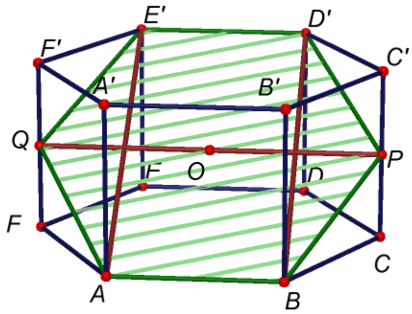
Problemes de Geometria per a l'ESO 100

991.- En un prisma hexagonal regular les cares laterals són quadrats els costats dels quals és a. Construïm la secció que passa per una aresta de la base inferior i per l'aresta oposada de la base superior.
Determineu l'àrea i el perímetre de la secció.
Gúsiev problema 728.



Solució
Siga el prisma regular ABCDEFA'B'C'D'E'F'.
Com que les cares laterals són quadrats de costat a, totes les arestes del prisma són iguals a $\overline{AB} = \overline{AA'} = a$.
La secció passa pel centre del prisma regular.
La paral·lela mitjana del rectangle ABD'E' passa pel centre del prisma i talla les arestes $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ els punts migs P, Q, respectivament.
La secció formada és l'hexàgon ABPD'E'Q.
$\overline{PQ} = 2a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = a\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDD'}$:
$\overline{BD'} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2} = 2a$.
L'àrea de la secció ABPD'E'Q és igual al doble de l'àrea del trapezi isòsceles ABPQ de bases a, 2a i altura $\frac{1}{2}\overline{BD'}$:

$$S_{ABPD'E'Q} = 2\left(\frac{a+2a}{2}\right)\frac{2a}{2} = 3a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$:

$$\overline{BP} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

El perímetre de la secció és:

$$P_{ABPD'E'Q} = 2\cdot\overline{AB} + 4\cdot\overline{BP} = 2a + 2\sqrt{5}a = \left(2+2\sqrt{5}\right)a.$$

992.- Siga ABCS un tetraedre regular.

Calculeu l'angle que formen l'aresta $\overline{AB}$ i la cara $\overset{\Delta}{ACS}$.
Gúsiev, problema 637.

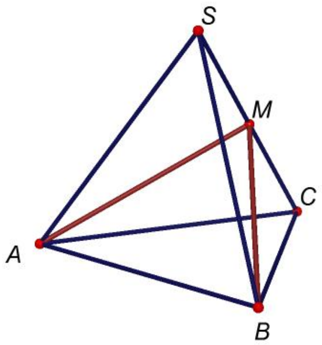
Solució:

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{CS}$.

La projecció de aresta $\overline{AB}$ sobre $\overset{\Delta}{ACS}$ pertany a la recta AM.
L'angle que cerquem és $\alpha = \angle MAB$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + a^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot \cos\alpha .$$

Simplificant:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

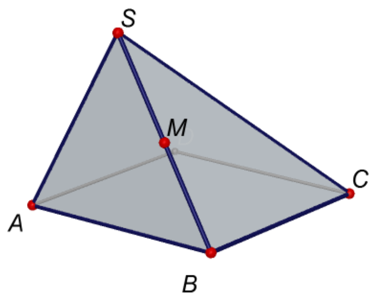
$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54º44'8''.$$

993.- La base de la piràmide ABCDS és el quadrat ABCD.

La cara $\overset{\Delta}{ABS}$ és perpendicular al plànol de la base i és un triangle equilàter.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.

Determineu l'angle de la recta CM i el plànol de la base.

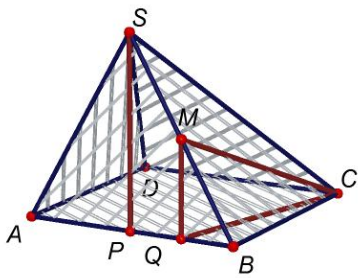


Solució:

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APS}$:

$$\overline{PS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



Siga Q la projecció de M sobre el plànol de la base.

Q pertany a l'aresta $\overline{AB}$.

L'angle que forma la recta CM i el plànol de la base és l'angle $\alpha = \angle MCQ$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BPS}$, $\overset{\Delta}{BQM}$ sóns semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{BP} = \frac{1}{4}a. \quad \overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{PS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQC}$:

$$\overline{QC} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQM}$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{17}}{4}} = \frac{\sqrt{51}}{17}.$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{51}}{17} \approx 22^{\circ}47'11''.$$

994.- En el tetraedre regular ABCS, per la mitjana $\overline{AD}$ de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ i K el punt mig de l'aresta $\overline{SB}$, s'ha dibuixat un plànol. Determineu l'angle d'aquest plànol i la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

Gúsiev problema 700.

Solució:

Siga el tetraedre ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.

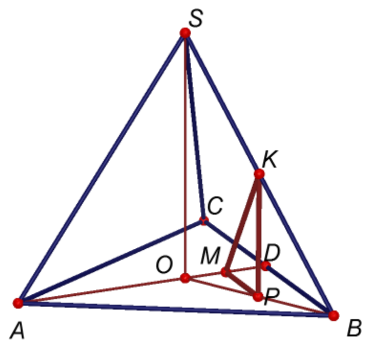
$\overline{KD} = \frac{1}{2}\overline{CS} = \frac{1}{2}a$.

Siga O la projecció de S sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ (circumcentre del triangle).

$\overline{OS} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.



Siga P la projecció de K sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Siga M la projecció de K sobre $\overline{AD}$.

L'angle que forma el plànol ADK i la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\alpha = \angle KMP$.

Siga $x = \overline{AM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMK}$, $\overset{\Delta}{DMK}$:

$\overline{KM}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - x^2$, $\overline{KM}^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2$.

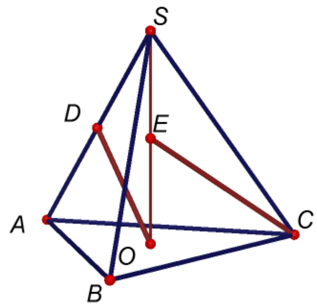
Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{12}a \\ \overline{KM} = \frac{\sqrt{33}}{12}a \end{cases}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMP}$:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{33}}{12}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}. \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{22}}{11}\right) \approx 58^{o}31'4''.$$

995.- Siga D el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$ del tetraedre regular ABCS.
Siga E el punt mig de l'altura $\overline{OS}$.
Determineu l'angle de les rectes CE i DO.
Gúsiev, problema 654.



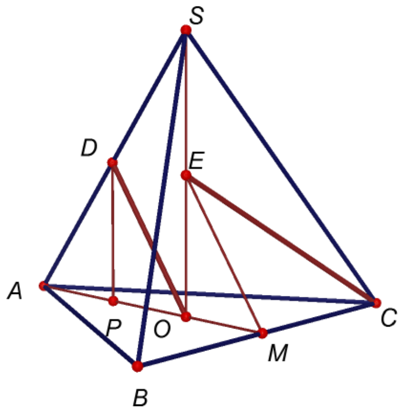
Solució:
Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{BMA}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

O és el baricentre de la base. Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a. \quad \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

Siga P la projecció de D sobre la base.

$$\overline{AP} = \overline{OP} = \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{OPD}$, $\overset{\Delta}{MOE}$. A més a més $\overline{PD}$, $\overline{OE}$ són paral·lels.
Aleshores, $\overline{OD}$ i $\overline{ME}$ són paral·lels.
L'angle que formen les rectes CE i DO és $\alpha = \angle MEC$.
$\angle EMC = 90^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOE}$:

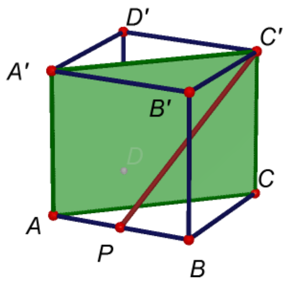
$$\overline{EM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = \frac{1}{2}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MEC}$:

$$tg\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{EM}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a} = 1.$$

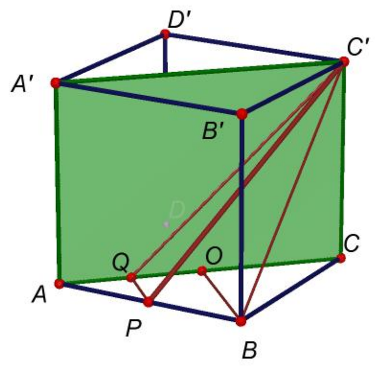
$$\alpha = 45^{o}.$$

996.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’.



Siga P el punt mig de l’aresta $\overline{AB}$.
Determineu l’angle que forma la recta C’P i la secció diagonal AA’C’C.
Gúsiev, problema 643.

Solució:



Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta $\overline{AB} = a$.
Siga O el centre de la cara ABCD.

$\overline{AC} = \overline{BC} = a\sqrt{2}$.

$$\overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Siga Q la projecció de P sobre l’aresta $\overline{AC}$.
L’angle que forma la recta C’P i el rectangle AA’C’C és $\alpha = \angle QC'P$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOB}$, $\overset{\Delta}{AQP}$ són semblants de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

$$\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCC'}$:

$$\overline{C'Q} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBC'}$:

$$\overline{PC'} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{3}{2}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQC'}$:

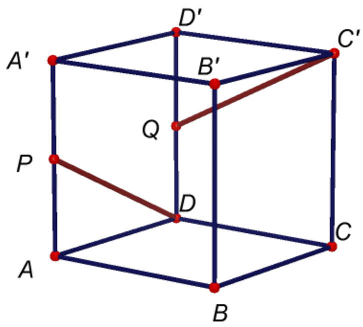
$$\cos\alpha = \frac{\overline{C'Q}}{\overline{PC'}} = \frac{\frac{\sqrt{34}}{4}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{\sqrt{34}}{6}. \quad \alpha = \frac{\overline{C'Q}}{\overline{PC'}} = \arccos\left(\frac{\sqrt{34}}{6}\right) \approx 13^{o}37'59''.$$

997.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’.

Siguen P i Q els punts migs de les arestes $\overline{AA'}$ i $\overline{DD'}$, respectivament.

Determineu els angles de les rectes PD, QC’.

Gúsiev problema 661.

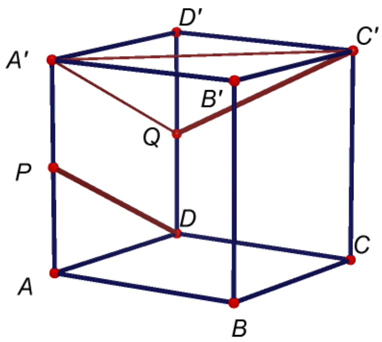


Solució:

Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta $\overline{AB}=a$.

Pel punt Q tracem una recta paral·lela a la recta PD que passa pel vèrtex A’.

L’angle que formen les rectes PD, QC’ és $\alpha=\angle A'QC'$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAP}$:

$$\overline{PD}=\overline{QC'}=\frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'D'C'}$:

$$\overline{A'C'}=a\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{A'QC'}$:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2-2\frac{\sqrt{5}}{2}a\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\cos\alpha.$$

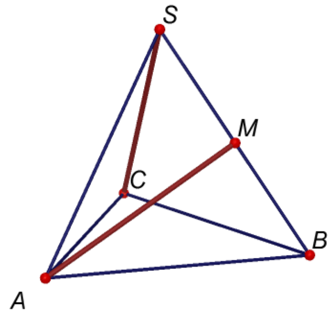
$$\cos\alpha=\frac{1}{5},\quad \alpha=\arccos\left(\frac{1}{5}\right)\approx 78º27'47''..$$

998.- Siga ABCD un tetraedre regular.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.

Calculeu l'angle de la mitjana $\overline{AM}$ i l'aresta $\overline{CS}$.

Gúsiev, problema 662.



Solució:

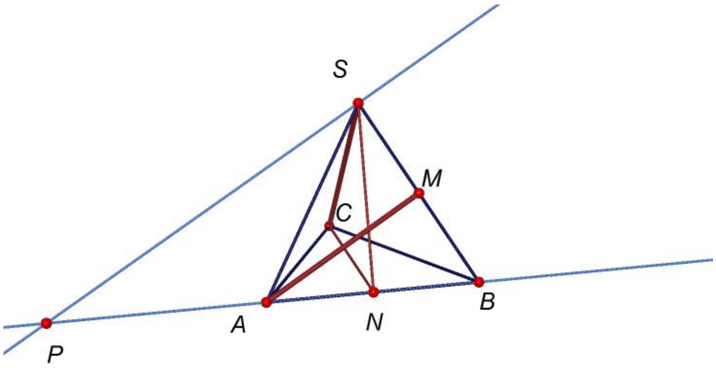
Sig el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.

Pel vèrtex S tracem una paral·lela a la mitjana $\overline{AM}$ que talla la recta AB en el punt P.

$\angle SPB = 30^o$, $\angle PSB = 90^o$.

$\overline{PB} = 2\overline{BS} = 2a$, $\overline{PS} = a\sqrt{3}$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{AM} = \overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overline{PN} = \frac{3}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNC}$:

$\overline{PC} = a\sqrt{3}$.

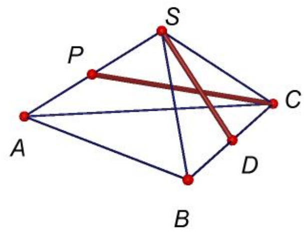
L'angle que formen les rectes AM, CS és $\alpha = \angle PSC$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PSC}$:

$\left(a\sqrt{3}\right)^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}a \cdot \cos\alpha$.

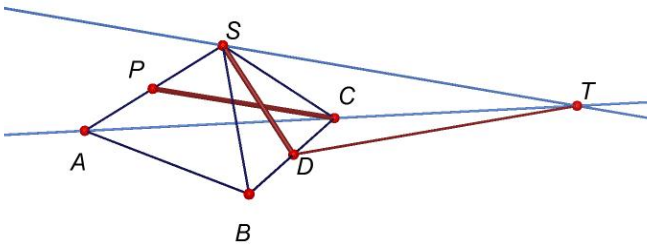
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73^o 13' 17''$.

999.- En la piràmide triangular regular ABCS tots els angles plans del vèrtex S són rectes.
Siguen P i D els punts migs de les arestes $\overline{AS}$ i $\overline{BC}$, respectivament. Determineu l'angle que formen les rectes CP i SD.
Gúsiev problema 663.



Solució:
Siga la piràmide regular ABCS d'àresta de la base $\overline{AB}=a$ amb els angles plans del vèrtex C rectes. Aleshores:

$$\overline{AS}=\overline{CS}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PSC}$:

$$\overline{PC}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Pel vèrtex S tracem la recta paral·lela al segment $\overline{PC}$ que talla la recta AC en el punt T.
L'angle que formen les rectes CP i SD és l'angle $\alpha=\angle DST$.
Els triangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{AST}$ són semblants de raó 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{ST}=2\overline{PC}=\frac{\sqrt{10}}{2}a.\ \overline{CT}=\overline{AC}=a.$$

$$\angle TCB=120^{o}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DCT}$:

$$\overline{DT}^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+a^2-2\frac{1}{2}a\cdot a\left(\frac{1}{2}\right).$$

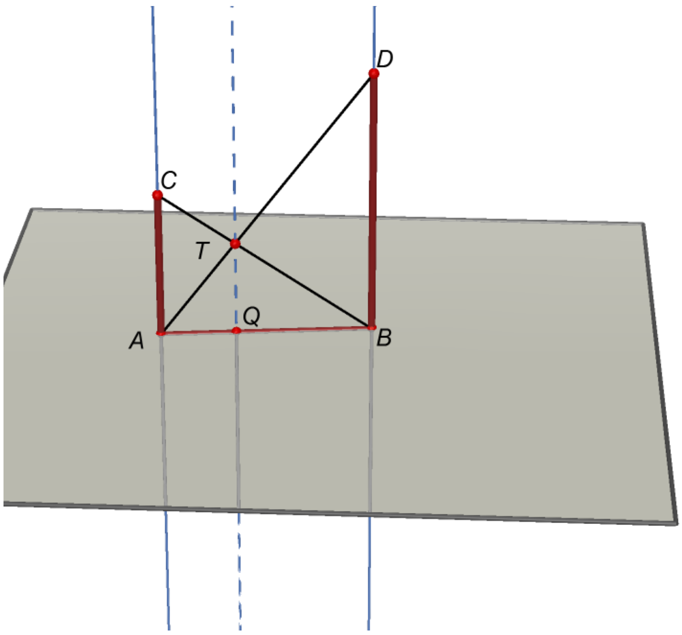
$$\overline{DT}=\frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DST}$:

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}a\right)^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}a\right)^2-2\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{10}}{2}a\cdot\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5},\quad \alpha=\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}\approx 50^{o}46'7''.$$

1000.- En els punts A i B del plànol Π s'eleven les perpendicular $\overline{AC} = a$ $\overline{BD} = b$, en el mateix costat del plànol.
Proveu que les rectes BC i AD s'intersecten en un punt T.
Calculeu la distància de T al del plànol Π.
Gúsiev, problema 678.



Solució:
Els punts A, B, D, C pertanyen al mateix plànol ja que les rectes AC, BD són paral·leles.
ABDC és un trapezi rectangle, la diagonal del trapezi pertany al plànol del trapezi.
Siga Q la projecció de T sobre el segment $\overline{AB}$.

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}D$, $A\overset{\Delta}{Q}T$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \qquad (1)$$

Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{A}C$, $B\overset{\Delta}{Q}T$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB} - \overline{AQ}} = \frac{a - \overline{PQ}}{\overline{AQ}} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$\frac{b}{a} = \frac{\overline{PQ}}{a - \overline{PQ}}$. Resolent l'equació:

$$\overline{PQ} = \frac{ab}{a+b}.$$