7\sqrt{6}}{12}$$

Problema A.3. 2013 juny

Es va estudiar el moviment d'un meteorit del sistema solar durant un mes.

Es va obtenir que l'equació de la seua trajectòria T és $y^2 = 2x + 9$, sent $-4.5 \le x \le 8$ i $y \ge 0$, estant situat el Sol en el punt $(0, 0)$.

Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La distància del meteorit al Sol des d'un punt P de la seua trajectòria l'abscissa de la qual és x.

b) El punt P de la trajectòria T on el meteorit aconsegueix la distància mínima del Sol.

c) La distància mínima del meteorit al Sol.

Solució:

$y^2 = 2x + 9$.

$y = \sqrt{2x+9}$, $-4.5 \le x \le 8$.

a)

Les coordenades de P són:

$\left(x, \sqrt{2x+9}\right)$.

La distància de O a P és:

$d(O, P) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x+9}\right)^2}$

$d(O, P) = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$, $-4.5 \le x \le 8$.

b)

La funció distància és:

$d(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$, $-4.5 \le x \le 8$. Calculem la seua derivada:

$$d'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}.$$

$d'(x) = 0$. Resolent l'equació:

$x = -1$.

$d''(-1) > 0$.

Aleshores, la funció assoleix un mínim relatiu estricte quan $x = -1$.

El punt P de la trajectòria T on el meteorit aconsegueix la distància mínima del Sol és:

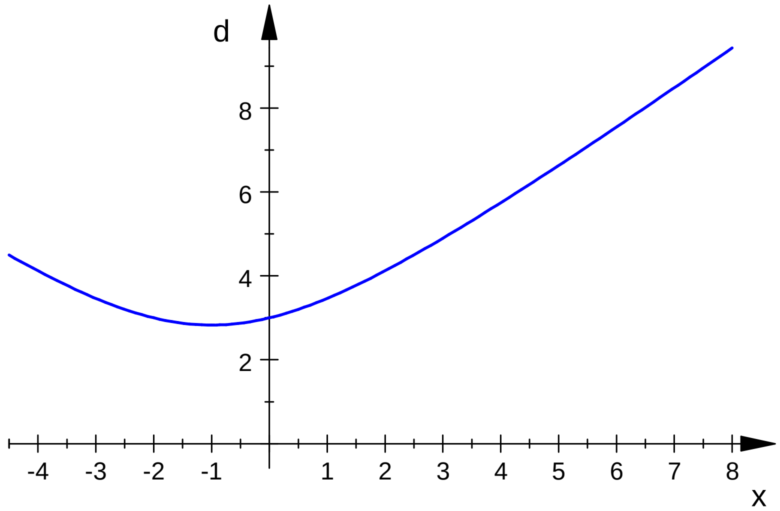
$P\left(-1, \sqrt{2(-1)+9}\right)$.

$P\left(-1, \sqrt{7}\right)$.

c)

La mínima distància entre el meteorit i el Sol és:

$d(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 2(-1) + 9} = \sqrt{8}$.



Problema B.1. 2013 juny

Ateses les matrius $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Calculeu raonadament, el valors dels determinants següents, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) $|A+B|$ i $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$.

b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ i $\left|A^{-1}(A+B)\right|$.

c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ i $\left|A^3B^{-1}\right|$.

Solució:

a)

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$|A+B|$.

Per són A i B triangulars, $|A| = 4$, $|B| = -4$.

$\det(MN) = \det(M)\cdot\det(N)$. $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$.

Si M és una matriu quadrada d'ordre 3, $\det(\alpha M) = \alpha^3 \cdot \det(M)$

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{|A+B|} = \frac{1}{8}\frac{1}{24} = \frac{1}{192}.$$

b)

$$\left|(A+B)^{-1}A\right| = \frac{1}{|A+B|}|A| = \frac{1}{24}4 = \frac{1}{6}.$$

$$\left|A^{-1}(A+B)\right| = \frac{1}{|A|}|A+B| = \frac{1}{4}24 = 6.$$

c)

$$\left|2ABA^{-1}\right| = 2^3|A|\cdot|B|\cdot\frac{1}{|A|} = 8(-4) = -32.$$

$$\left|A^3B^{-1}\right| = |A|^3\cdot\frac{1}{|B|} = 4^3\frac{1}{-4} = -16.$$

Problema B.2. 2013 juny

A partir dels punts $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $P(0, -3, 2)$, es demana calcular raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La distància del punt P al punt A.

b) La distància del punt P a la recta que passa pels punts A i B.

c) La distància del punt P al plànol que passa pels punts A, B, C.

Solució:

a)

$\overrightarrow{PA} = (1, 3, -1)$.

$d(P, A) = \left\|\overrightarrow{PA}\right\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$.

b)

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$ vector director de la recta r_{AB} que passa pels punts A, B.

$$d(P, r_{AB}) = \frac{\left\|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}.$$

$$\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 4k = (-4, 0, -4).$$

$\left\|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{32}$.

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3}$.

$$d(P, r_{AB}) = \frac{\left\|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{96}}{3}.$$

c)

$\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$. Els vectors $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ són linealment independents, aleshores, A, B, C formen un plànol la seua equació és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ Simplificant:

$\Pi \equiv x + y - 1 = 0$.

La distància del punt P al plànol que passa pels punts A, B, C és:

$$d(P, \Pi) = \left|\frac{0-3-1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Problema B.3. 2013 juny

Atesa la funció f definida $f(x) = \sin x$, per a qualsevol valor real x, es demana calcular raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \frac{\pi}{6}$.

b) L'equació de la recta normal a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \frac{\pi}{3}$. Es recorda que la recta normal a una corba a una corba en un punt P és la recta que passa per aquest punt P i és perpendicular a la recta tangent a la corba en el punt P.

c) L'angle format per les rectes determinades en els apartats a) i b).

Solució:

La recta tangent en $x = a$ a la corba $y = f(x)$ té equació: $r_T \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

La recta normal en $x = a$ a la corba $y = f(x)$ té equació: $r_N \equiv y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$.

a)

$f'(x) = \cos x$.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \frac{\pi}{6}$ és:

$r_T \equiv y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

b)

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

L'equació de la recta normal a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \frac{\pi}{3}$ és:

$r_N \equiv y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Simplificant: $r_N \equiv y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c)

L'angle que forma la recta r_T amb el semieix positiu eix d'abscisses és igual a l'arc tangent del seu pendent:

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'angle que forma la recta r_N amb el semieix positiu eix d'abscisses és igual a l'arc tangent del seu pendent:

$\beta = \operatorname{arctg} - 2$.

La diferència dels angles és igual a l'angle que formen les dues rectes.

$\alpha - \beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg} - 2 \approx 104º20'$.