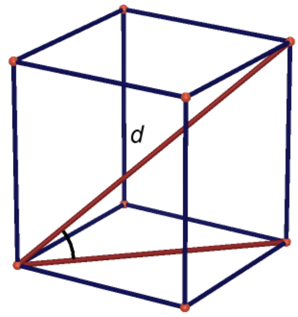
Problemes de Geometria per a l'ESO 101

1001.- En un prisma quadrangular regular la diagonal és igual a d.
La diagonal està inclinada respecte de la base sota un angle igual a α.
Determineu l'àrea lateral del prisma.



Solució:

Siga el prisma ABCDA'B'C'D', tal que $\overline{AC'} = d$, i l'angle que forma la diagonal i la base és $\angle C'AC = \alpha$.

Siga $a = \overline{AB}$ aresta de la base,

Siga $b = \overline{AA'}$ aresta lateral.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

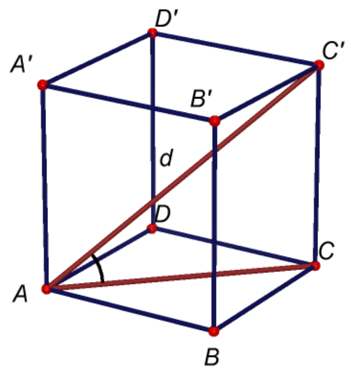
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Aplicant raons trigonmètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$a = d \cdot \sin\alpha$, $b = a\sqrt{2} \cdot d \cdot \cos\alpha$.

L'àrea lateral del prisma és:

$$S_L = 4ab = 4\frac{\sqrt{2}}{2}d^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sqrt{2}d^2 \cdot \sin 2\alpha.$$



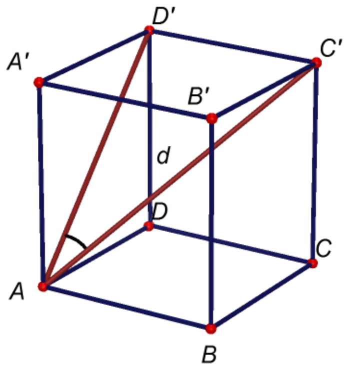
1002.- En un prisma quadrangular regular la diagonal és igual a d.
La diagonal està inclinada respecte de la cara lateral sota un angle igual a α.
Determineu l'àrea lateral del prisma.
Gúsiev, problema 763.

Solució:

Siga el prisma ABCDA'B'C'D', tal que $\overline{AC'} = d$, i l'angle que forma la diagonal i la cara lateral és $\angle C'AD' = \alpha$.

Siga $a = \overline{AB}$ aresta de la base,

Siga $b = \overline{AA'}$ aresta lateral.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $C'\overset{\Delta}{A}D'$:

$a = d \cdot \sin\alpha$, $\overline{AD'} = d \cdot \cos\alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{A'}D'$:

$a^2 + b^2 = d^2 \cos^2\alpha$.

$b^2 = d^2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$.

$b = d\sqrt{\cos 2\alpha}$.

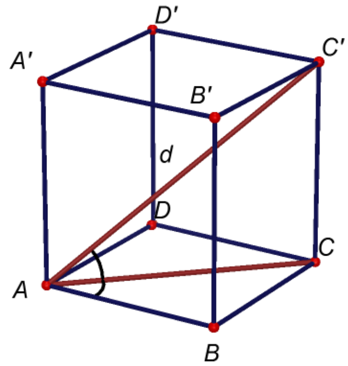
L'àrea lateral del prisma és:

$S_L = 4ab = 4d^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\cos 2\alpha}$.

1003.- Els angles que formen la diagonal d'una base d'un ortoedre amb el costat de la base i la diagonal són α, β, respectivament.

Si la diagonal de l'ortoedre és igual a d, calculeu l'àrea lateral de l'ortoedre.

Gúsiev, problema 764.



Solució:

Siga l'ortoedre ABCDA'B'C'D', tal que $\overline{AC'} = d$.

Siga $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$, $c = \overline{AA'}$.

Siga $\alpha = \angle CAB$ angle que forma la diagonal $\overline{AC}$ de la base i el costar $\overline{AB}$.

Siga $\alpha = \angle C'AC$ angle que forma la diagonal $\overline{AC}$ de la base i la diagonal $\overline{AC'}$.

Aplicant raons trigonmètriques al triangle rectangle $C'\overset{\Delta}{A}C'$:

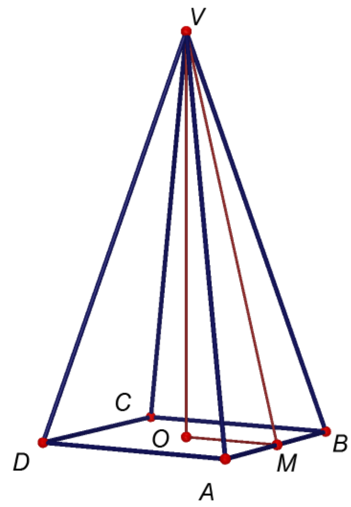
$c = d \cdot \sin\beta$, $\overline{AC} = d \cdot \cos\beta$.

Aplicant raons trigonmètriques al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{B}C$:

$a = d \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$, $b = d \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$

L'àrea lateral de l'ortoedre és:

$S_L = 4(a+b)c = 2d \cdot \cos\beta(\sin\alpha + \cos\alpha)d \cdot \sin\beta = d^2\sqrt{2}\sin 2\beta \cdot \cos(45º - \alpha)$.



1004.- Calculeu l'àrea total d'una piràmide regular quadrangular si la seua altura és h i l'àrea d'una cara lateral és igual a l'àrea de la base.
Gúsiev, problema 768.

Solució:
Siga la piràmide regular ABCDV de base el quadrat ABCD de costat $a = \overline{AB}$.
Siga O el centre de la base. $\overline{OV} = h$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

L'àrea d'una cara és igual a l'àrea de la base, aleshores:
$\frac{1}{2} a \cdot \overline{MV} = a^2$.
Aleshores, $\overline{MV} = 2a$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOV}$:
$\overline{OV}^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.
$(2a)^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:
$a^2 = \frac{4}{15} h^2$.
L'àrea total de la piràmide és igual a l'àrea del quadrat ABCD més quatre vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABV}$:
$S_T = a^2 + 4\left(\frac{1}{2} a \cdot 2a\right) = 5a^2 = 5\frac{4}{15} h^2 = \frac{4}{3} h^2$.

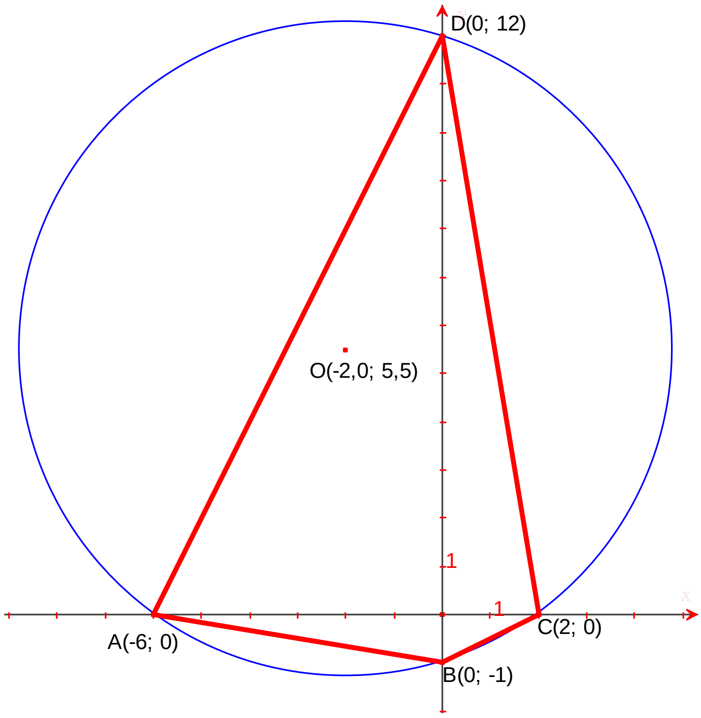
1005.- Determineu la corba $x^2+y^2+4x-11y-12=0$.
Calculeu l'àrea del quadrilàter format per la intersecció de la corba i els eixos coordenats.
Temes de Grau. Problema 1550.

Solució:
$x^2+y^2+4x-11y-12=0$. Completant quadrats:

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=12+2^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2.$$

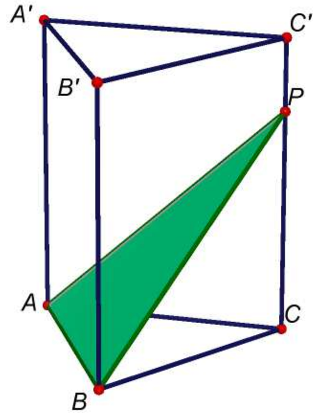
$$(x+2)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{185}}{2}\right)^2.$$

La corba és una circumferència de centre $O\left(-2,\frac{11}{2}\right)$ i radi $r=\frac{\sqrt{185}}{2}$.



Calculem els punts de tall de la corba i els eixos coordenats.
Punts de tall amb l'eix d'abscisses:
$y=0$, $x^2+4x-12=0$. Resolent l'equació $x=-6, 2$.
Els punts de tall són $A(-6,0)$, $C(2,0)$.
Punts de tall amb l'eix d'ordenades:
$x=0$, $y^2-11y-12=0$. Resolent l'equació $y=-1, 12$.
Els punts de tall són $B(0,-1)$, $D(0,12)$.
$\overline{AC}=8u$, $\overline{BD}=13u$.
Les diagonals del quadrilàter ABCD són perpendiculars.
Aleshores l'àrea del quadrilàter ABCD és:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}(8\cdot 13)=52u^2.$$



1006.- En un prisma triangular regular per una de les arestes de la base és dibuixa un plànol que amb la base forma un angle α. Determineu l'àrea de la secció triangular obtinguda si l'aresta de la base és a.

Gúsiev, problema 742.

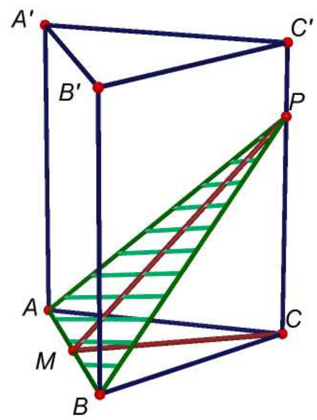
Solució:

Siga ABCA'B'C' el prisma triangular regular d'aresta de la base $\overline{AB} = a$.

Siga la secció que conté l'aresta $\overline{AB}$ i forma un angle α amb la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

La secció talla l'aresta $\overline{CC'}$ en el punt P.

Siga M el punt mig conté l'aresta $\overline{AB}$.



$\alpha = \angle PMC$.

$\overline{AM} = \frac{1}{2}a$, $\overline{AC} = a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMC}$:

$$\overline{MP} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}a.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{MP} = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}a = \frac{\sqrt{3}}{4\cos\alpha}a^2.$$

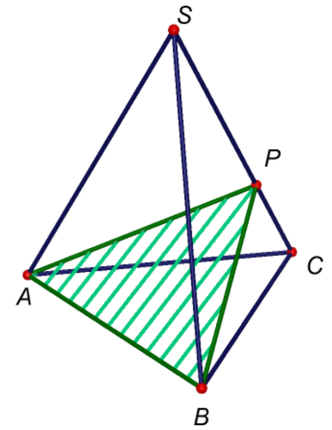
Hi ha secció triangular $\overset{\Delta}{ABP}$ si $\overline{CP} \le \overline{CC'}$.

$$\overline{CP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

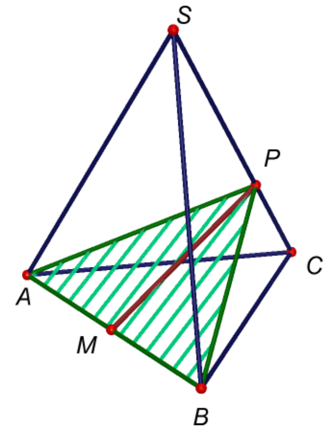
$$\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\operatorname{tg}\alpha \le \overline{CC'}.$$

$$a \le \frac{2\sqrt{3}}{3\operatorname{ctg}\alpha}\overline{CC'}.$$

1007.- En una piràmide triangular regular l'aresta de la base és a. L'angle entre l'aresta de la base i una aresta lateral és α. Construïm la secció de la piràmide formada pel plànol que passa per una aresta de la base i és perpendicular a l'aresta lateral oposada.
Calculeu la seua àrea.



Solució:
Siga la piràmide triangular regular ABCD de base el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = a$.
Siga $\angle SAC = \angle BCS = \alpha$.
Siga P el punt de l'aresta $\overline{CS}$, tal que la secció que conté l'aresta $\overline{AB}$ i és perpendicular a l'aresta $\overline{CS}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:
$\overline{AP} = \overline{BP} = a \cdot \sin\alpha$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMP}$:
$$\overline{PM} = \frac{a}{2}\sqrt{-1+4\sin^2\alpha}\,.$$
L'àrea de la secció és:
$$S = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PM} = \frac{1}{2}a\frac{a}{2}\sqrt{-1+4\sin^2\alpha} = \frac{a^2}{4}\sqrt{-1+4\sin^2\alpha}\,.$$

1008.- En un dodecaedre regular es pot inscriure un cub i un tetraedre regular (els vèrtexs del cub i del tetraedre són vèrtexs del dodecaedre).
Calculeu la proporció entre les arestes dels tres cossos.
Pere Puig Adam.

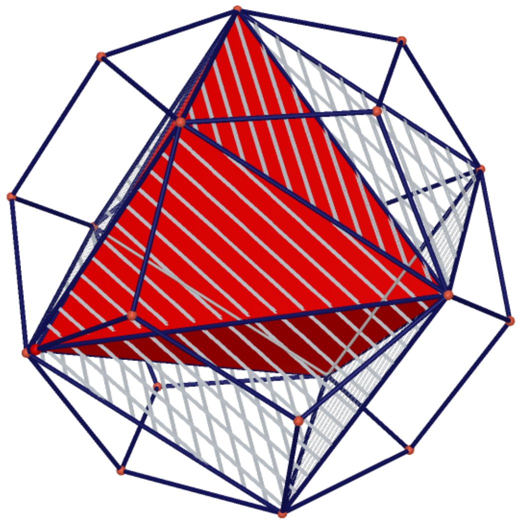
Solució:
Nota dins del cub també es pot inscriure el mateix tetraedre:
Siguen a, b, c les arestes del dodecaedre, cub i tetraedre regular, respectivament.
L'aresta del cub és la diagonal del pentàgon regular.

$$\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi .$$

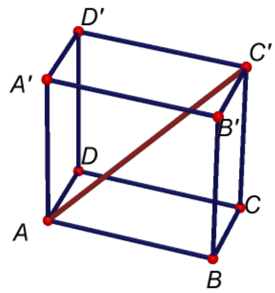
L'aresta del tetraedre és la diagonal del cub.

$$\frac{c}{b}=\sqrt{2} .$$

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} .$$



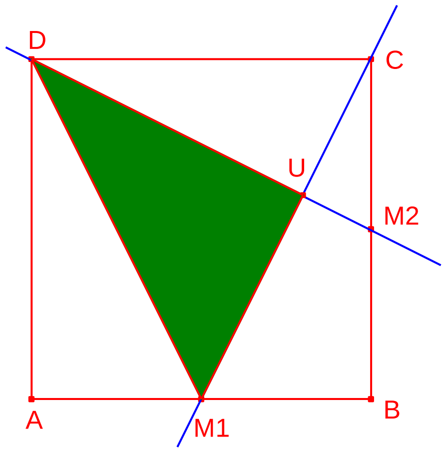
1009.- L'àrea total d'un ortoedre és 100cm^2.
Una de les arestes de la base és doble que l'altra i igual a l'altura.
Determineu la mesura de la diagonal de l'ortoedre.



Solució:
Siga ABCDA'B'C'D'' l'ortoedre tal que $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=\overline{AA'}=2a$.
L'àrea de l'ortoedre és:
$S=2(2a\cdot a)+6a2a=144$
$16a^2=144$. Resolent l'equació:
$a=3$.
La diagonal de l'ortoedre és:
$\overline{AC'}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AA'}^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2+(2a)^2}=3a=9\text{cm}$.

1010.- Donat el quadrat ABCD de costat $2\sqrt{5}$ considerem M_1 i M_2 els punts migs de $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. El segment DM_2 talla el segment $\overline{M_1C}$ en U.

Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{DUM_1}$ és 4, 3, 5.



Solució:
Farem una demostració general.
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle
$\overline{AM_1} = \frac{1}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAM_1}$:

$\overline{DM_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

$\angle CDM_2 = \angle BCM_1$, aleshores, $\angle CDU, \angle DCU$ són complementaris.

Per tant, $\angle DUC = 90^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{DUM_1}$ és rectangle $\angle DUM_1 = 90^o$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAM_1}$, $\overset{\Delta}{DUC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DU}}{a} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}.$$

$$\overline{DU} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$

$$\frac{\overline{DU}}{\overline{DM_1}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{4}{5}.$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DUM_1}$ és un triangle $\overline{DU} : \overline{UM_1} : \overline{DM_1} = 4:3:5$.

En el cas particular del problema:

$\overline{DU} = 4, : \overline{UM_1} = 3, \overline{DM_1} = 5$.