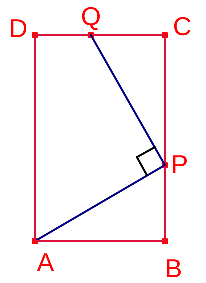
# Problemes de Geometria per a l'ESO 10

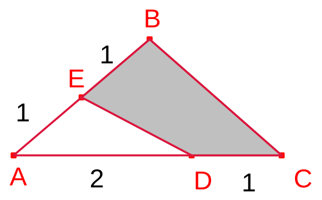
91.- En un rectangle ABCD siga P un punt sobre $\overline{BC}$ i Q un punt sobre $\overline{DC}$ tal que $\overline{BP}=1$, $\overline{AP}=\overline{PQ}=2$ i l'angle $\angle APQ=90^{o}$. Determineu la mesura de $\overline{QD}$
*Crux Mathematicorum M383.*

Solució:
$\overline{BP}=1$, $\overline{AP}=2$, $\angle ABC=90^{o}$, aleshores:
$\angle APB=60^{o}$, $\overline{AB}=\sqrt{3}$.
$\angle QPC=30^{o}$.
Com $\overline{PQ}=2$, $\angle PCQ=90^{o}$. Aleshores $\overline{CQ}=1$.



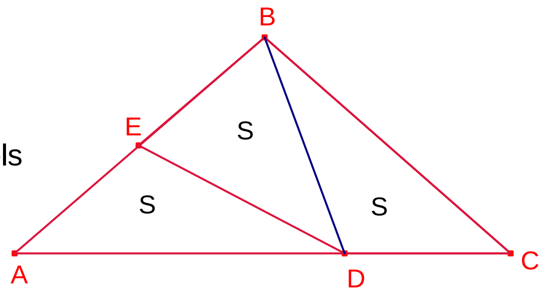

$\overline{QD}=\overline{AB}-\overline{CQ}=\sqrt{3}-1$.

92.- En la figura, el punt E està sobre el costat $\overline{AB}$ i D sobre el costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AE}=\overline{EB}=\overline{DC}=1$ i $\overline{AD}=2$. Determineu la raó entre l'àrea del quadrilàter BCDE i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
*Crux Mathematicorum 384*




Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les seues àrees són proporcionals a les bases.

Siga $S$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$.




Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{BDE}$ tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{AE},\overline{EB}$, respectivament i les seues bases són iguals. Aleshores, l'àrea de $\overset{\Delta}{BDE}$ és S.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADB}$, $\overset{\Delta}{DCB}$ tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{AD},\overline{DC}$, respectivament Les àrees són proporcionals a les bases.

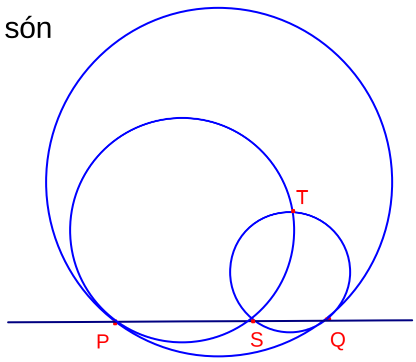
$$\frac{S_{DCB}}{S_{ADB}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}=\frac{1}{2}.$$

Aleshores l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DCB}$ és S.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 3S.
L'àrea del quadrilàter BCDE és 2S.

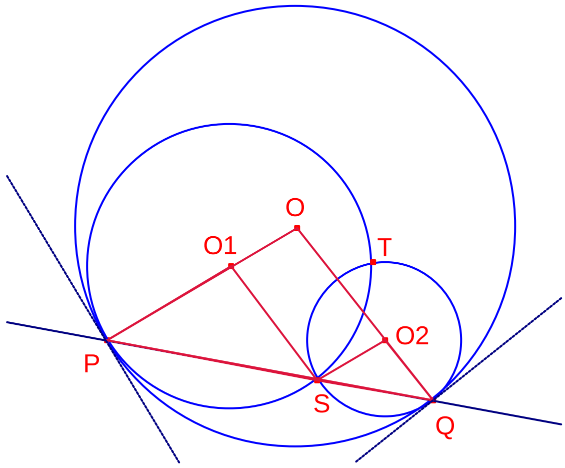
La proporció entre l'àrea del quadrilàter BCDE i la del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\frac{2}{3}$.

93.- En la figura següent, els cercles menuts tenen radis a, b i són tangents al cercle gran de radi r en els punts P i Q. Les circumferències menudes s'intersecten en S i T.
Proveu que si P, S, Q estan alineats aleshores, $r = a + b$
*Crux Mathematicorum M393.*




Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi r.
Siga $O_1$ el centre de la circumferència de radi a
Siga $O_2$ el centre de la circumferència de radi b.
Siga $x = \overline{PS}$, $y = \overline{SQ}$.

El triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és isòsceles.
Per ser las circumferències tangents $O_1$ pertany al segment $\overline{OP}$.
Per ser las circumferències tangents $O_2$ pertany al segment $\overline{OQ}$.




Els triangles $\overset{\Delta}{OPQ}$, $\overset{\Delta}{O_1PS}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{x} = \frac{r}{x+y} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{OPQ}$, $\overset{\Delta}{O_2SQ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{y} = \frac{r}{x+y} \qquad (2)$$

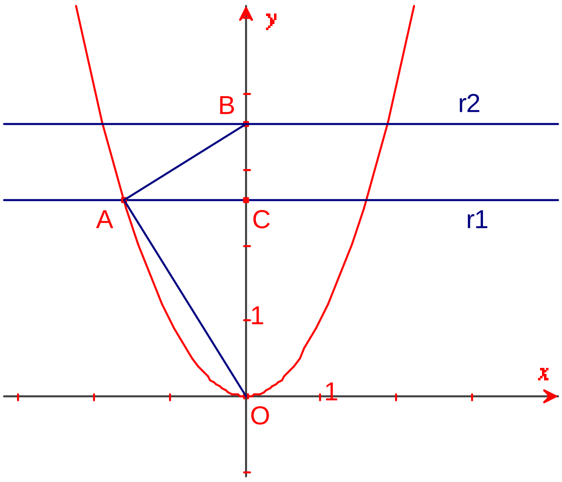
De (1) i (2)

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{r}{x+y}$, per tant, $\frac{a+b}{x+y} = \frac{r}{x+y}$.

Aleshores, $a + b = r$

94.- Dibuixem la gràfica de la paràbola $y = x^2$ en el plànol cartesià. Dues rectes $r_1, r_2$ són paral·leles a l'eix d'abscisses; la distància entre elles és 1 i $r_1$ està més propera a l'eix d'abscisses que $r_2$. Siga A un dels punts d'intersecció de la recta $r_1$ i la paràbola i B el punt d'intersecció de la recta $r_2$ i l'eix d'ordenades i O l'origen de coordenades. Calculeu la mesura de l'angle $\angle OAB$.
*Olimpíada de Bielorússia 2009. 12-13 anys d'edat.*

Solució:




Siga a la distància de la recta $r_1$ a l'eix d'abscisses.
Siga C la intersecció de la recta $r_1$ i l'eix d'ordenades.

Les coordenades de A són:
$A\left(-\sqrt{a}, a\right)$.

$\overline{AC} = \sqrt{a}$.

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACO}$:
$\overline{OA} = \sqrt{a^2 + a}$

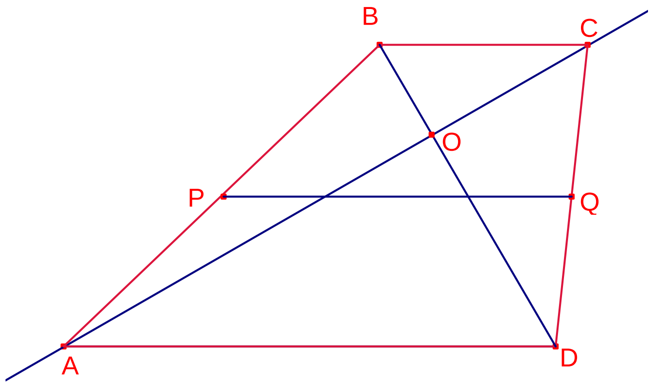
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB}$:
$\overline{AB} = \sqrt{a + 1}$.

$\overline{OB} = a + 1$

Notem que $\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OA}^2$, aleshores, aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OAB}$, $\angle OAB = 90^o$.

95.- Siga el trapezi ABCD amb $\overline{BC}$ paral·lel a $\overline{AD}$ i l'angle $\angle CAD = 30^o$. La longitud de la diagonal $\overline{BD}$ mesura la paral·lela mitjana del trapezi. Determineu la mesura de l'angle que formen les diagonals
*Olimpíada de Bielorússia 2009. 12-13 anys d'edat.*

Solució:




Siga $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$.
Siga O el punt intersecció de les diagonals.

Siga $x = \overline{OB}$.

Siga $\overline{PQ} = \frac{a+b}{2}$ paral·lela mitjana del trapezi.

Per hipòtesi $\overline{BD} = \overline{PQ} = \frac{a+b}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADO}$, $\overset{\Delta}{CBO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\frac{a+b}{2} - x} = \frac{b}{a}.$$

Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{b}{2}.$$

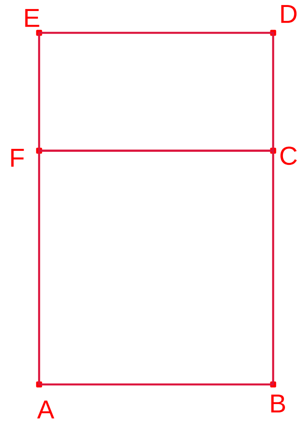
Siga $\alpha = \angle BOC$. $\angle OCB = \angle BAC = 30^o$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{2}}{\sin 30^o}.$$

Aleshores, $\alpha = 90^o$.
Per tant, les diagonals són perpendiculars.

96.- En la següent figura ABCF és un quadrat i CDEF un rectangle.
Si l'àrea de tota la figura és $216\text{cm}^2$ i el perímetre del rectangle CDEF és tres vegades el costat $\overline{AB}$. Calculeu l'àrea del rectangle CDEF.
*Olimpíada Ñandú Argentina 2009.*

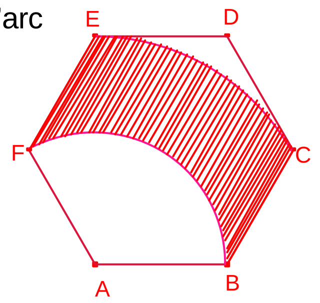



Solució:
Siga $x = \overline{AB}$
Com que el perímetre del rectangle CDEF és 3 vegades $\overline{AB}$:
$2x + 2\cdot\overline{CD} = 3x$.
Aleshores, $\overline{CD} = \frac{x}{2}$.

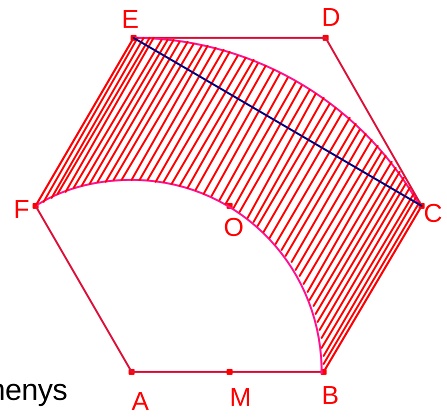
Com que l'àrea del rectangle ABDE és $216\text{cm}^2$:
$x\left(x + \frac{x}{2}\right) = 216$.
Resolent l'equació: $x = \overline{AB} = 12\text{cm}$.
Aleshores, $\overline{CD} = \frac{x}{2} = 6\text{cm}$.

L'àrea del rectangle CDEF és:
$S_{CDEF} = x\frac{x}{2} = 72\text{cm}^2$.

97.- Donat l'hexàgon regular ABCDEF de costat 12cm, dibuixem l'arc $\overset{\frown}{BF}$ de centre A i radi $\overline{AB}$ i l'arc $\overset{\frown}{CE}$ de centre A i radi $\overline{AC}$.
Calculeu l'àrea ombrejada.
*Olimpíada d'Argentina. Nyandú 2008, nivell 3.*




Solució:
L'apotema de l'hexàgon regular mesura:
$\overline{OM} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$.
$\overline{AE} = \overline{AC} = 2 \cdot \overline{OM} = 12\sqrt{3}$.
$\angle FAB = 120^o$, $\angle EAC = 60^o$.
L'àrea de l'hexàgon regular és:
$$S_{ABCDEF} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3}.$$




L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$ és igual a la meitat de l'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF:
$S_{ACE} = 108\sqrt{3}$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del pentàgon ABCEF menys l'àrea del sector FAB més l'àrea del segment circular $\overset{\frown}{CE}$.

L'àrea del pentàgon ABCEF és $\frac{5}{6}$ l'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF.
$$S_{ABDEF} = \frac{5}{6} 216\sqrt{3} = 180\sqrt{3}.$$

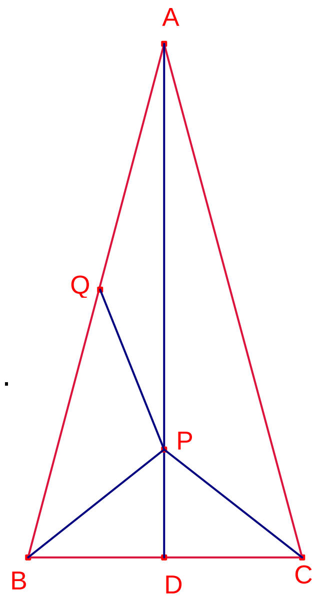
L'àrea del sector FAB és la tercera part de l'àrea del cercle de radi $\overline{AB}$:
$$S_{sec\,torFAB} = \frac{1}{3}\left(\pi \cdot 12^2\right) = 48\pi.$$

L'àrea del sector EAC és la sisena part de l'àrea del cercle de radi $\overline{AE}$.
$$S_{sec\,torEAC} = \frac{1}{6}\left(\pi\left(12\sqrt{3}\right)^2\right) = 72\pi.$$

L'àrea del segment circular EAC és igual a l'àrea del sector EAC menys l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$:
$S_{segmentEAC} = 72\pi - 108\sqrt{3}$.

L'àrea ombrejada és:
$$S = 180\sqrt{3} - 48\pi + \left(72\pi - 108\sqrt{3}\right) = 72\sqrt{3} + 24\pi \approx 200.11 cm^2.$$

98.- En un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $A = 30^o$.
Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga P un punt del segment $\overline{AD}$ i un punt Q del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{BP} = \overline{PQ}$. Calculeu la mesura de l'angle $\angle PQC$.
*Olimpíada d'Argentina 2007. nivell 1*




Solució:
$B = C = 75^o$.
$\overline{AD}$ és la mediatriu del costat $\overline{BC}$, aleshores, $\overline{BP} = \overline{CP}$.
Siga $\alpha = \angle PBC$.
Aleshores, $\angle BCP = \alpha$, $\angle BPC = 180^o - 2\alpha$.

$\angle PBC = \angle PQB = 75^o - \alpha$. Aleshores, $\angle BPQ = 30^o + 2\alpha$

$\angle QPC = 360^o - (\angle BPC + \angle BPQ) = 360^o - (+180^o - 2\alpha + 30^o + 2\alpha) = 150^o$.

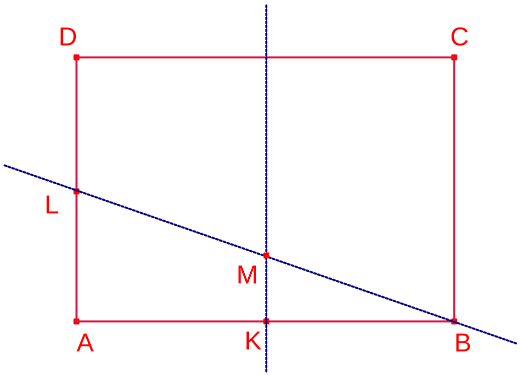
Aleshores, $\angle PQC = \dfrac{180^o - 150^o}{2} = 15^o$.

99.- Siga el rectangle ABCD $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=7$. Siga K el punt mig del costat $\overline{AB}$ i L el punt mig del costat $\overline{AD}$. La recta paral·lela al costat $\overline{BC}$ que passa per K talla la recta BL en el punt M. Determineu la mesura del segment $\overline{CM}$.
*Olimpíada d'Argentina 2006. nivell 2*

Solució:

$\overline{AL}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{7}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAL}$, $\overset{\Delta}{BKM}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{\overline{AB}}{\overline{KB}}=2$.




Aleshores, $\overline{MK}=\frac{1}{2}\overline{AL}=\frac{7}{4}$.

La recta KM talla el costat $\overline{CD}$ en el punt J.

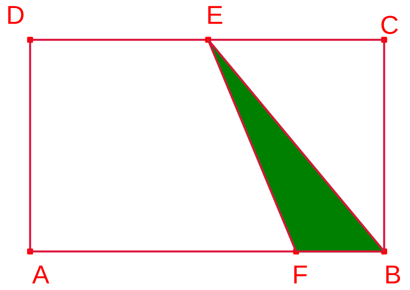
$\overline{MJ}=\overline{BC}-\overline{MK}=7-\frac{7}{4}=\frac{21}{4}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MJC}$:

$\overline{MC}=\sqrt{\overline{MJ}^2+\overline{JC}^2}=\sqrt{\left(\frac{21}{4}\right)^2+5^2}=\frac{29}{4}$.

100.- L'àrea del rectangle ABCD és $80cm^2$ Siga un punt F del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AF}=3\cdot FB$.

Siga E el punt mig del costat $\overline{CD}$. Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FBE}$.
*Olimpíada d'Argentina Nyandú 2008. regional, nivell 1.*




Solució.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}80=40.$$

$$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=4\cdot\overline{FB}.$$
$$\frac{\overline{FB}}{\overline{AB}}=\frac{1}{4}.$$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FBE}$ tenen la mateixa altura sobre les base $\overline{AB},\overline{FB}$, respectivament.
Aleshores les seues àrees són proporcionals a les bases.

$$\frac{S_{FBE}}{S_{ABC}}=\frac{\overline{FB}}{\overline{AB}}=\frac{1}{4}.$$

Per tant, $S_{FBE}=\frac{1}{4}S_{ABC}=10cm^2$.

Nota: No importa que el punt E siga el punt mig del costat $\overline{CD}$, és suficient que el punt E estiga en la recta CD i la seua àrea seria la mateixa.