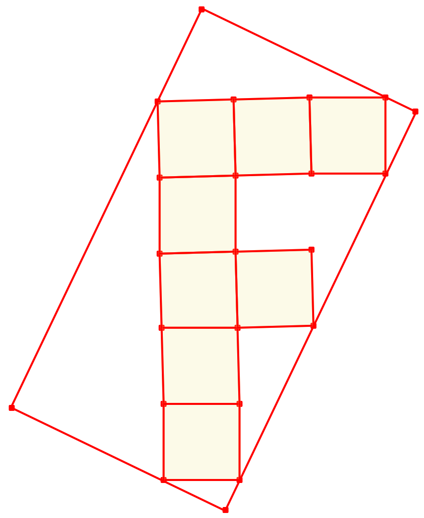
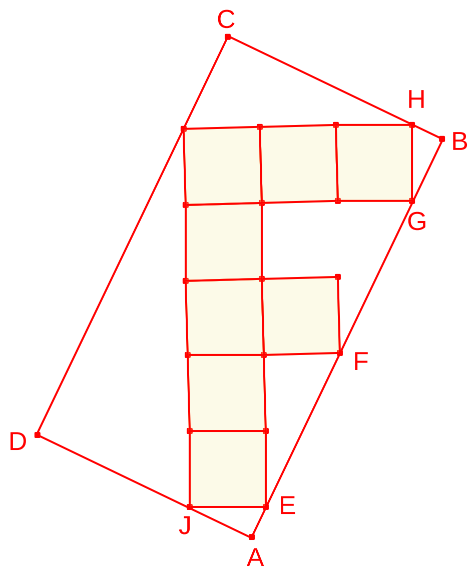
Problemes de Geometria per a l'ESO 510

5091.- La figura està formada per vuit quadrats iguals dins d'un rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle exterior.



Solució:



JE=1

AE=x, AJ=2x

$5x^2=1$

CH=6x

EF=FG=2·sqrt(5)

AB=3x+2·EF=(13/5)sqrt(5)

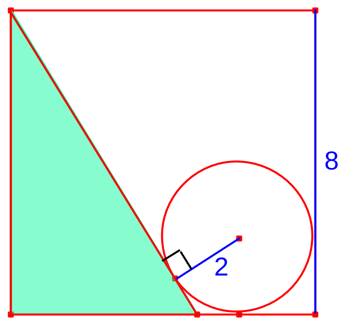
BC=7x=(7/5)sqrt(5)

[ABCD]=AB·BC=91/5

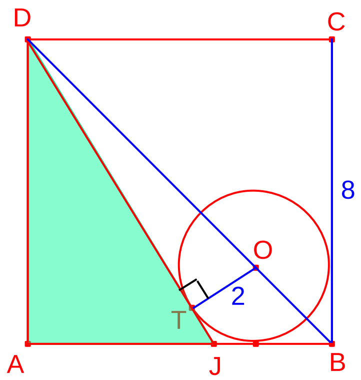
[ombrejada]=8

[ombrejada]/[ABCD]=40/91

5092.- La figura està formada per un quadrat de costat 8 i una circumferència de radi 2.
Calculeu l'àrea del triangle rectangle ombrejat que té la hipotenusa tangent a la circumferència.

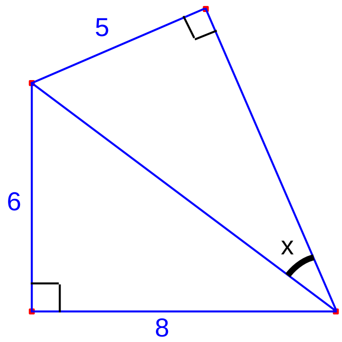


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 8$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = 2$
Siga $x = \overline{AJ}, \angle TDO = \alpha$
$\overline{BO} = 2\sqrt{2}, \overline{BD} = 8\sqrt{2}, \overline{OD} = 6\sqrt{2}$

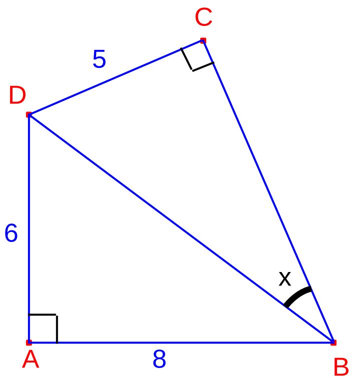


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DTO}$:
$\overline{DT} = 2\sqrt{17}$
$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$$
$$\frac{x}{8} = \tan(45° - \alpha) = \frac{1 - \frac{\sqrt{17}}{17}}{1 + \frac{\sqrt{17}}{17}} = \frac{9 - \sqrt{17}}{8}$$
$x = 9 - \sqrt{17}$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJD}$ és:
$$S_{AJD} = \frac{1}{2} \cdot 8\left(9 - \sqrt{17}\right) = 4\left(9 - \sqrt{17}\right) \approx 19.5076$$

5093.- La figura està formada per dos triangles rectangles.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

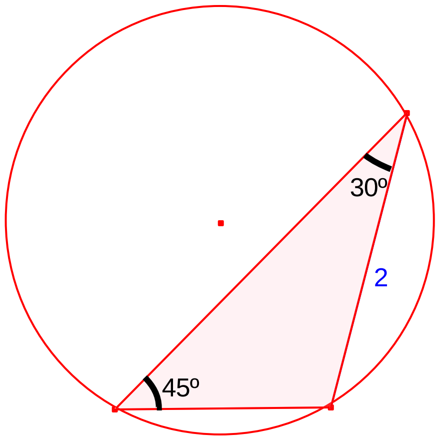


BD=10

sin x =5/10

x=30º

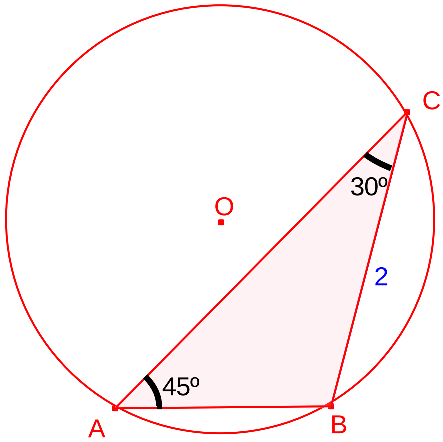
5094.- Calculeu l’àrea cel cercle circumscrit al triangle ombrejat de la figura.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 45°, \overline{BC} = 2$ inscrit en la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = r$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:



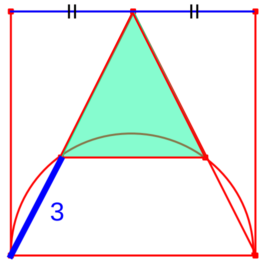
$$\frac{2}{\sin 45°} = 2R$$

$$R = \sqrt{2}$$

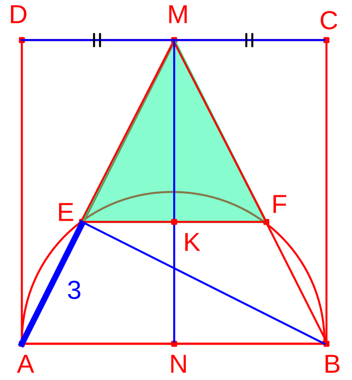
L’àrea del cercle és:

$$S_{cercle} = 2\pi$$

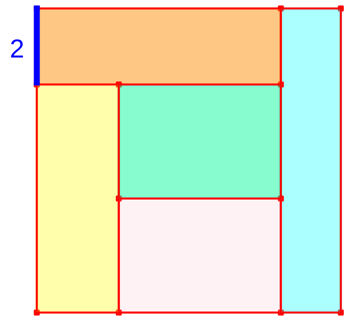
5095.- La figura està formada per un quadrat que conté una semicircumferència sobre un costat i dos triangles isòsceles. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



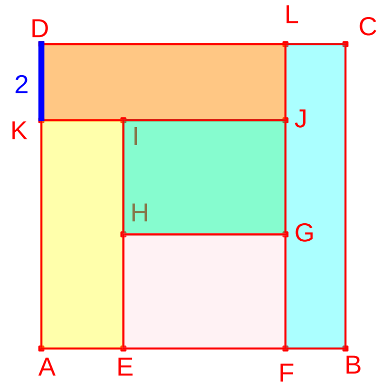
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2r$
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{CD}, \overline{AB}$, respectivament.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANM}, \overset{\Delta}{AEB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BE} = 2 \cdot \overline{AE} = 6$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$
$\overline{AB} = 3\sqrt{5}$
$\overline{AM} = \overline{AN} \cdot \sqrt{5} = \frac{15}{2}$
$\overline{ME} = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$
Els triangles $\overset{\Delta}{EFM}, \overset{\Delta}{ABM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{EF} = \overline{MK} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFM}$ és:
$S_{EFM} = \frac{1}{2}\overline{EF} \cdot \overline{MK} = \frac{81}{10}$



5096.- La figura està formada per un quadrat que conté cinc rectangles d'igual àrea.
Calculeu l'àrea del quadrat exterior.



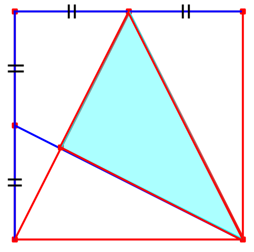
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga $\overline{DK} = 2$
Siguen $\overline{DL} = a, \overline{AK} = b$
Els rectangles $EFGH, GHIJ$ tenen la mateixa àrea.
Aleshores, $\overline{EH} = \overline{HI}$
L'àrea del rectangle $AEIK$ és la meitat de l'àrea del rectangle $EFJI$
Aleshores:
$\overline{AE} = \frac{1}{3}a, \overline{EF} = \frac{2}{3}a$



Els rectangles $AEIK, KJLD$ tenen la mateixa àrea:
$2a = \frac{1}{3}ab$
$b = 6$
$\overline{AD} = 6 + 2 = 8$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 8^2 = 64$

Nota:
$2a = \frac{1}{5}64$
$a = \frac{32}{5}$
$\overline{LC} = 8 - a = \frac{8}{5}$
$S_{FBCL} = \frac{8}{5} \cdot 8 = \frac{64}{5} = S_{KJLD}$

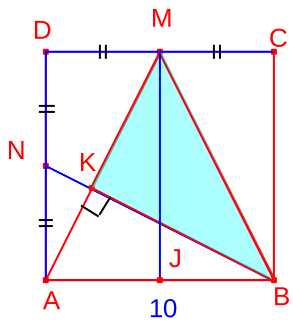
5097.- La figura està formada per un quadrat de costat 10.
S'han dibuixat els punts migs de dos costats i s'han dibuixat tres segments.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siguen $M, N\ J$ els punts migs dels costats $\overline{CD}, \overline{AD}, \overline{AB}$, respectivament.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NAB}, \overset{\Delta}{AJM}$ són iguals i els catets corresponents són perpendiculars.
Aleshores, $\angle AKB = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJM}$:
$\overline{AM} = 5\sqrt{5}$

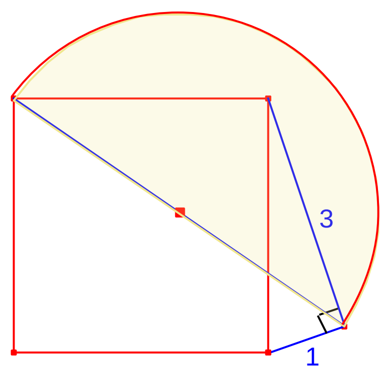


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJM}, \overset{\Delta}{NKA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AK} = 10 \cdot \frac{5}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$
$\overline{MK} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKB}, \overset{\Delta}{AJM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BK} = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{MKB}$ és:
$S_{MKB} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 30$

5098.- En la figura, sobre el costat d'un quadrat s'ha dibuixat un triangle rectangle de catets 1, 3 i una semicircumferència.
Calculeu l'àrea de la semicercle.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{BC} = \sqrt{10}$
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{DE} = 2R$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEC}, \overset{\Delta}{CKE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CK} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\overline{EK} = 3 \cdot \overline{CK} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$$

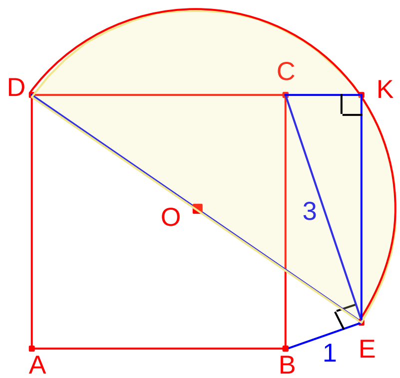
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKE}$:

$$4R^2 = \left(\sqrt{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \left(\frac{9\sqrt{10}}{10}\right)^2$$

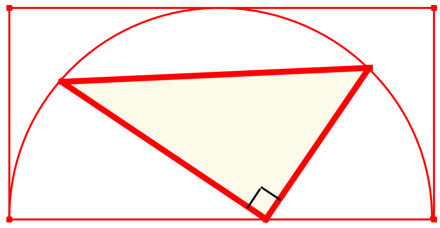
$$R^2 = \frac{25}{4}$$

L'àrea del semicercle és:

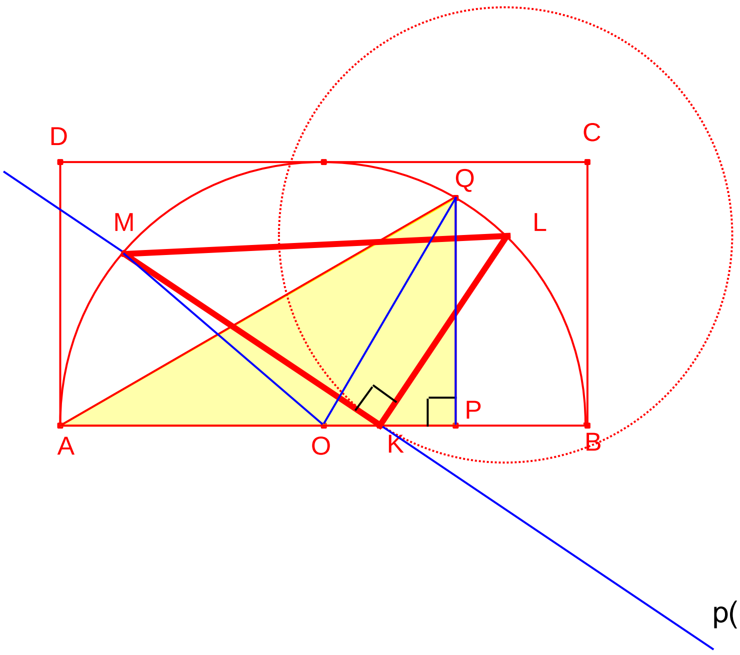
$$S_{semicercle} = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{25}{8}\pi$$



5099.- Un rectangle conté una semicircumferència.
La semicircumferència conté un triangle rectangle amb l'angle rectes sobre el diàmetre.
Calculeu la proporció màxima entre l'àrea del triangle rectangle i l'àrea del rectangle.



Solució:



OA=R

KL=PQ=a

[ABCD]=$2R^2$

KM < OM+OK

[APQ] > [MKL]

AP=b

Teorema Pitàgores OPQ

$a^2+b^2-2bR=0$

$p(a,b)=ab/(4R^2)$

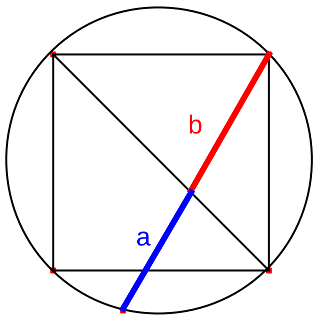
$p(b)=b\cdot \mathrm{sqrt}(2bR-b^2)/(4R^2)$

$p'(b)=0$, $b=(3/2)R$

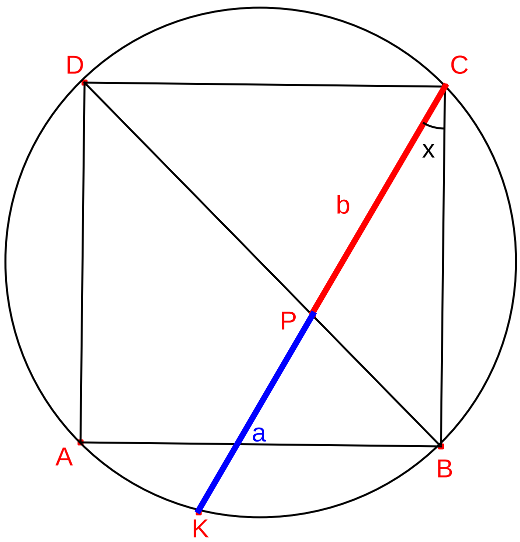
$p''((3/2)b)<0$

$p((3/2)R)=3\cdot \mathrm{sqrt}(3)/18=0.3248$

5100.- La figura està formada per una circumferència que conté un quadrat inscrit. Calculeu l'àrea del quadrat en funció de les mesures dels segments a, b



Solució:



KP=a, CP=b
AB=c

angleKCB=x
angleKBC=angleKBC=135º-x

Els triangles CPB, BCK semblants
c/(a+b) = b/c
c^2=b(a+b)