Políedres

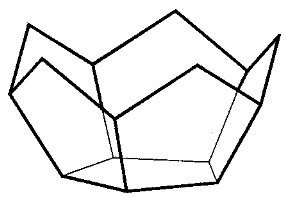
Políedres

Teorema d'Euler sobre políedres

En tot políedre convex el nombre de cares més el nombre de vèrtexs és igual al nombre d'arestes més dos unitats.
$C+V=A+2$

Demostració de Cauchy:

Considerem una superfície poliedral convexa i oberta i acabada en una línia trencada (plana o no) aleshores es satisfà la propietat:
$C+V=A+1$
Demostrem-ho per inducció.
En efecte, la fórmula s'acompleix en el cas d'una única cara.



Suposem certa l'expressió per a m cares.

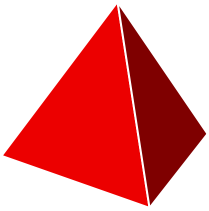
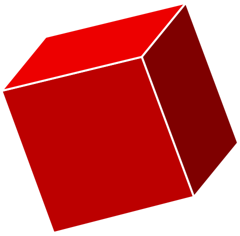
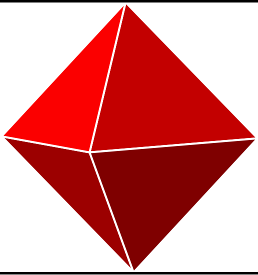
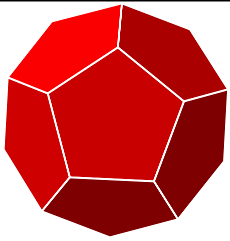
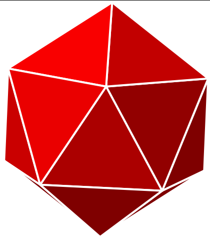
Modifiquem la línia trencada que limita la superfície polièdrica afegint una cara que tinga m costats i m vèrtexs. Suposem que aquesta nova cara deixe obert el políedre, el seu contorn no podrà coincidir completament amb el de la línia que limitava a la superfície poliedral i si suposem que té p arestes comuns amb ella, tindrà $p+1$ vèrtexs comuns.

Designem per C', A', V' el nombre de cares, arestes i vèrtexs de la nova superfície poliedral tenim que:
$C'=C+1$, $A'=A+m-p$, $V'=V+m-(p+1)$
Aquests valors satisfan també la relació: $C'+V'=A'+1$.

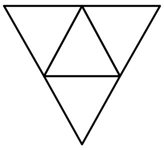
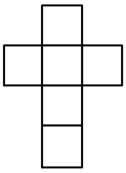
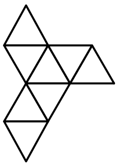
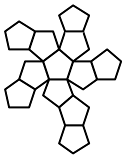
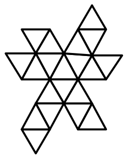
Considerem un políedre convex del qual eliminem una cara qualsevol, el nombre d'arestes i vèrtexs no s'alteren i són sempre A i V, però el nombre de cares és $C-1$.
Aquest no políedre és obert i compleix la fórmula anterior:
$C-1+V=A+1$
Aleshores, $C+V=A+2$.

Políedres regulars o platònics

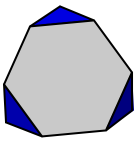
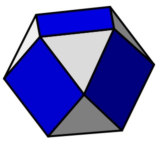
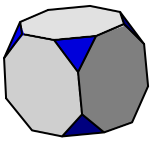
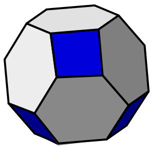
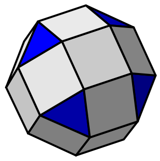
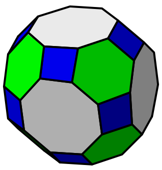
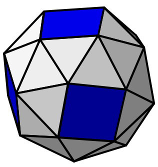
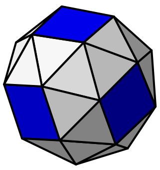
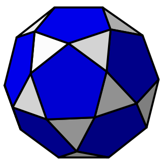
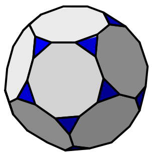
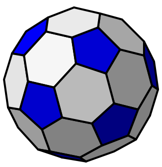
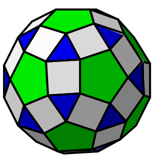
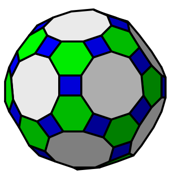
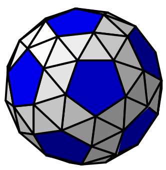
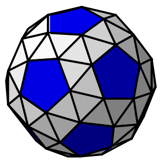
Políedres regulars o platònics són els políedres convexes tal que les seues cares són polígons regulars i cadascun dels vèrtexs el formen el mateix nombre de cares (ordre del vèrtex). Hi ha només 5 políedres regulars:

				
Tetràedre	Cub	Octàedre	Dodecàedre	Icosàedre

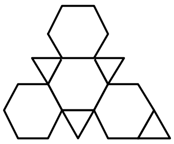
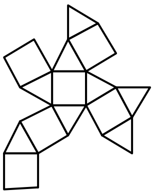
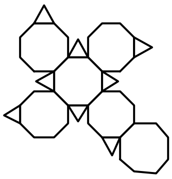
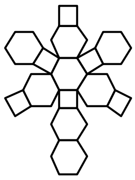
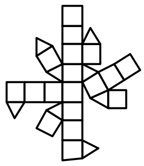
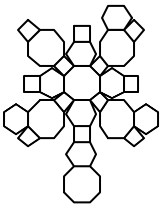
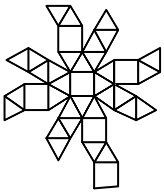
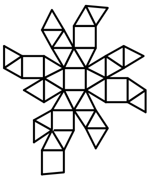
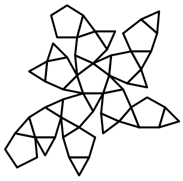
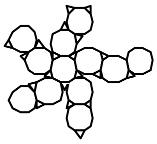
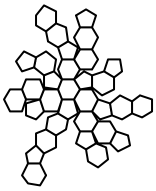
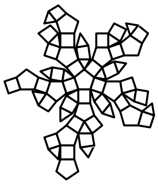
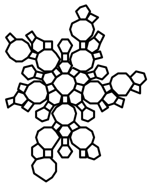
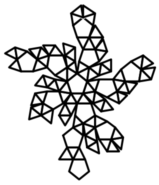
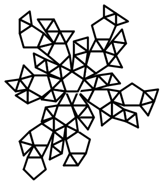
Políedres regulars o platònics (Desenvolupament).

				
Tetràedre	Cub	Octàedre	Dodecàedre	icosàedre

Políedres arquimedians

				
Tetràedre truncat	Cuboctàedre	Cub truncat	Octàedre truncat	Rombicuboctàedre
				
Gran rombicuboctàedre	Cub simus	Cub simus*	Icosidodecàedre	Dodecàedre truncat
				
Icosàedre truncat	Rombicosidodecàedre	Gran rombicosidodecàedre	Dodecàedre simus	Dodecàedre simus*

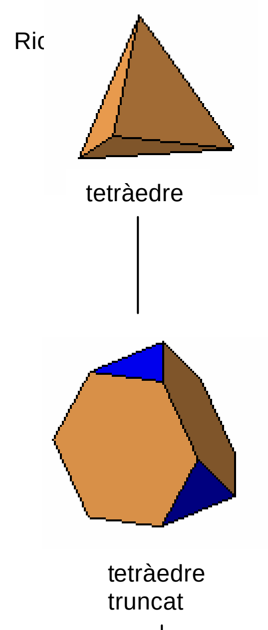
Políedres arquimedians (desenvolupaments).

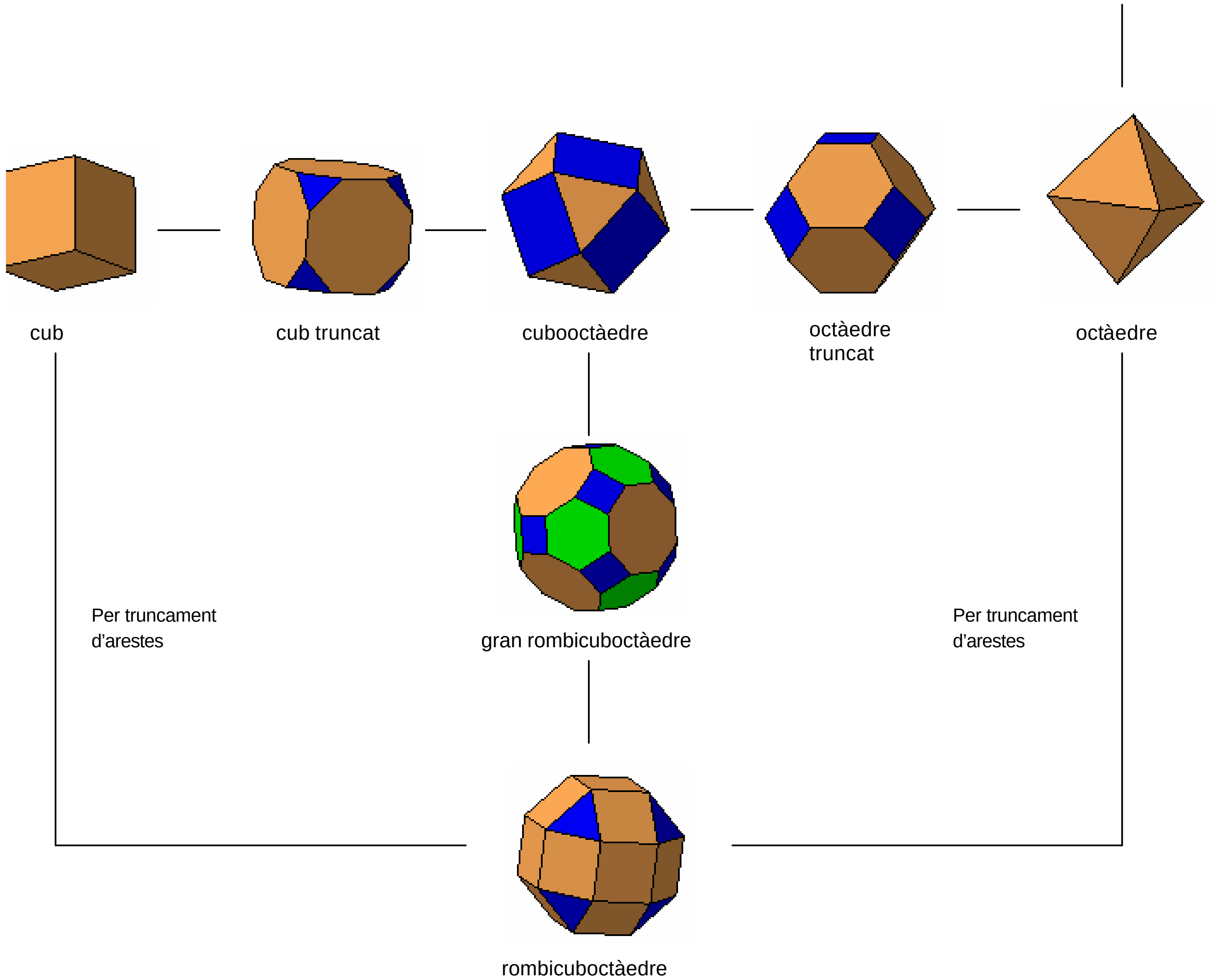
				
Tetràedre truncat	Cuboctàedre	Cub truncat	Octàedre truncat	Rombicuboctàedre
				
Gran rombicuboctàedre	Cub simus	Cub simus*	Icosidodecàedre	Dodecàedre truncat
				
Icosàedre truncat	Rombicosidodecàedre	Gran rombicosidodecàedre	Dodecàedre simus	Dodecàedre simus*

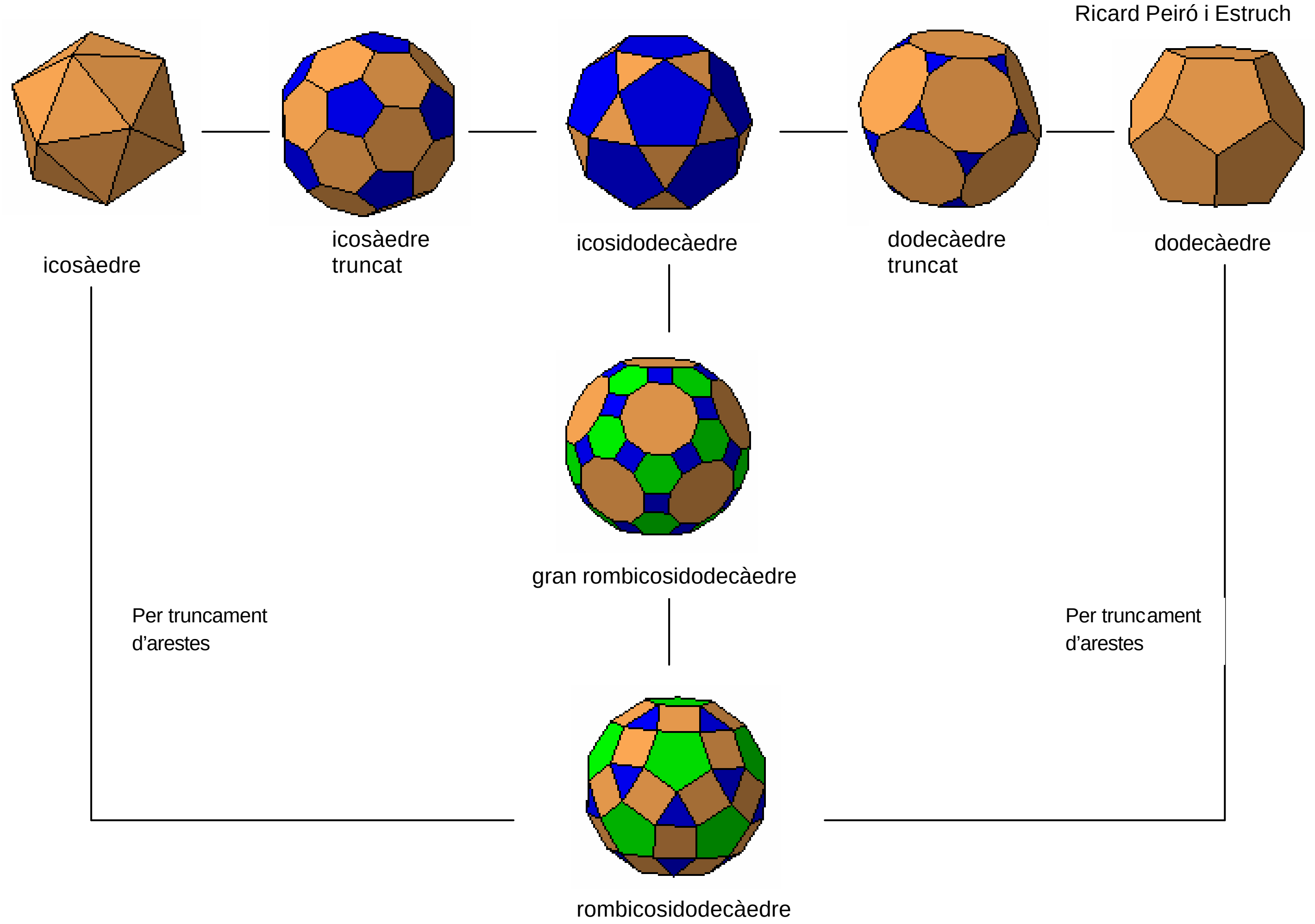
Procedència dels políedres arquimedians

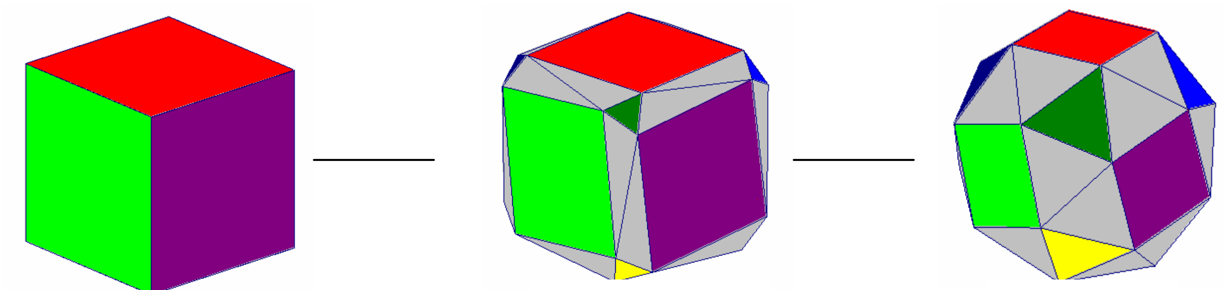
Poliedres arquimedians	Procedència
Tetràedre truncat	Truncament per $\frac{1}{3}$ de l'aresta d'un tetràedre
Cuboctàedre	1. Truncament per $\frac{1}{2}$ de l'aresta d'un cub 2. Truncament per $\frac{1}{2}$ de l'aresta d'un octàedre
Cub truncat	Truncament per $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ de l'aresta d'un cub
Octàedre truncat	Truncament per $\frac{1}{3}$ de l'aresta d'un octàedre
Rombicuboctàedre	Truncament per $\frac{1}{2}$ de l'aresta d'un cuboctàedre
Gran rombicuboctàedre	Truncament per $\frac{1}{3}$ de l'aresta d'un cuboctàedre
Cub simus o cub aplatat	Truncament i bisellat d'un cub. Com no té plànols de simetria, pot aparéixer amb dues formes simètriques.
Icosidodecàedre	1. Truncament per $\frac{1}{2}$ de l'aresta d'un dodecàedre 2. Truncament per $\frac{1}{2}$ de l'aresta d'un icosàedre
Dodecàedre truncat	Truncament per $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ de l'aresta d'un dodecàedre
Icosàedre truncat	Truncament per $\frac{1}{3}$ de l'aresta d'un icosàedre
Rombicosidodecàedre	Truncament per $\frac{1}{2}$ de l'aresta d'un icosidodecàedre
Gran rombicosidodecàedre	Truncament per $\frac{1}{3}$ de l'aresta d'un icosidodecàedre
Dodecàedre simus o aplatat	Truncament i bisellat d'un icosàedre. Com no té plànols de simetria, pot aparéixer amb dues formes simètriques.

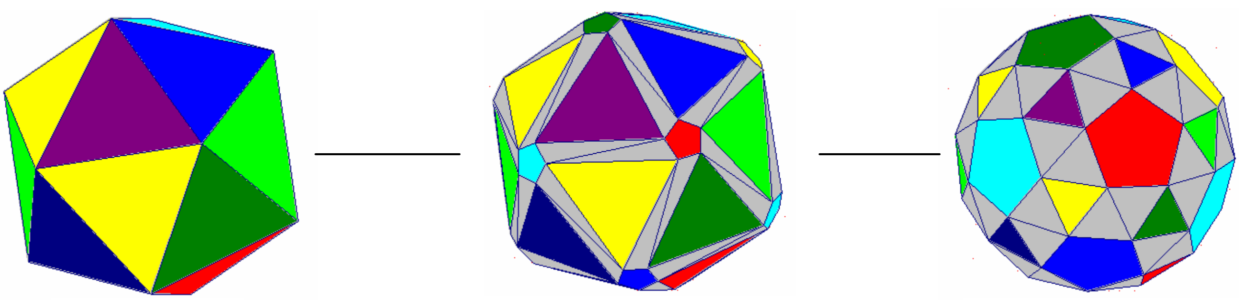
Procedència dels políedres



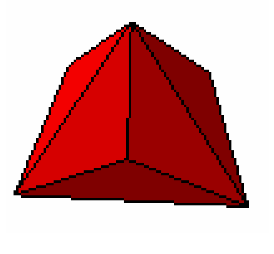
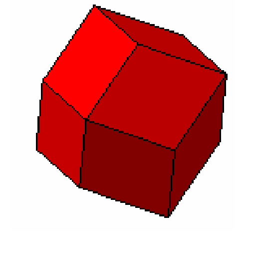
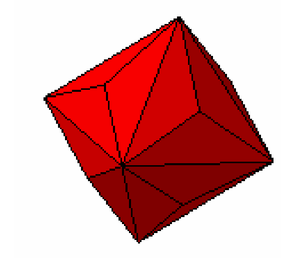
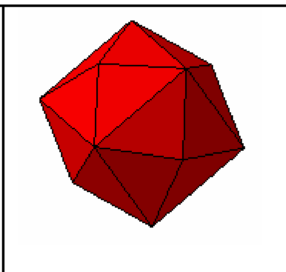
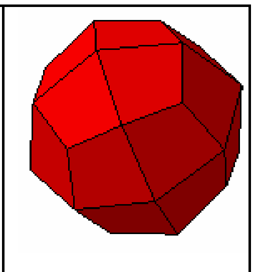
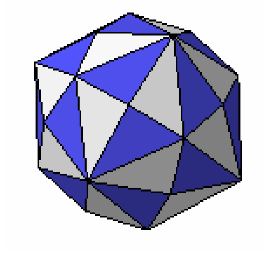
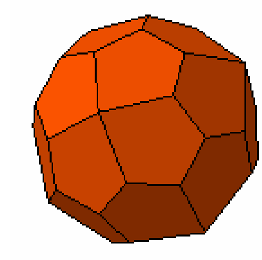
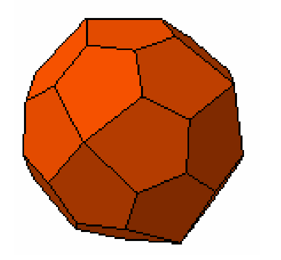
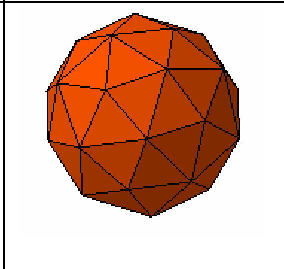
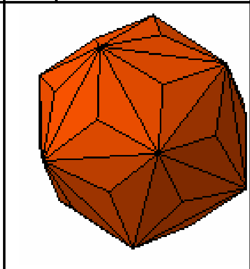
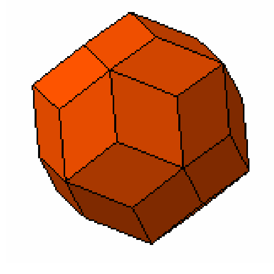
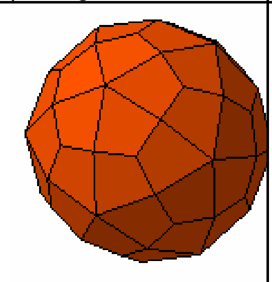
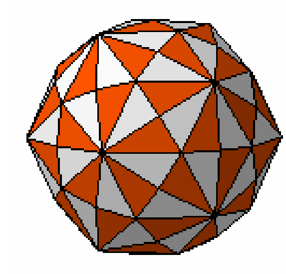
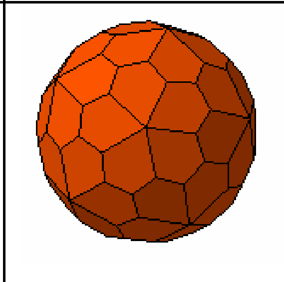
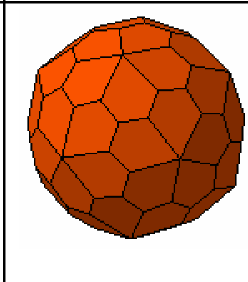




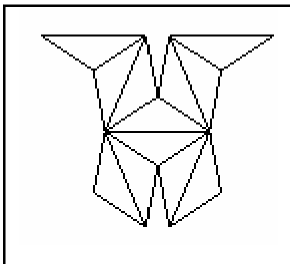
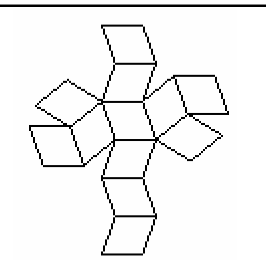
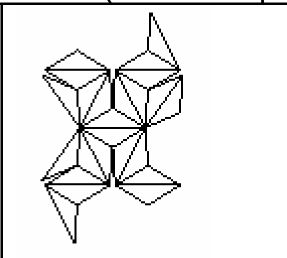
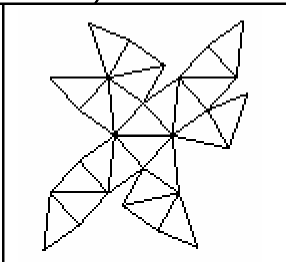
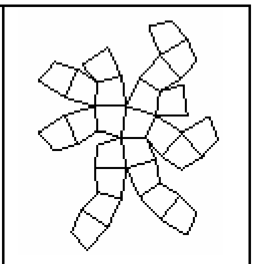
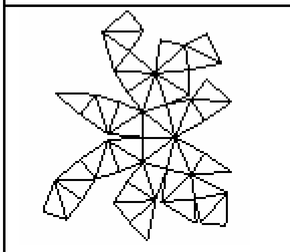
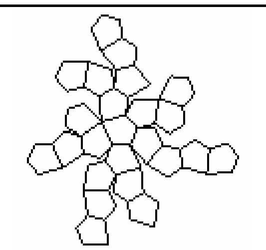
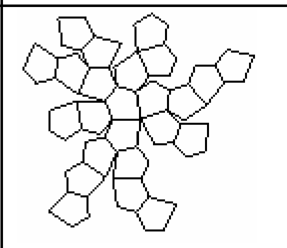
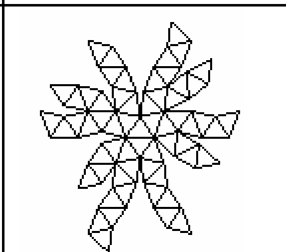
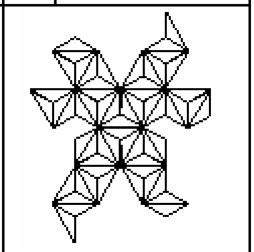

Cub
Pas intermedi
Cub simus

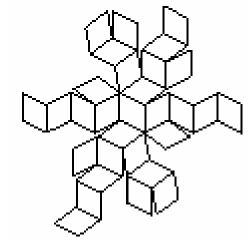
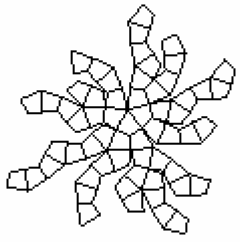
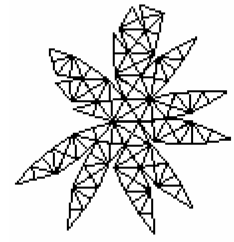
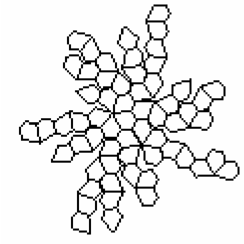
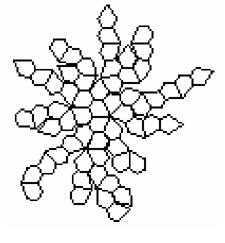

Icosàedre
Pas intermedi
Dodecàedre simus

Sòlids de Catalan

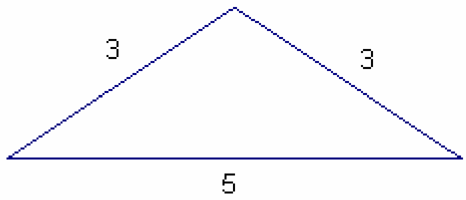
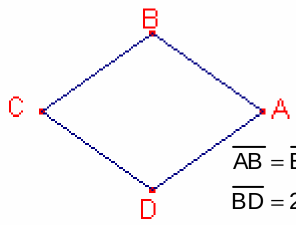
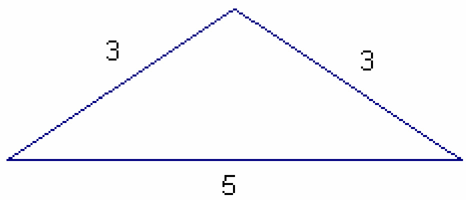
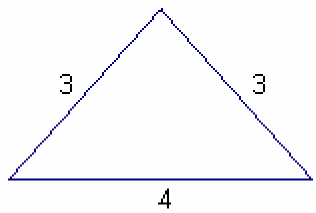
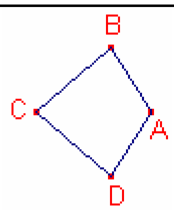
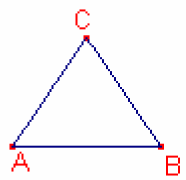
				
Tetràedre Triakis	Docecàedre ròmbic	Octàedre Triakis	Hexàedre tetrakis	Icositetràedre trapezoidal
				
Dodecàedre pentakis	Icositetràedre pentagonal	Icositetràedre pentagonal*	Dodecàedre pentakis	Icosàedre triakis
				
Triacontàedre ròmbic	Hexacontàedre trapezoïdal	Icosàedre hexàkis	Hexacontàedre pentagonal	Hexacontàedre pentagonal*

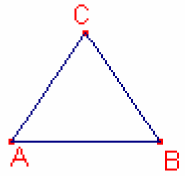
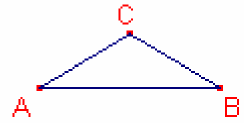
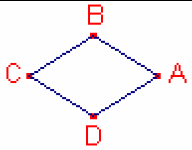
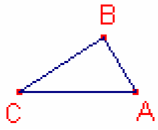
Políedres de Catalan (desenvolupaments)

				
Tetràedre Triakis	Docecàedre ròmbic	Octàedre Triakis	Hexàedre tetrakis	Icositetràedre trapezoidal
				
Dodecàedre pentakis	Icositetràedre pentagonal	Icositetràedre pentagonal*	Dodecàedre pentakis	Icosàedre triakis

				
Triacontàedre ròmbic	Hexacontàedre trapezoïdal	Icosàedre hexakis	Hexacontàedre pentagonal	Hexacontàedre pentagonal*

Cares, vèrtexs i arestes dels sòlids de Catalan

	Cares	vèrtexs	Arestes	Polígon de la cara
Tetràedre triakis	12	8	18	
Dodecàedre ròmbic	12	14	24	 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \sqrt{3}$ $\overline{BD} = 2$
Octàedre triakis	24	14	36	
Hexàedre tetrakis	24	14	36	
Icositetràedre trapezoidal	24	26	48	 $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$ $\overline{BC} = \overline{CD} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ $\overline{AC} = \sqrt{3 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$
Dodecàedre pentakis	48	26	72	 $\overline{AC} = \overline{BC} = 6(2\sqrt{5} - 1)$ $\overline{AB} = 19(\sqrt{5} - 1)$

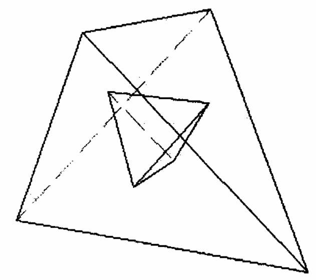
Icositetràedre pentagonal	24	38	60	
Dodecàedre pentakis	60	32	90	 $\overline{AC}=\overline{BC}=6(2\sqrt{5}-1)$ $\overline{AB}=19(\sqrt{5}-1)$
Icosàedre triakis	60	32	90	 $\overline{AC}=\overline{BC}=5(7+\sqrt{5})$ $\overline{AB}=11(5+\sqrt{5})$
Triacontàedre ròmbic	30	32	60	 $\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$ $\overline{AC}=\frac{500^{1/4}(1+\sqrt{5})\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{10}$
Hexacontàedre trapezoïdal	60	62	120	
Icosàedre hexakis	120	62	180	 $\overline{AB}=\sqrt{1275-465\sqrt{5}}$ $\overline{BC}=3\sqrt{39+\frac{57}{\sqrt{5}}}$ $\overline{AC}=11\sqrt{12-\frac{12}{\sqrt{5}}}$
Hexacontàedre pentagonal	60	92	150	

Políedres duals

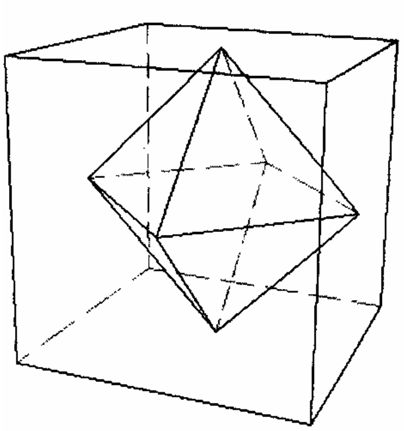
Si en un políedre unim entre si els centres de les cares, obtenim un altre políedre el nombre de cares del qual coincideix amb el nombre de vèrtexs del primer i viceversa. A aquests políedres s'anomenen duals.

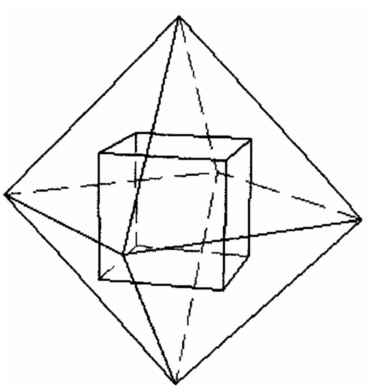
Políedres duals dels sòlids platònics.

Tetràedre-Tetràedre

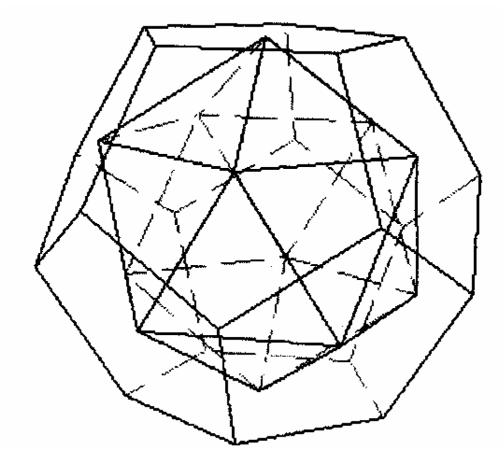


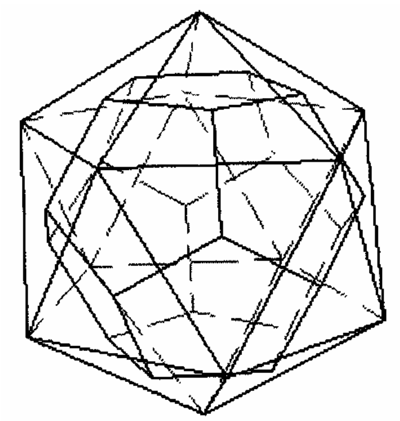
Cub-Octàedre





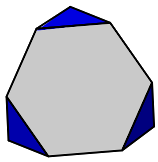
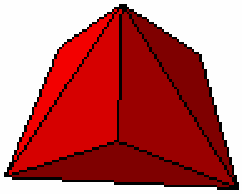
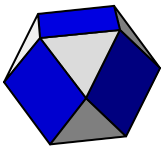
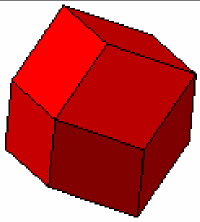
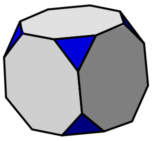
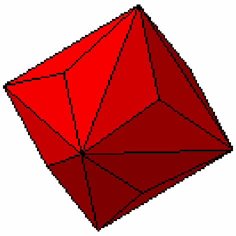
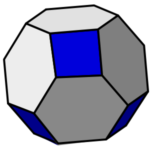
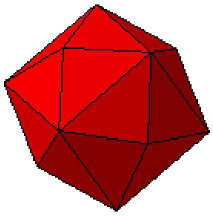
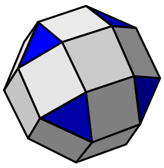
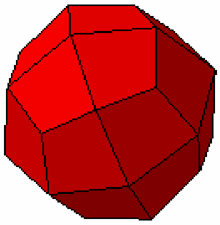
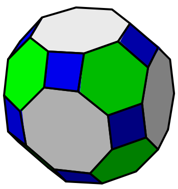
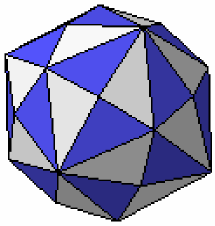
Dodecàedre-Icosàedre.

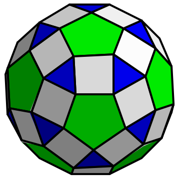
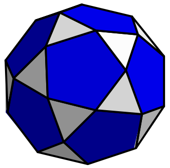
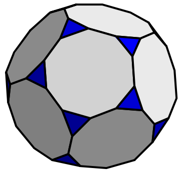
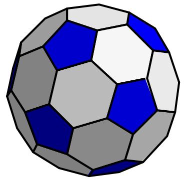
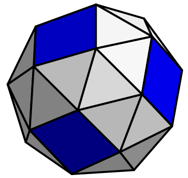
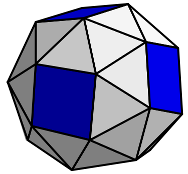
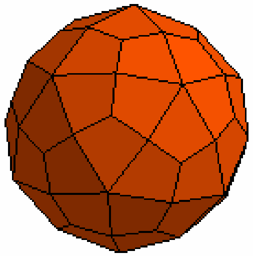
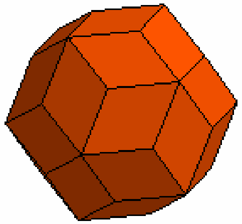
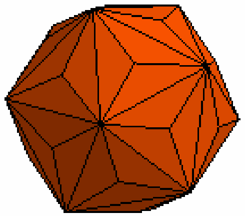
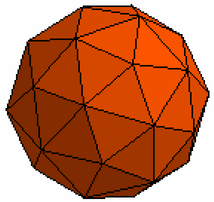
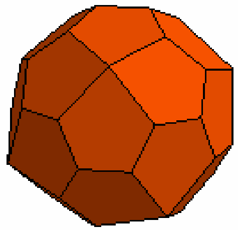
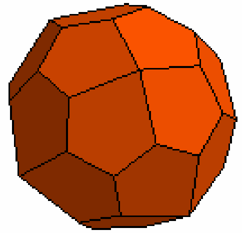


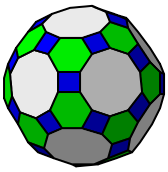
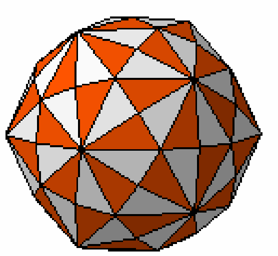
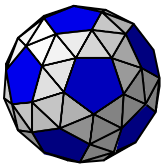
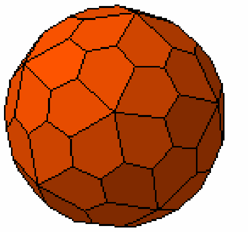
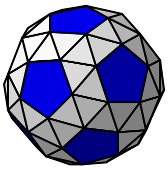
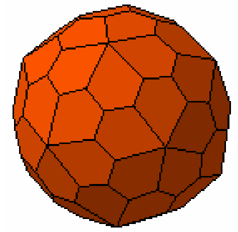


Els políedres duals dels políedres arquimedians són els sòlids o políedres de Catalan.

Políedres arquimedians i els duals de Catalan:

	Políedres Arquimedians	Políedres de Catalan	
Tetràedre truncat			Tetràedre Triakis
Cubooctàedre			Dodecàedre ròmbic
Cub truncat			Octàedre Triakis
Octàedre truncat			Hexàedre tetrakis
Rombicuboctàedre			Icositetràedre trapezoidal
Gran rombicuboctàedre			Dodecàedre pentakis

Rombicosidodecàedre	Icosidodecàedre	Dodecàedre truncat	Icosàedre truncat	Cub Simus*	Cub Simus
					
					
Hexacontàedre trapezoïdal	Triacontàedre ròmbic	Icosàedre triakis	Dodecàedre pentakis	Icositetràedre pentagonal*	Icositetràedre pentagonal

Gran rombicosidodecàedre			Icosàedre hexakis
Dodecàedre simus			Hexacontàedre pentagonal
Dodecàedre simus*			Hexacontàedre pentagonal*

Prismes i antiprismes

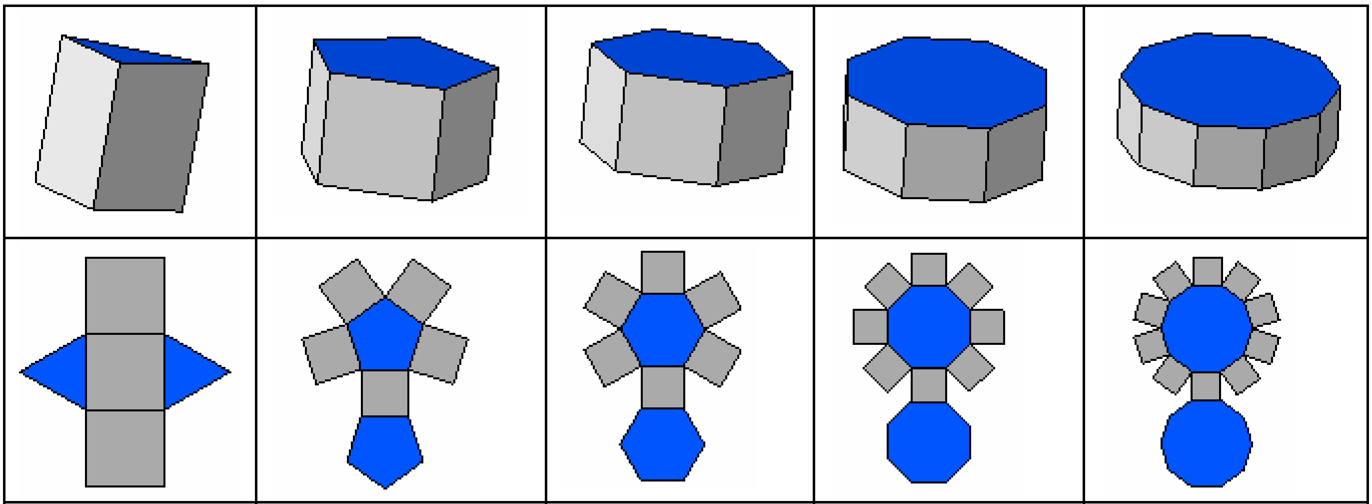
Els prismes són políedres formats per dues cares poligonals iguals (anomenades bases), paral·leles i disposades en la mateixa orientació (costas homòlegs paral·lels), de forma que al unir els vèrtexs homòlegs d'ambdues cares resulten rectangles o paral·lelograms.

En aquest estudi només considerarem les que formen cares laterals quadrats i bases polígons regulars.

Els antiprismes són políedres formats per dues cares poligonals iguals i disposades lleugerament girades una respecte de l'altra (costats homòlegs no paral·lels), unint cada vèrtex amb l'altre no homòleg més pròxim s'obtenen cares laterals triangulars iguals alternades en orientacions.

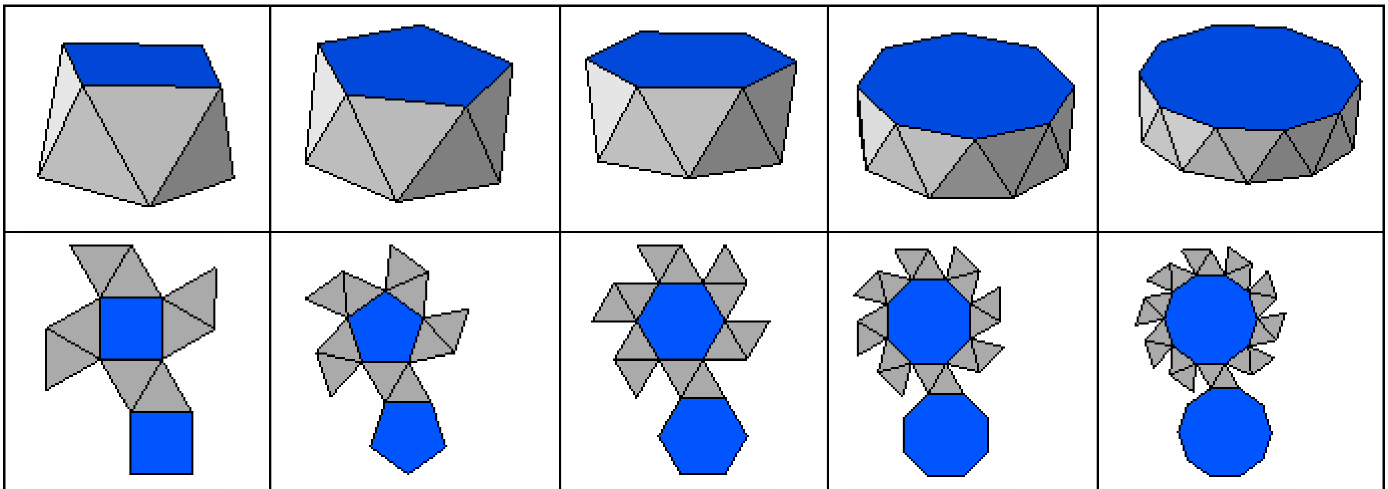
En aquest estudi només considerarem les cares laterals formades per triangles equilàters i bases polígons regulars.

Exemples de prismes i els seus desenvolupaments:



Prisma triangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal	Prisma octogonal	Prisma decagonal

Exemples d'antiprismes i els seus desenvolupaments:

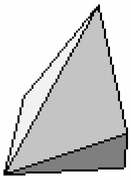
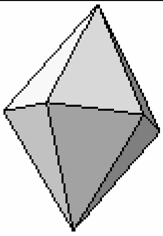
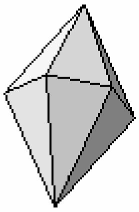
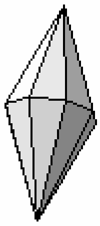
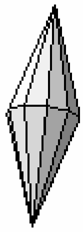
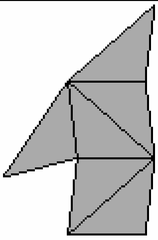
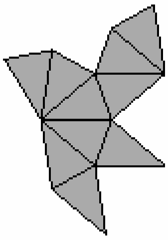
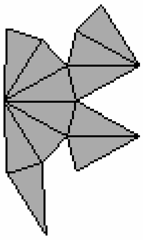
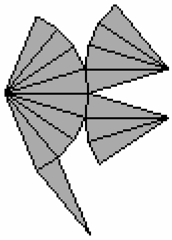
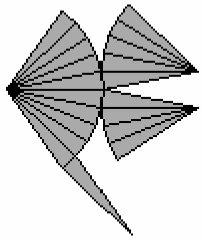


Antiprisma quadrangular	Prisma pentagonal	Antiprisma hexagonal	Antiprisma octogonal	Antiprisma decagonal

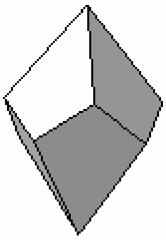
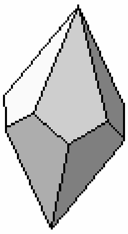
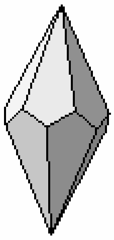
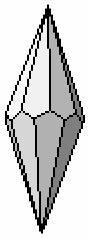
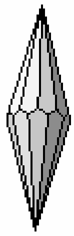
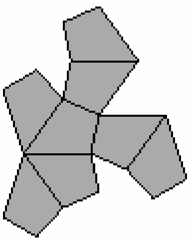
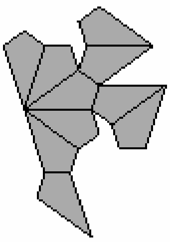
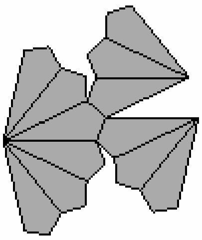
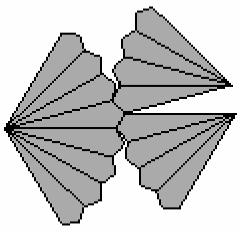
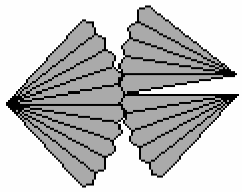
Dipiràmides i deltàedres.

Les dipiràmides són els políedres duals dels prismes.
Els deltàedres són els políedres duals dels antiprismes.

Exemples de dipiràmides (duals dels prismes) i els seus desenvolupaments:

				
				
Dipiràmide triangular	Dipiràmide pentagonal	Dipiràmide hexagonal	Dipiràmide octogonal	Dipiràmide decagonal

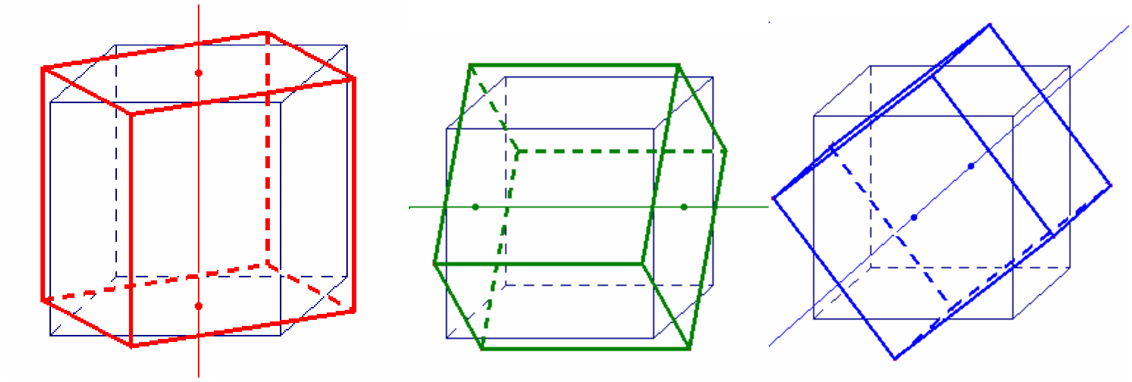
Exemples de deltàedres (duals dels antipismes) i els seus desenvolupaments:

				
				
Deltàedres quadrangular	Deltàedres pentagonal	Deltàedres hexagonal	Deltàedres octogonal	Deltàedres decagonal

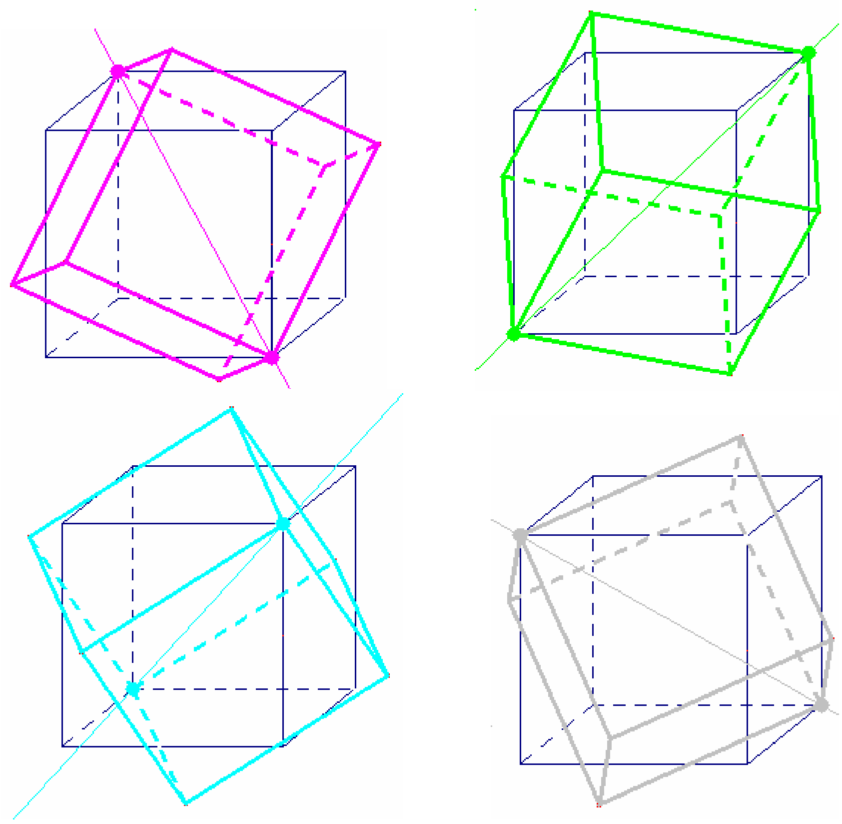
Simetries del cub

Eix de simetria o de rotació és la recta que travessa el políedre i que, si el políedre gira al voltant d'ella, torna a coincidir el políedre abans de donar una volta completa. L'ordre és el nombre de vegades que coincideix el políedre fins a donar una volta completa.

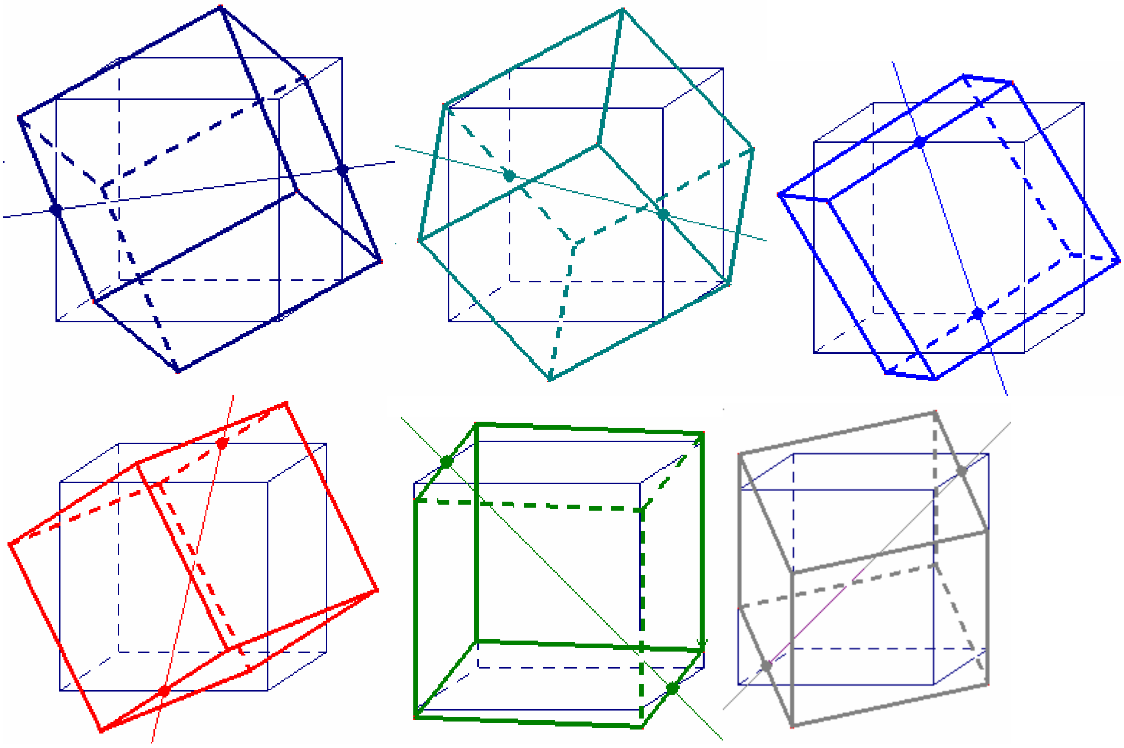
3 eixos de simetria d'ordre 4



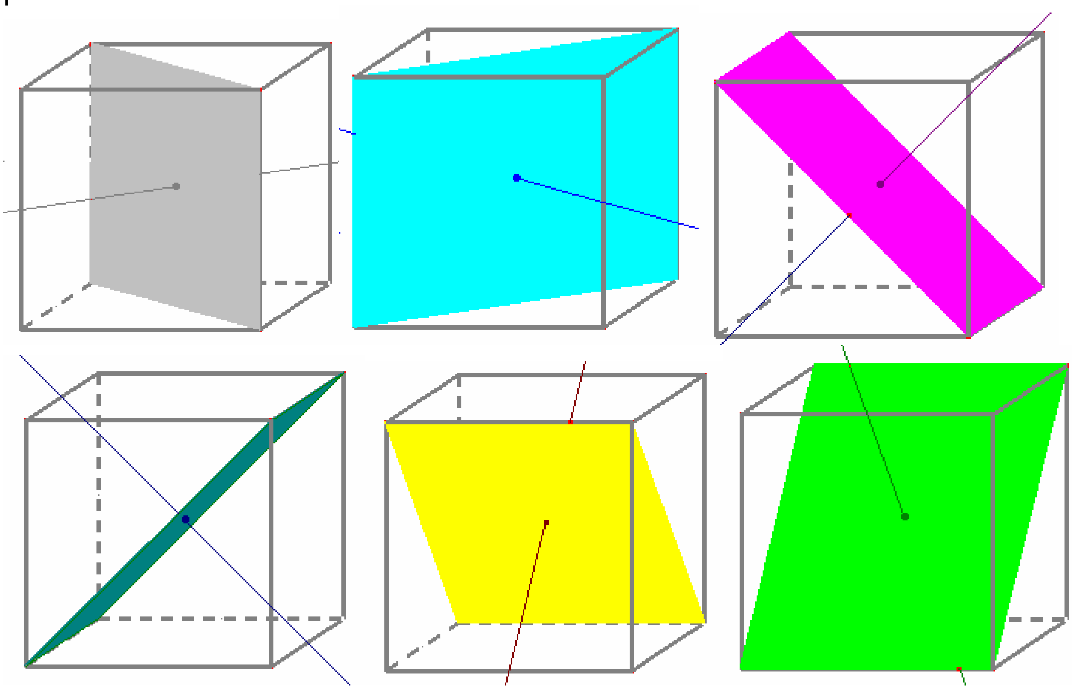
4 eixos de simetria d'ordre 3



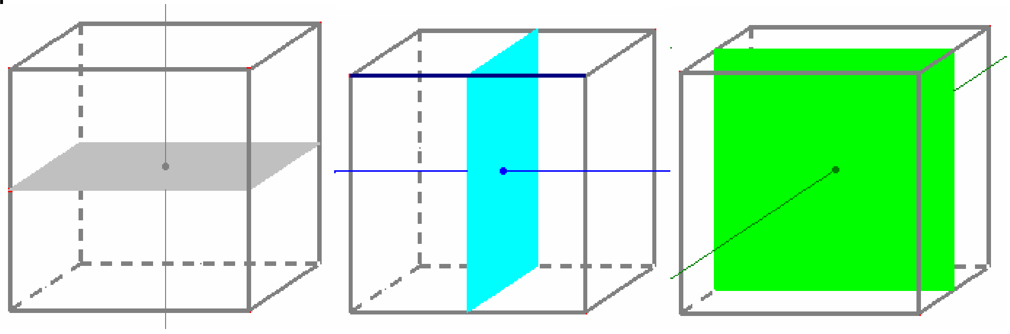
6 eixos de simetria d'ordre 2



6 plànols de simetria perpendiculars als eixos d'ordre 2 que passen pel centre del políedre.

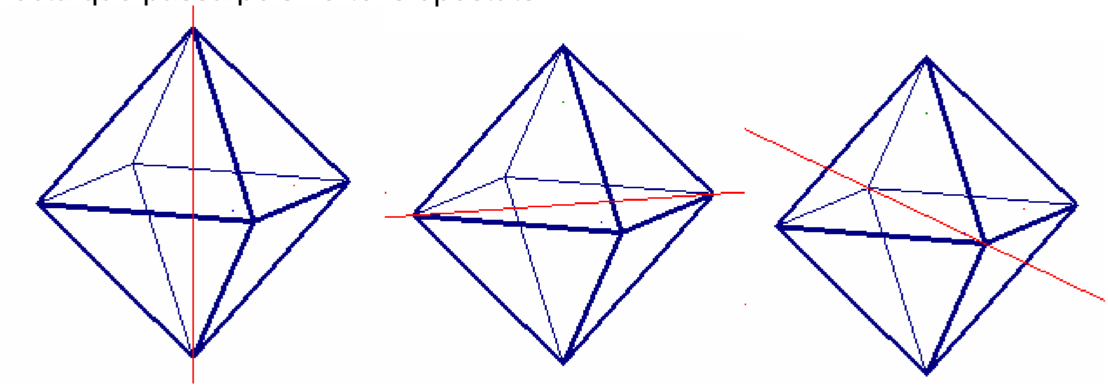


3 plànols de simetria perpendiculars als eixos d'ordre 4 que passen pel centre del políedre.

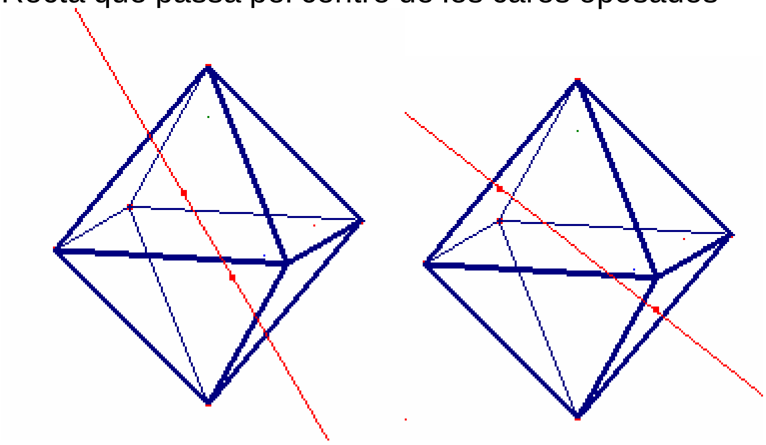


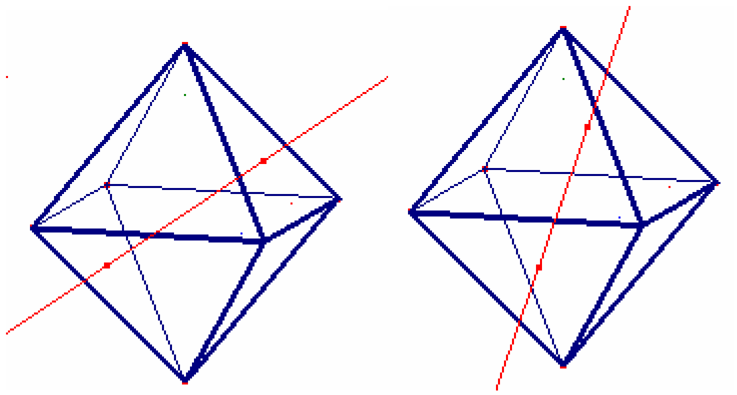
Simetries de l'octàedre

3 eixos de simetria d'ordre 4
recta que passa pels vèrtexs opostats

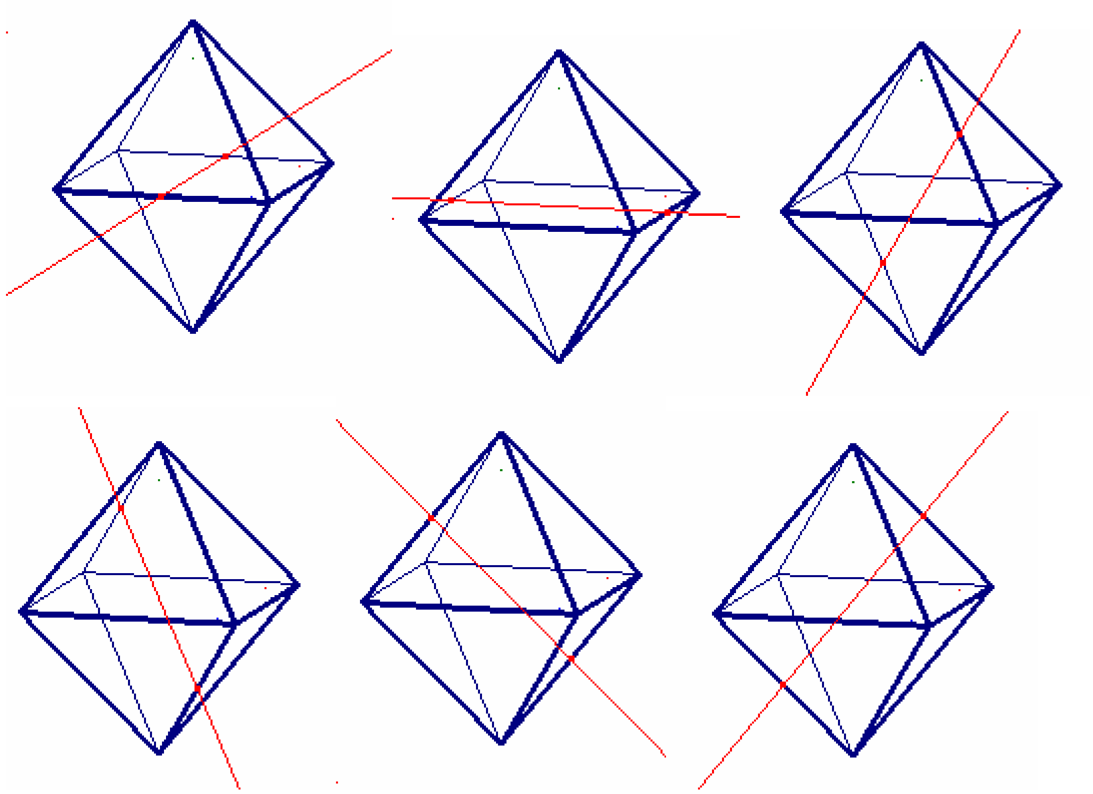


4 eixos de simetria d'ordre 3
Recta que passa pel centre de les cares oposades

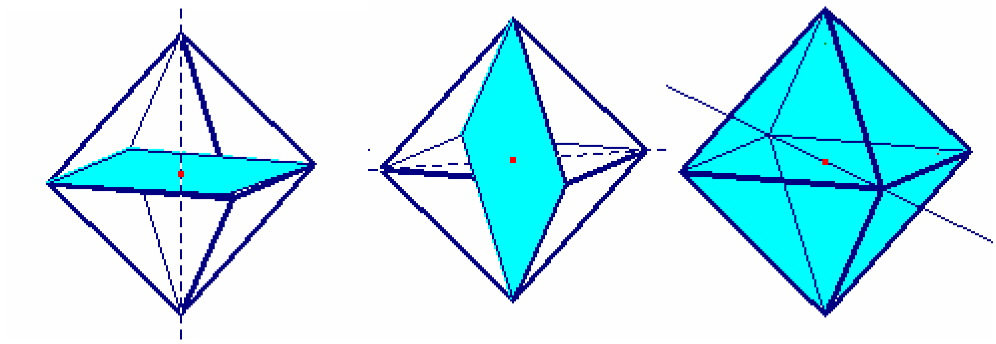




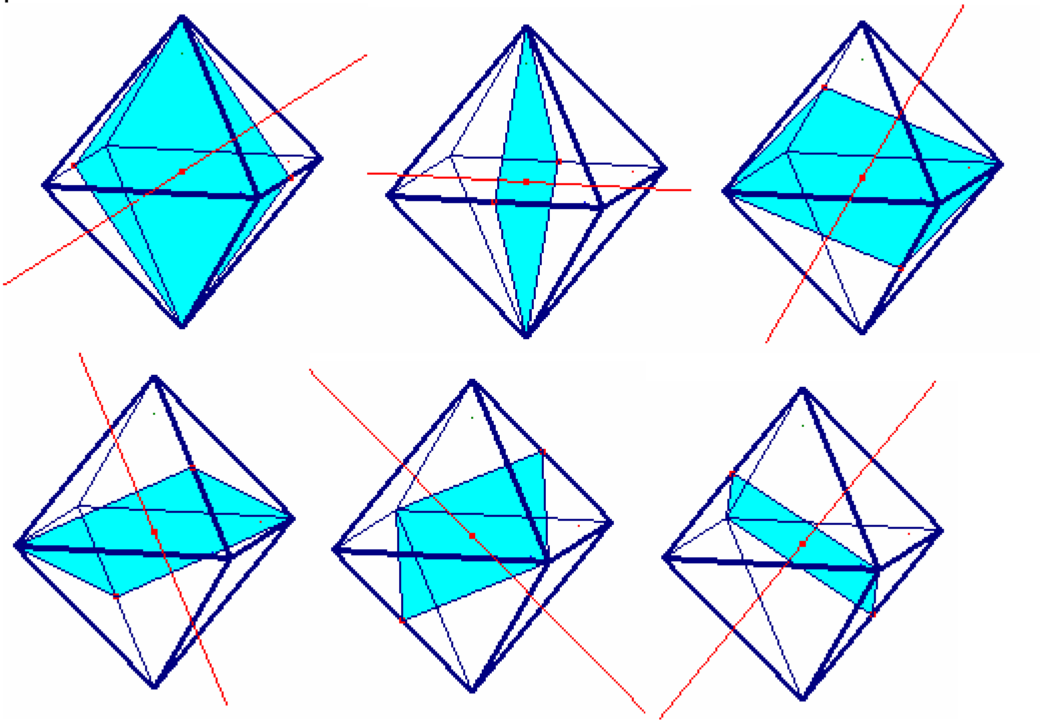
6 eixos de simetria d’ordre 2
recta que passa pel centre de les arestes oposades



3 plànols de simetria perpendiculars als eixos d’ordre 4 que passen pel centre del políedre



6 plànols de simetria perpendiculars als eixos d'ordre 2 que passen pel centre del políedre.



Angles dièdrics.

Angle dièdric és el que formen dues cares que es tallen en una aresta d'un políedre.

Angles dièdrics dels políedres regulars.

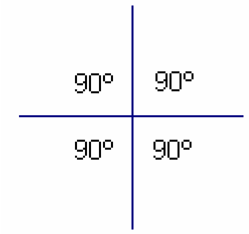
Políedre regular	Angle dièdric
Tetràedre	$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^{\text{o}}\ 31'\ 43.61''$
Cub	90º
Octàedre	$\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{\text{o}}\ 28'\ 16.39''$
Dodecàedre	$\arccos\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \approx 116^{\text{o}}\ 33'\ 54.1''$
Icosàedre	$\arccos\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right) \approx 138^{\text{o}}\ 11'\ 22.8''$

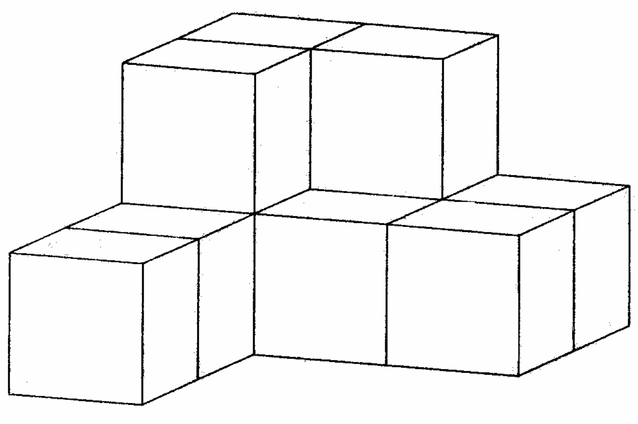
Empaquetaments

Anomenem empaquetaments de políedres a l'agrupació de políedres que s'uneixen formant combinacions amb les quals no queden espais lliures entre ells.
S'ha de complir:

- Les cares dels políedres en connexió han de ser del mateix tipus i amb la mateixa longitud del costat.
- La suma dels angles dièdrics que convergeixen en la mateixa cara ha de ser 360º.

Empaquetament 1
Políedre que el forma: Cub.
Angle dièdric entre les cares:
Quadrat-Quadrat 90º.
Convergeixen 4 cubs per aresta, essent la suma dels quatre angles 360º.



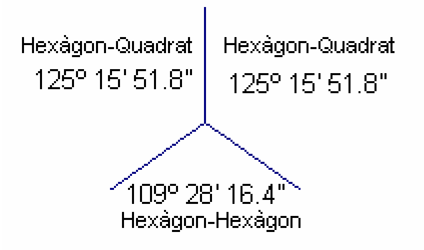


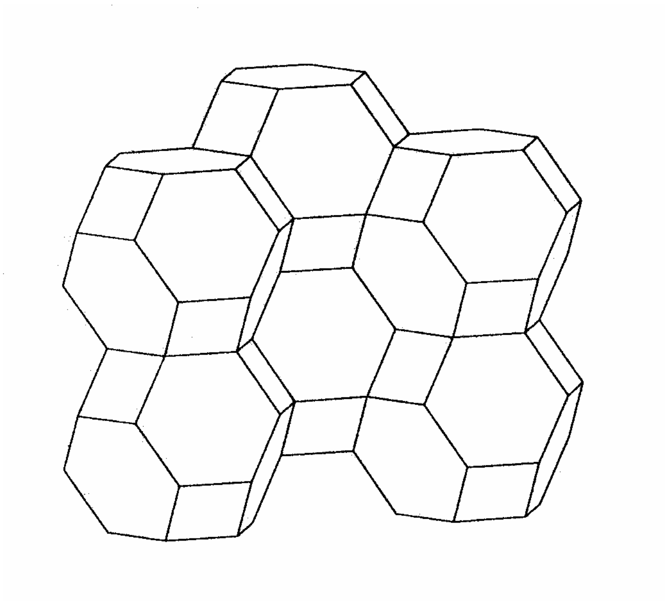
Empaquetament 2
Políedre que el forma: octàedre truncat.
Angles dièdrics entre les cares:

Hexàgon-Hèxagon $\quad \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{\circ}\ 28'\ 16.4''$

Hèxagon-Quadrat $\quad 180^{\circ} - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^{\circ}\ 15'\ 51.8''$

Convergeixen 3 octàedres truncats per aresta, essent la suma dels quatre angles 360º.





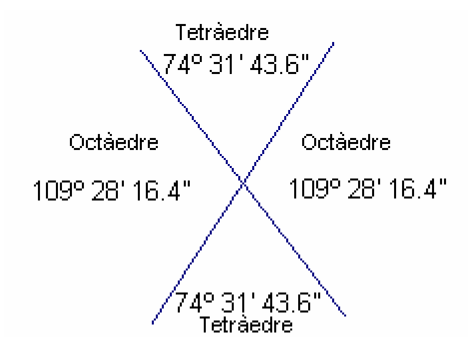
Empaquetament 3
Políedres que el formen: tetràedre, octàedre.
Angles dièdrics entre les cares:
Tetràedre:

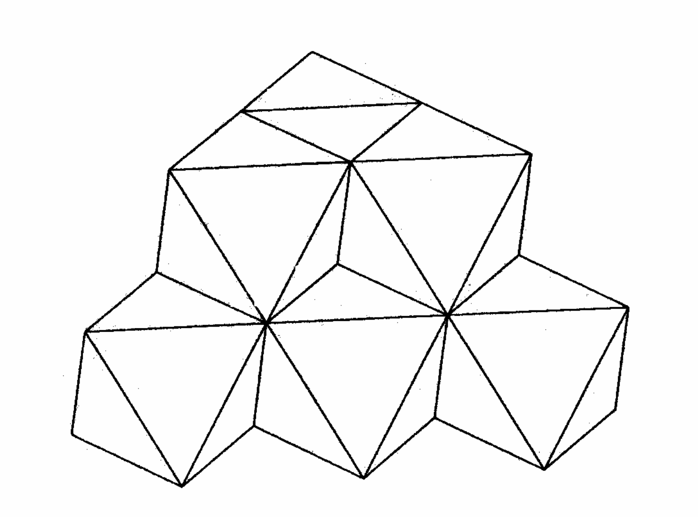
Triangle-triangle $\quad \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^{\circ}\ 31'\ 43.61''$

Octàedre:

Triangle-Triangle $\quad \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{\circ}\ 28'\ 16.39''$

Convergeixen 2 políedres de forma alternada (2 tetràedres i 2 octàedres) convergent en una mateixa aresta, essent la suma dels quatre angles 360º.





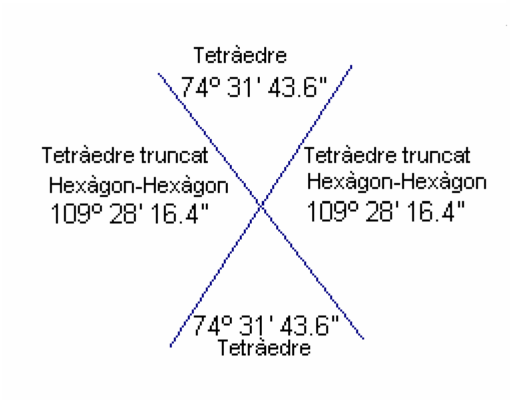
Empaquetament 4
Políedres que el formen: tetràedre, tetràedre truncat.
Angles dièdrics entre les cares:
Tetràedre:

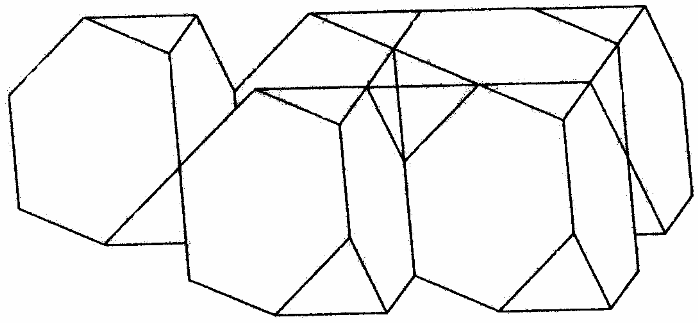
Triangle-triangle $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^{\circ}\,31'\,43.61''$

tetràedre truncat:

Hexàgon-Hexàgon $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{\circ}\,28'\,16.39''$

Convergeixen 2 políedres de forma alternada (2 tetràedres i 2 tetràedres truncats) convergent en una mateixa aresta, essent la suma dels quatre angles 360º.





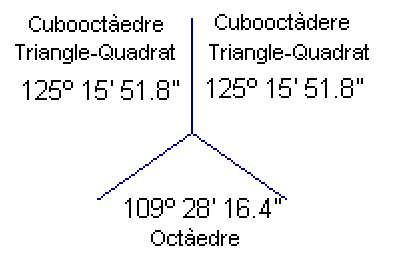
Empaquetament 5
Políedres que el formen: octàedre, Cubooctàedre.
Angles dièdrics entre les cares:
octàedre:

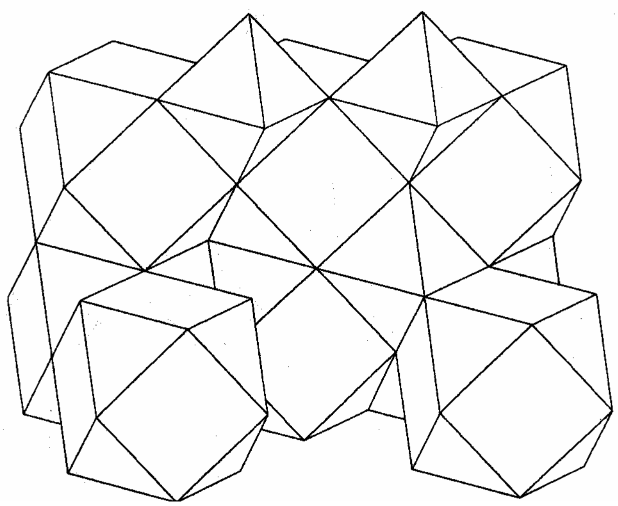
Triangle-Triangle $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{\circ}\,28'\,16.39''$

cubooctàedre:

Triangle-Quadrat $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^{\circ}\,15'\,51.8''$

Convergeixen 1 octàedre i 2 cubooctàedres en una mateixa aresta, essent la suma dels quatre angles 360º.





Empaquetament 6
Políedres que el formen: octàedre, cub truncat.
Angles dièdrics entre les cares:
Octàedre:

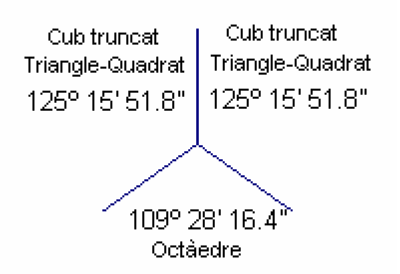
Triangle-Triangle $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{\circ}\ 28'\ 16.39''$

Cub truncat:
Octògon-Octògon 90º

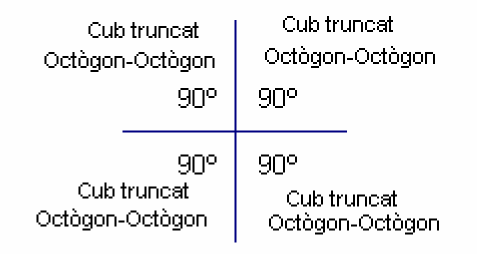
Triangle-Octògon $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^{\circ}\ 15'\ 51.8''$

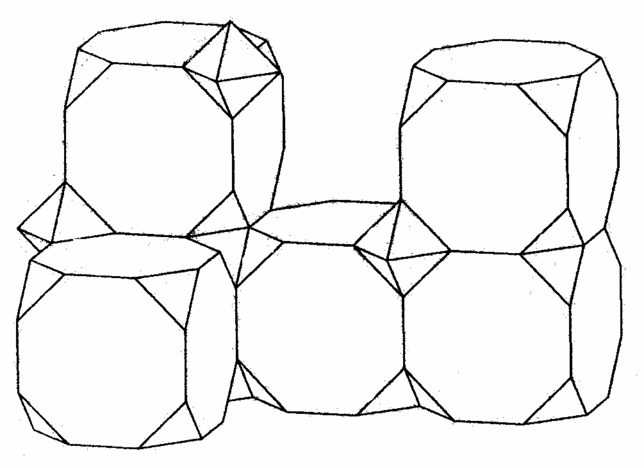
Es donen 2 casos de connexió:

1. convergeixen un octàedre i dos cubs truncats.



2. convergeixen quatre cubs truncats.





Empaquetament 7
Políedres que el formen: tetràedre, cub, rombicuboctàedre.
Angles dièdrics entre les cares:
Tetràedre:

Triangle-triangle $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^{\circ}\ 31'\ 43.61''$

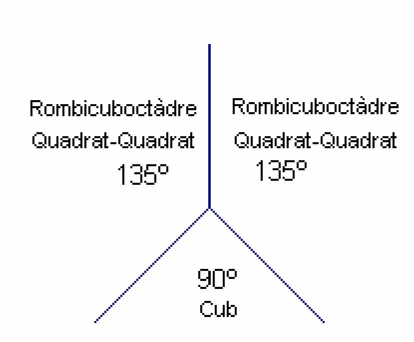
Cub:
90º
Rombicuboctàedre:

Triangle-Quadrat $\text{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \approx 144^{\circ}\ 44'\ 8.2''$

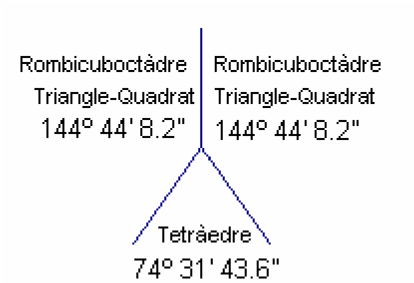
Quadrat-Quadrat 135º

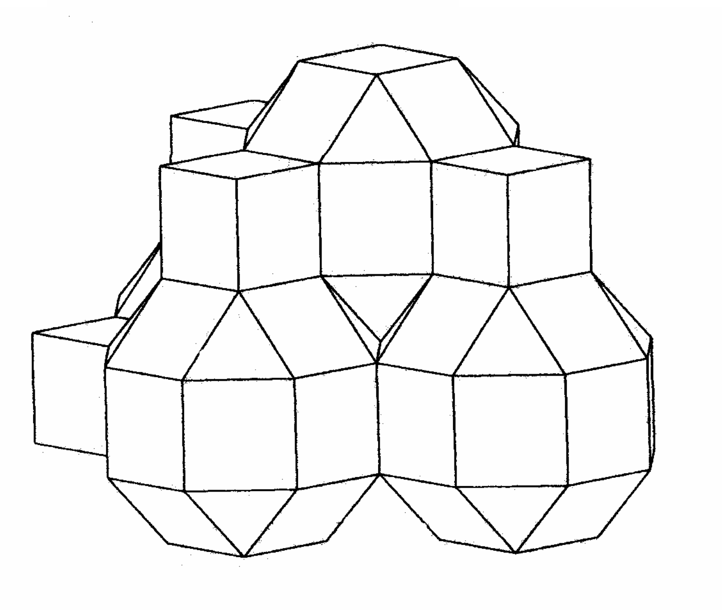
Es donen 2 casos de connexió:

1. Convergeixen un cub i dos rombicuboctàedres per aresta.



2. Convergeixen un tetràedre i dos rombicuboctàedres per aresta.





Empaquetament 8
Políedres que el formen: cub, cubooctàedre, rombicuboctàedre.
Angles dièdrics entre les cares:
Cub:
90º
Cubooctàedre:

Triangle-Quadrat $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125º\ 15'\ 51.8''$

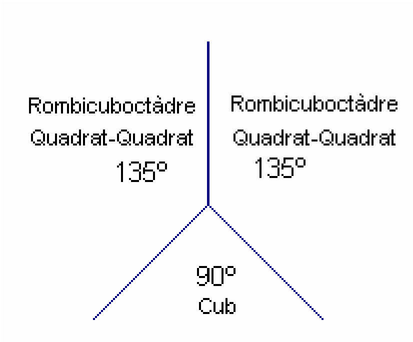
Rombicuboctàedre:

Triangle-Quadrat $\mathrm{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \approx 144º\ 44'\ 8.2''$

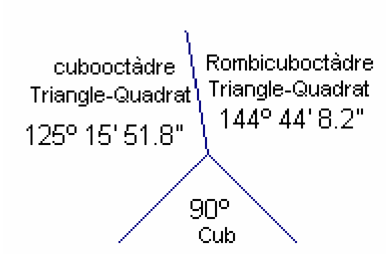
Quadrat-Quadrat 135º

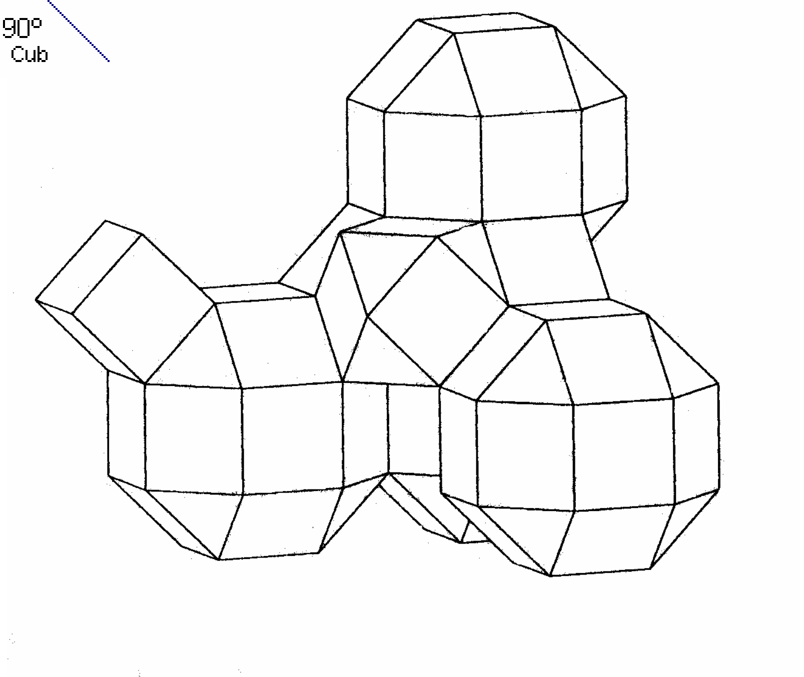
Es donen 2 casos de connexió:

1. Convergeixen un cub i dos rombicuboctàedres per aresta.



2. Convergeixen un tetràedre un cubooctàedre, i un rombicuboctàedre per aresta.





Empaquetament 9

Políedres que el formen: cub, octàedre truncat, gran rombicuboctàedre.

Angles dièdrics entre les cares:

Cub:

90º

Octàedre truncat:

Hexàgon-Hèxagon $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{\circ}\ 28'\ 16.4''$

Hèxagon-Quadrat $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^{\circ}\ 15'\ 51.8''$

Gran rombicuboctàedre:

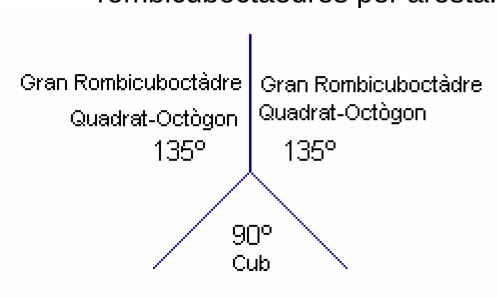
Hexàgon-Octògon $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^{\circ}\ 15'\ 51.8''$

Hexàgon-Quadrat $\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \approx 144^{\circ}\ 44'\ 8.2''$

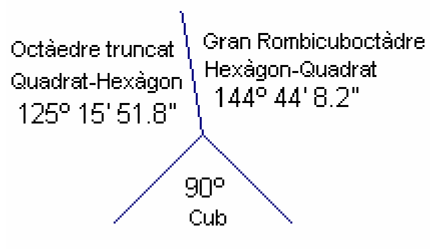
Quadrat-Octògon 135º

Es donen 3 casos de connexió:

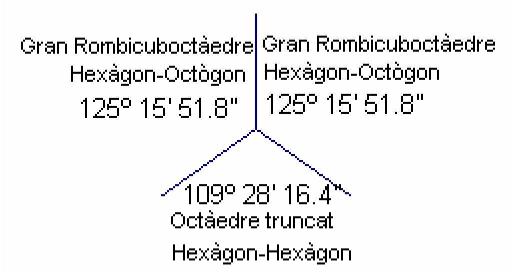
1. Convergeixen un cub i dos grans rombicuboctàedres per aresta.

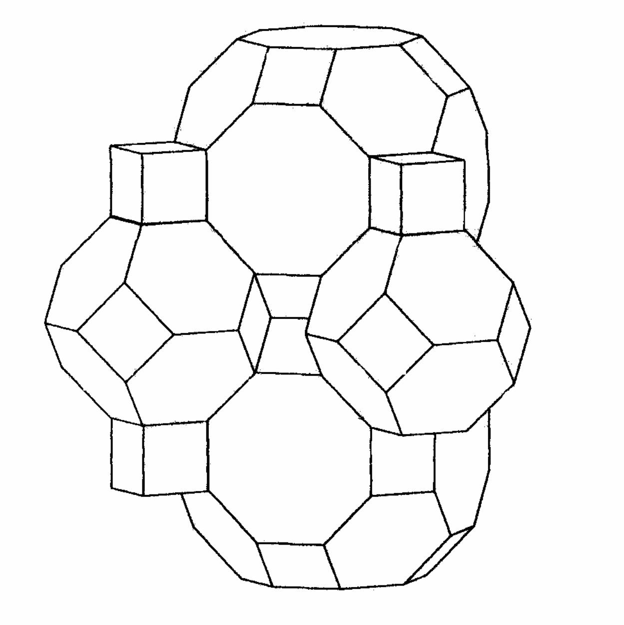


2. Convergeixen un cub un octàedre truncat i un gran rombicuboctàedre per aresta.



3. Convergeixen un octàedre truncat i dos grans rombicuboctàedres per aresta.





Empaquetament 10
Políedres que el formen: tetràedre truncat, cub truncat, gran rombicuboctàedre.
Angles dièdrics entre les cares:
Tetràedre truncat:

Triangle-Hexàgon $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^{o}\ 28'\ 16.39''$

Hexàgon-Hexàgon $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^{o}\ 31'\ 43.61''$

Cub truncat:
Octògon-Octògon 90^{o}

Triangle-Octògon $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^{o}\ 15'\ 51.8''$

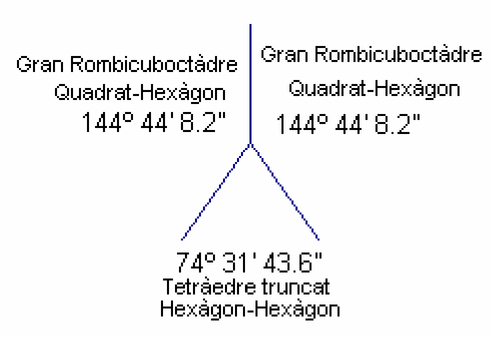
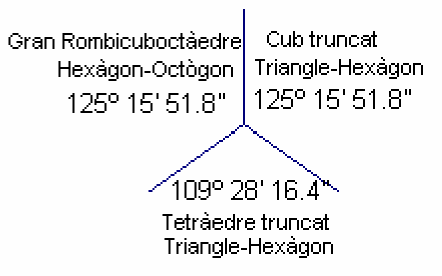
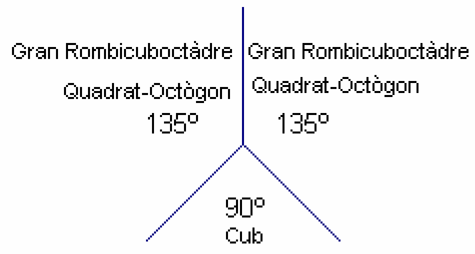
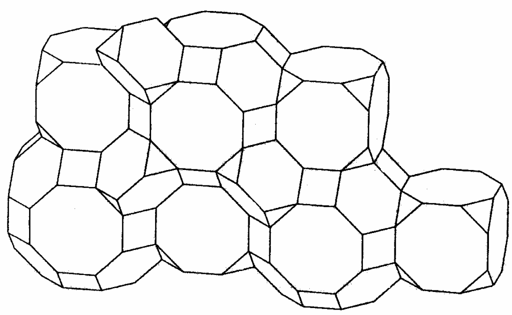
Gran rombicuboctàedre:

Hexàgon-Octògon $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^{o}\ 15'\ 51.8''$

Hexàgon-Quadrat $\text{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \approx 144^{o}\ 44'\ 8.2''$

Quadrat-Octògon 135^{o}

Es donen 3 casos de connexió:

<table>
<tr>
<td>1. Convergeixen un tetràedre truncat i dos grans rombicuboctàedres per aresta.

</td>
<td>2. Convergeixen un tetràedre truncat un cub truncat i un gran rombicuboctàedre per aresta.

</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Convergeixen un cub truncat i dos grans rombicuboctàedres per aresta.

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Empaquetament 11
Políedres que el formen: tetràedre truncat, octàedre truncat, cubooctàedre.
Angles dièdrics entre les cares:
Tetràedre truncat:

Triangle-Hexàgon $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^o\ 28'\ 16.39''$

Hexàgon-Hexàgon $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^o\ 31'\ 43.61''$

Octàedre truncat:

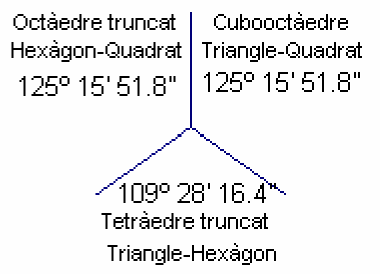
Hexàgon-Hèxagon $\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109^o\ 28'\ 16.4''$

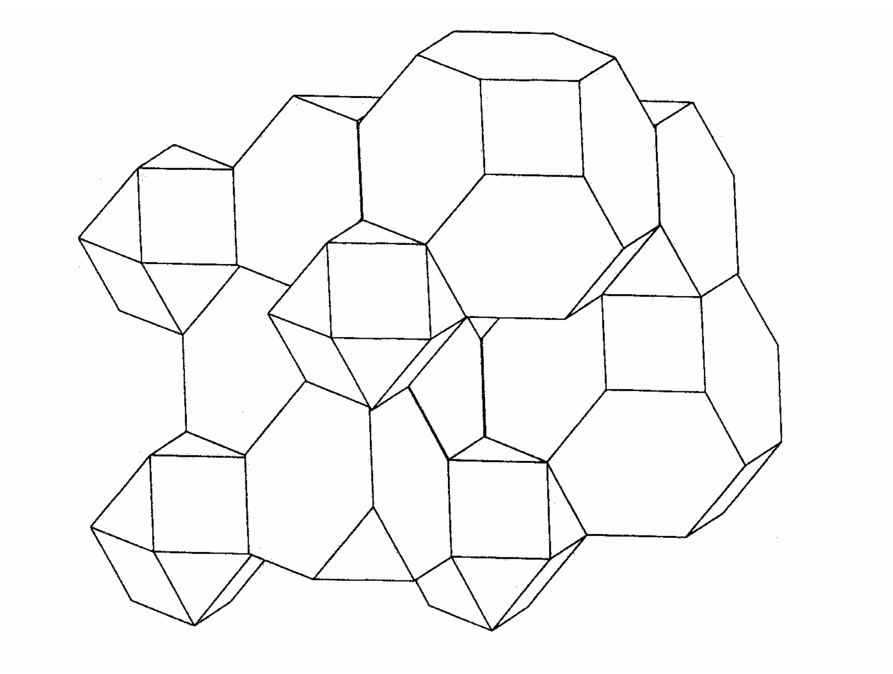
Hèxagon-Quadrat $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^o\ 15'\ 51.8''$

Cubooctàedre:

Triangle-Quadrat $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^o\ 15'\ 51.8''$

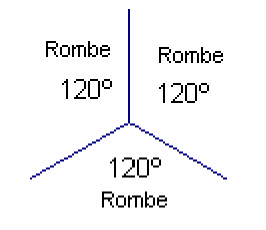
Convergeixen un tetràedre truncat, un octàedre truncat i un cubooctàedre per aresta.

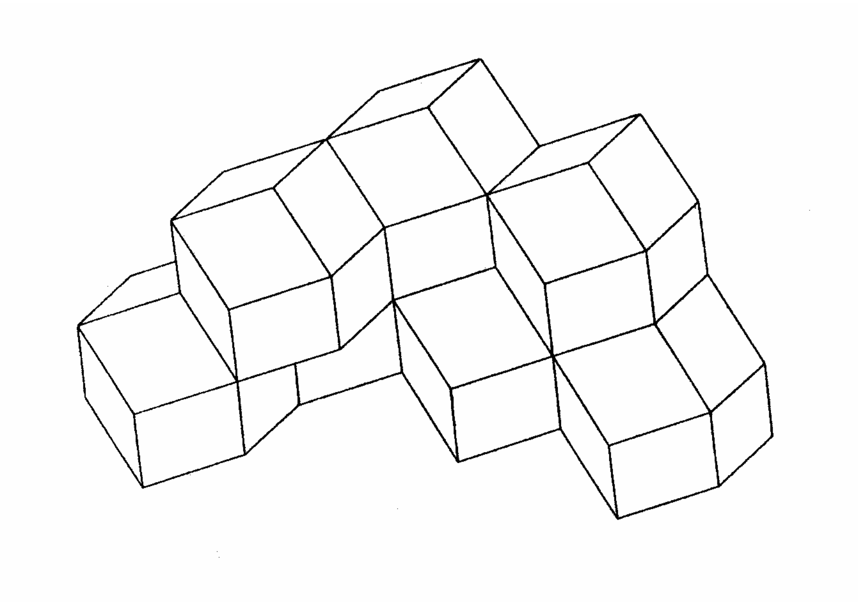




Empaquetament 12
Políedre que el forma: dodecàedre ròmbic (sòlid de Catalan).
Angles dièdrics entre les cares:
Rombe-Rombe 120º

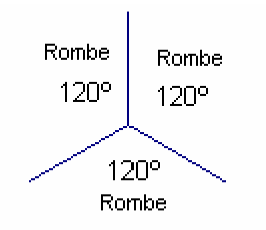
Convergeixen 3 dodecàedres ròmbics per aresta.

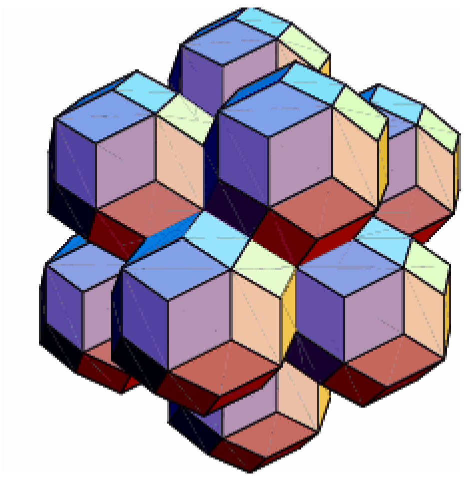




Empaquetament 13
Políedre que el forma: triacontàedre ròmbic (sòlid de Catalan).
Angles dièdrics entre les cares:
Rombe-Rombe 120º

Convergeixen 3 dodecàedres ròmbics per aresta.





Políedres regulars o platònics:

Nom	**Orde del vèrtex**	**Cares**	**Vèrtexs**	**Arestes**	**Àrea**	**Volum**	**R radi esfera Circumscrita**	**r radi esfera tangent arestes**	**r radi esfera Inscrita**	**Angle díedre**
Tetràedre	3	4 T	4	6	$A = a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{4}$	$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$	70º31'44"
Cub	3	6 Q	8	12	$A = 6a^2$	$V = a^3$	$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{a}{2}$	90º
Octàedre	4	8 T	6	12	$A = 2a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\rho = \frac{a}{2}$	$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$	109º28'16"
Dodecàedre	3	12 P	20	30	$A = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$V = \frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$	$R = \frac{a}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$	$\rho = \frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$	$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	116º33'54"
Icosàedre	5	20 T	12	30	$A = 5a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$	$R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\rho = \frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$r = \frac{a}{12}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$	138º11'23"

Propietat dels radis de les esferes circumscrita, inscrita i tangent a les arestes del políedre.

$R \cdot r = \rho^2$

T triangles equilàters.
Q quadrats
P pentàgons regulars
a aresta

Políedres arquimedians

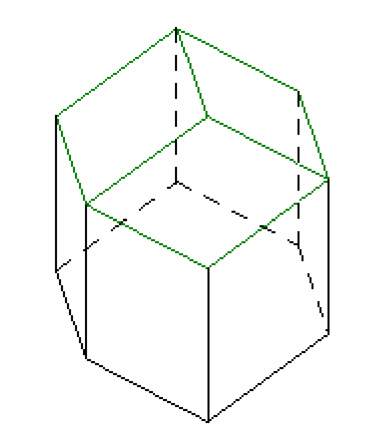
Nom	**Cares**	**Vèrtexs**	**Arestes**	**Àrea**	**Volum**	**R radi esfera Circumscrita**	r **radi esfera tangent arestes**	**r radi esfera Inscrita**
Tetràedre truncat	8=4T + 4H	12	18	12’1243	2’7106	$R=\frac{a\sqrt{22}}{4}$	$\rho=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$	$r=\frac{9a\sqrt{22}}{44}$
Cubooctàedre	14=8T+6Q	12	24	9’4641	2’3570	$R=a$	$\rho=\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r=\frac{3a}{4}$
Cub truncat	14=8T + 6 O	24	36	32’4346	13’5996	$R=\frac{a\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}$	$\rho=\frac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$	$r=\frac{a\left(5+2\sqrt{2}\right)\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{17}$
Octàedre truncat	14=8H + 6Q	24	36	26’7846	11’3137	$R=\frac{a\sqrt{10}}{2}$	$\rho=\frac{3a}{2}$	$r=\frac{9a\sqrt{10}}{20}$
Rombicuboctàedre	26=8T + 18Q	24	48	21’4641	8’7140	$R=\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{2}$	$\rho=\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$r=\frac{a\left(6+\sqrt{2}\right)\sqrt{5+\sqrt{2}}}{17}$
Gran Rombicuboctàedre	26=12Q+8H+6 O	48	72	61’7551	41’7990	$R=\frac{a\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2}$	$\rho=\frac{a\sqrt{12+6\sqrt{2}}}{2}$	$r=\frac{3a\left(14+\sqrt{2}\right)\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{97}$
Cub simus	38=32T+6Q	24	60	19’8564	7’8895			
Icosidodecàedre	32=20T + 12P	30	60	29’3060	13’8355	$R=\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$	$\rho=\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$	$r=\frac{a\left(5+3\sqrt{5}\right)}{8}$
Dodecàedre truncat	32=20T + 12 D	60	90	100’9907	85’0396	$R=\frac{a\sqrt{74+30\sqrt{5}}}{4}$	$\rho=\frac{a\left(5+3\sqrt{5}\right)}{4}$	$r=\frac{5a\left(17\sqrt{2}+3\sqrt{10}\right)\sqrt{37+15\sqrt{5}}}{488}$
Icosàedre truncat	32=12P + 20H	60	90	72’6072	55’2877	$R=\frac{a\sqrt{58+18\sqrt{5}}}{4}$	$\rho=\frac{3a\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$r=\frac{9a\left(21+\sqrt{5}\right)\sqrt{58+18\sqrt{5}}}{872}$
Rombicosidodecàedre	62=20T+12P+30Q	60	120	59’3060	41’6153	$R=\frac{a\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}$	$\rho=\frac{a\sqrt{10+4\sqrt{5}}}{2}$	$r=\frac{a\left(15+2\sqrt{5}\right)\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{41}$
Gran Rombicosidodecàedre	62=30Q+20H+12 O	120	180	174’2920	206’8034	$R=\frac{a\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{2}$	$\rho=\frac{a\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{2}$	$r=\frac{a\left(105+6\sqrt{5}\right)\sqrt{31+12\sqrt{5}}}{241}$
Dodecàedre simus	92=80T + 12P	60	150	55’2867	37’6166			

Propietat dels radis de les esferes circumscrita, inscrita i tangent a les arestes del políedre: $R\cdot r=\rho^2$

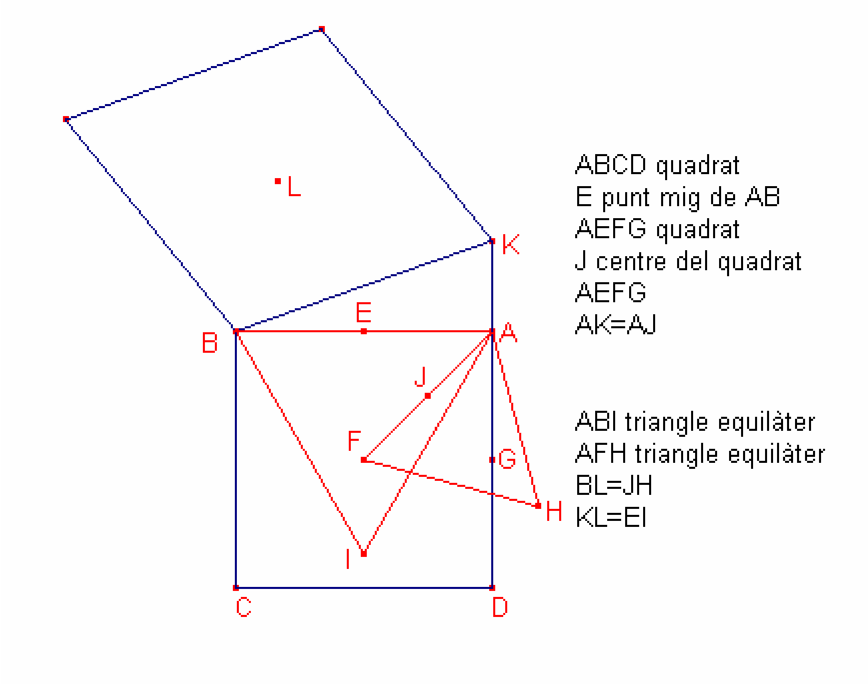
T triangles equilàters. Q quadrats. P pentàgons regulars. H hexàgons regulars. O octògons regulars. D decàgons regulars
Nota: Les superfícies i els volums són aproximats, l’aresta és 1.

La bresca de mel

La bresca de mel està formada per un prisma hexagonal i un dodecàedre ròmbic.



Mòdul per construir la cara lateral i un rombe de la base:



Desenvolupament: