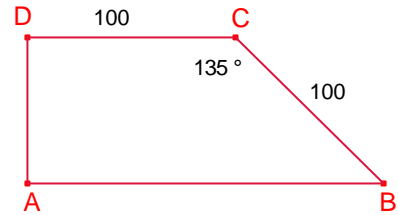


## Problemes de geometria per a l'ESO

1.- Siga ABCD un trapezi rectangle com el de la figura tal que  $\overline{BC} = \overline{CD} = 100\text{cm}$  i  $\angle BCD = 135^\circ$ .

Calculeu la mesura de les diagonals  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AC}$ .

García Ardura 82.



Solució:

Siga  $\overline{CH}$  altura sobre la base  $\overline{AB}$ .

$$\angle HCB = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ.$$

Aleshores, el triangle rectangle  $\triangle CHB$  és isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{CH} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{2}}{2} 100.$$

$$\overline{AH} = 100.$$

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} = 100 + \frac{\sqrt{2}}{2} 100.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle DAB$ :

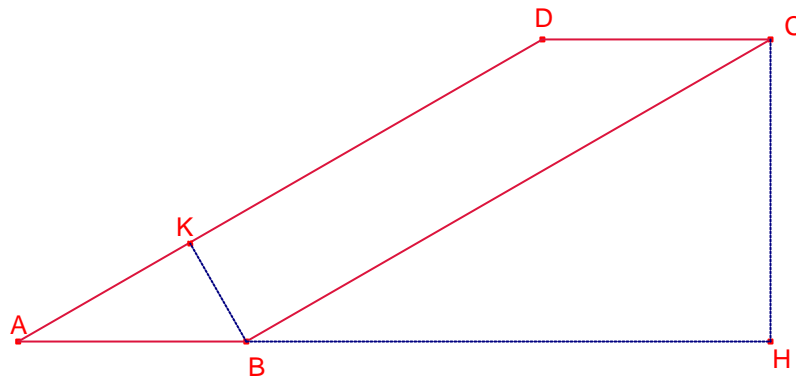
$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} 100\right)^2 + \left(100\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2} = 100\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 184.78\text{cm}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ADC$ :

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(100 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 100^2} = 50\sqrt{6} \approx 122.47\text{cm}.$$

2.- Els costats d'un paral·lelogram mesuren 16cm, 6cm.  
La distància entre els costats més allunyats és 8cm.  
Calculeu la mesura dels costats que estan més a prop.  
García Ardura 83.

Solució:



Siga el paral·lelogram ABCD,  $\overline{AB} = 6$ ,  $\overline{BC} = 16$ .

Si La distància entre els costats més allunyats és 8, l'altura del paral·lelogram sobre el costat menor  $\overline{AB}$  és 8.

Siga  $\overline{CH} = 8$  altura del paral·lelogram.

La distància entre els costats més a prop és igual a l'altura del paral·lelogram sobre el costat  $\overline{AD}$ . Siga  $\overline{BK}$  altura del paral·lelogram.

L'àrea del paral·lelogram és:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BK} = \overline{AB} \cdot \overline{CH}.$$

$$16 \cdot \overline{BK} = 6 \cdot 8.$$

$$\overline{BK} = \frac{48}{16} = 3\text{cm}.$$

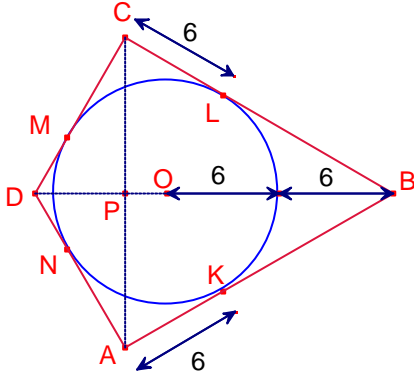
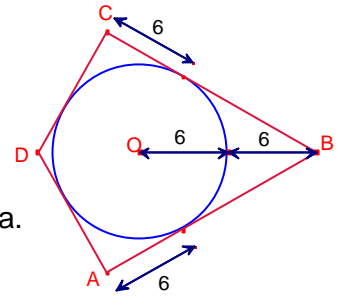
3.- En el següent quadrilàter ABCD calculeu la mesura de les diagonals  $\overline{AC}, \overline{BD}$ .

García Ardura 85

Solució:

El quadrilàter ABCD està circumscrit a la circumferència de radi 3.

Siguen K, L, M, N els punts de tangència del quadrilàter i la circumferència.



$$\overline{AN} = \overline{AK} = 6, \quad \overline{CL} = \overline{CM} = 6.$$

$$\overline{BK} = \overline{BL}, \quad \overline{DN} = \overline{DM}.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{AB} = \overline{BC}, \quad \overline{CD} = \overline{AD}.$$

Els triangles  $\triangle BCD$ ,  $\triangle BDA$  són iguals i simètrics respecte del costat  $\overline{BD}$ .

Per tant, les diagonals del quadrilàter són perpendiculars.

Siga P la intersecció de les diagonals.

Considerem el triangle rectangle  $\triangle OLB$ ,  $\angle L = 90^\circ$ .  $\overline{OL} = 6$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{BL} = 6\sqrt{3}.$$

$$\overline{BC} = 6(1 + \sqrt{3}).$$

Els triangles  $\triangle OLB$ ,  $\triangle CPB$ , són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CP} = \frac{1}{2} \overline{CB} = 3(1 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Aleshores, } \overline{AC} = 2 \cdot \overline{CP} = 6(1 + \sqrt{3})$$

Notem que  $\overline{OL} = \overline{LC} = \overline{CM} = \overline{OM} = 6$ ,  $\angle OLC = 90^\circ$ .

Aleshores, OLCM és un quadrat,  $\angle BCD = 90^\circ$ .

Els triangles  $\triangle OLB$ ,  $\triangle DCB$ , són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BD}}{6(1 + \sqrt{3})} = \frac{12}{6\sqrt{3}}, \text{ aleshores, } \overline{BD} = 4(3 + \sqrt{3}).$$

4.- Siga el rombe ABCD tal que l'angle A és agut.

L'altura traçada des de D divideix el costat  $\overline{AB}$  en dos segments que mesuren x, y.

Calculeu la mesura de les diagonals del rombe.

Gúsiev 62.

Solució:

Siga  $\overline{DH}$  altura del triangle i  $x = \overline{AH}$ ,  $y = \overline{BH}$ .

Siga M la intersecció de les diagonals.

Els triangles rectangles  $\triangle AMB$ ,  $\triangle DHB$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{2 \cdot \overline{BM}} = \frac{\overline{BM}}{x+y}, \text{ aleshores, } \overline{BM}^2 = \frac{y(x+y)}{2}.$$

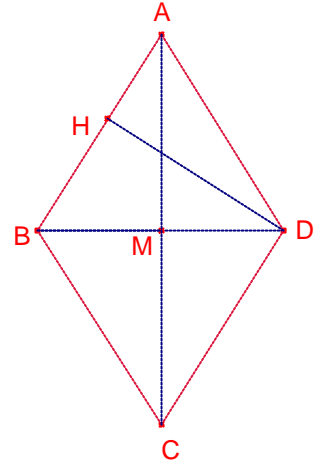
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMB$ :

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BM}^2 = (x+y)^2 - \frac{y(x+y)}{2} = \frac{(x+y)(2x+y)}{2}.$$

Aleshores les diagonals mesuren:

$$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{BM} = 2 \sqrt{\frac{y(x+y)}{2}} = \sqrt{2y(x+y)}.$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AM} = 2 \sqrt{\frac{(x+y)(2x+y)}{2}} = \sqrt{2(x+y)(2x+y)}.$$



5.- En un quadrat de 6m de costat s'inscriu un rectangle de 8m de diagonal, amb la condició que un dels costats siga paral·lel a una diagonal. Calculeu la seua àrea.  
Garcia Ardura 628.

Solució:

Siga el quadrat ABCD,  $\overline{AB} = 6$ .

Siga el rectangle PQRS, tal que  $\overline{PQ}$  és paral·lel a  $\overline{BD}$ ,  $\overline{PR} = 8$ .

Siga  $x = \overline{DS} = \overline{DP}$ , aleshores,  $\overline{SC} = \overline{CR} = 6 - x$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles  $\triangle PDS$ ,  $\triangle SCR$ :

$$\overline{PS} = x\sqrt{2}, \quad \overline{SR} = (6 - x)\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle PSR$ :

$$8^2 = (x\sqrt{2})^2 + ((6 - x)\sqrt{2})^2.$$

$$x^2 - 6x + 2 = 0.$$

Resolent l'equació:

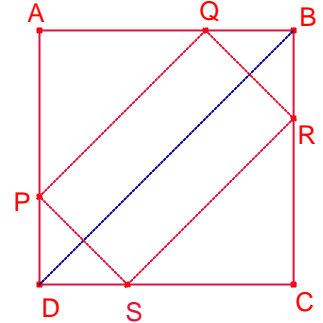
$$x = 3 + \sqrt{7}, \quad x = 3 - \sqrt{7}.$$

Aleshores, l'àrea del rectangle PQRS és:

$$S_{PQRS} = \overline{PS} \cdot \overline{SR} = x\sqrt{2} \cdot (6 - x)\sqrt{2} = 2(6x - x^2).$$

Substituint en les dues solucions de x:

$$S_{PQRS} = 2.$$



6.- Calculeu l'àrea d'un rectangle de 25m de diagonal, sabent que és semblant a un altre de costats 8m i 6m.

García Ardura 631.

Solució:

Siga ABCD el rectangle de diagonal  $\overline{AC} = 25$

Siga el rectangle APQR semblant a l'anterior tal que  $\overline{AP} = 8$ ,  
 $\overline{AR} = 6$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle APQ$ :

$$\overline{AQ} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

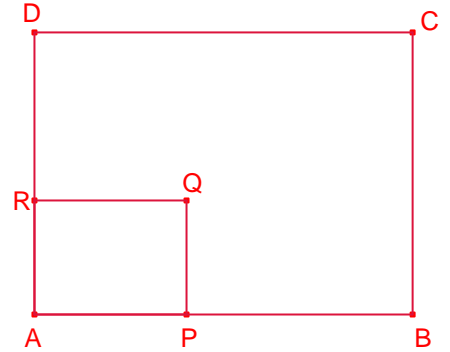
L'àrea del rectangle APQR és:

$$S_{APQR} = 8 \cdot 6 = 48\text{m}^2.$$

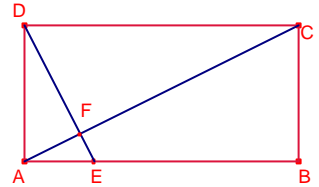
Les àrees de dues figures semblants són proporcionals al quadrat de la raó de semblança, aleshores:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{APQR}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}\right)^2 = \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Aleshores, } S_{ABCD} = \frac{25}{4} S_{APQR} = \frac{25}{4} 48 = 300\text{m}^2.$$



7.- Calculeu l'àrea del rectangle ABCD de la figura, essent la base el doble que l'altura i el punt E correspon a la quarta part del costat  $\overline{AB}$  si  $\overline{DF} = 6\text{m}$ .  
García Ardura 630.



Solució:

Siga  $x = \overline{AD}$ , aleshores,  $\overline{AB} = 2x$ ,  $\overline{AE} = \frac{x}{2}$ .

L'àrea del rectangle ABCD és,  $S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2x \cdot x = 2x^2$ .

Els triangles rectangles  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DAE$  són semblants ja que  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle DAE$ :

$$\overline{DE} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Siga  $\alpha = \angle BAC$ , aleshores,  $\angle ADE = \alpha$ ,  $\angle AED = 90^\circ - \alpha$ .

Aleshores,  $\angle AFE = 90^\circ$ .

Aleshores,  $\triangle AFD$  és un triangle rectangle i semblant al triangle  $\triangle DAE$ .

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}.$$

$$\frac{6}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}x}.$$

Resolent l'equació:

$$x = 3\sqrt{5}.$$

Aleshores l'àrea del rectangle ABCD és:

$$S_{ABCD} = 2x^2 = 2(3\sqrt{5})^2 = 90\text{m}^2$$

8.- Sobre els costats d'un hexàgon regular i exteriorment es construeixen 6 quadrats com els de la figura. Els vèrtexs exteriors formen un polígon regular?. Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon regular i el dodecàgon.

Solució:

Siga  $a = \overline{AB}$  el costat de l'hexàgon regular.  
L'angle interior d'un hexàgon regular mesura  $120^\circ$ .  
Aleshores,  $\angle PAQ = 360^\circ - (120^\circ + 2 \cdot 90^\circ) = 60^\circ$ .

Aleshores, el triangle  $\triangle APQ$  és equilàter.

Per tant,  $\overline{PQ} = \overline{AQ} = \overline{AP} = a$ .

$\overline{QR} = \overline{AB} = a$ .

El dodecàgon exterior té els costats iguals.

També té els angles iguals,  $\angle PQR = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ .

Aleshores, és un dodecàgon regular de costat  $a$ .

L'àrea de l'hexàgon regular és 6 vegades l'àrea del triangle equilàter  $\triangle OAB$  de costat  $a$ .

Aleshores,  $S_{\text{hexàgon}} = 6 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ .

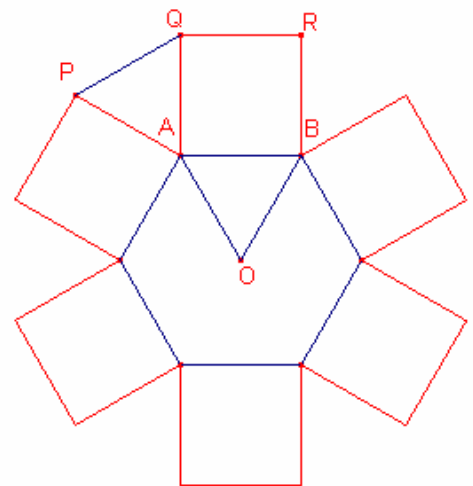
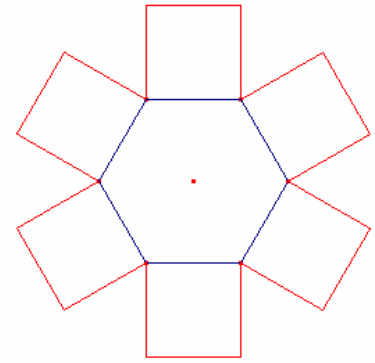
L'àrea del dodecàgon regular és igual a 12 vegades

l'àrea del triangle equilàter  $\triangle OAB$  de costat  $a$ , més l'àrea de 6 quadrats de costat  $a$ .

Aleshores,  $S_{\text{dodecàgon}} = 12 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 6a^2 = (6 + 3\sqrt{3})a^2$ .

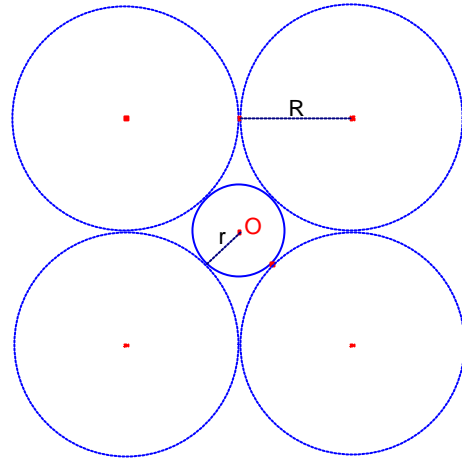
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{\text{hexàgon}}}{S_{\text{dodecàgon}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}{(6 + 3\sqrt{3})a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2(6 + 3\sqrt{3})} = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{2}$$

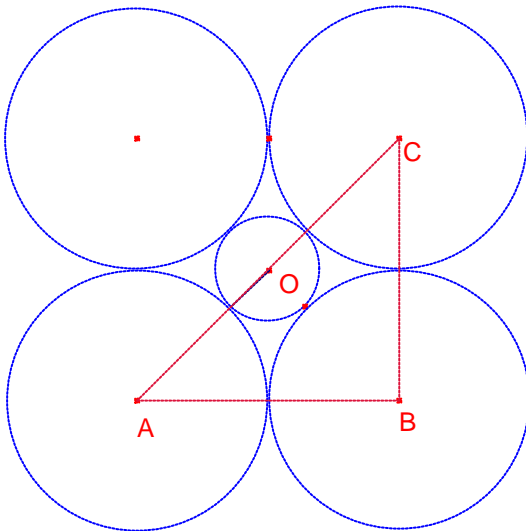




9.- En una circumferència de radi  $r$ , volem construir externament 4 circumferències d'igual radi  $R$  i tangents dos a dos i tangents a la primera (veure figura). Calculeu la raó entre  $R$  i  $r$ .



Solució:



Els centres de les 4 circumferències tangents exteriors formen un quadrat. Siguen A, B, C els centres de 3 circumferències exteriors.

Considerem el triangle rectangle  $\triangle ABC$ .

Notem que  $\overline{AB} = \overline{BC} = 2R$ ,  $\overline{AC} = 2R + 2r$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ABC$ :

$$(2R + 2r)^2 = (2R)^2 + (2R)^2.$$

$$4R^2 + 8Rr + 4r^2 = 4R^2 + 4R^2. \text{ Simplificant:}$$

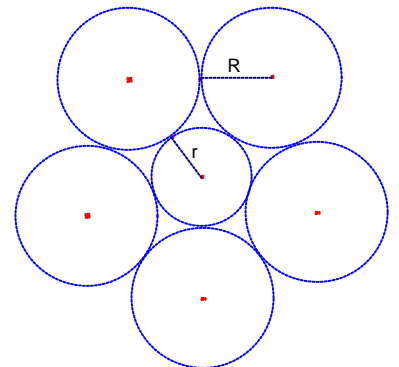
$$R^2 - 2Rr - r^2 = 0. \text{ Dividint la igualtat per } r^2:$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) - 1 = 0. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } \frac{R}{r}:$$

$$\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}.$$

Problema:

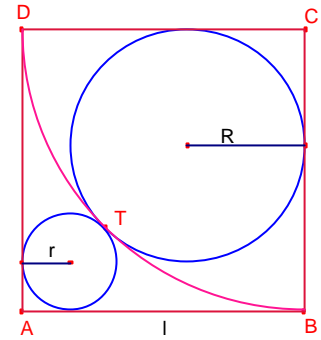
En una circumferència de radi  $r$ , volem construir externament 5 circumferències d'igual radi  $R$  i tangents dos a dos i tangents a la primera (veure figura). Calculeu la raó entre  $R$  i  $r$ .



Solució:

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\cos 54^\circ} - 1 = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} - 1.$$

10.- Siga el quadrat ABCD de costat l. Siga l'arc BTD de centre C. S'han dibuixat dues circumferències tangents de radis R, r entre elles, tangents a l'arc i cadascuna tangent a dos costats del quadrat (veure figura).  
Calculeu el valor dels radis R i r en funció del costat l del quadrat i la proporció entre R i r.



Solució:

Siguen L, M els centres de les dues circumferències tangents.

La recta paral·lela al costat  $\overline{AB}$  que passa per M i la recta paral·lela al costat  $\overline{AD}$  que passa per L s'intersequen en el punt N.

La recta paral·lela al costat  $\overline{AB}$  que passa per L talla el costat  $\overline{BC}$  en el punt K.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CKL$ :

$$\overline{CL} = R\sqrt{2}.$$

$$\overline{CT} = l$$

$$\overline{LT} = R.$$

$$\text{Aleshores, } l = R + R\sqrt{2}.$$

$$\text{Aleshores, } R = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}l = (\sqrt{2} - 1)l.$$

$$\overline{LN} = \overline{MN} = l - (R + r).$$

$$\overline{LM} = R + r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle LMN$ :

$$(R + r)^2 = 2(l - (R + r))^2.$$

$$R + r = \sqrt{2}(l - (R + r))$$

$$R + r = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}l = (2 - \sqrt{2})l.$$

$$\text{Aleshores, } r = (2 - \sqrt{2})l - R = (3 - 2\sqrt{2})l.$$

Calculem la proporció entre R i r:

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

