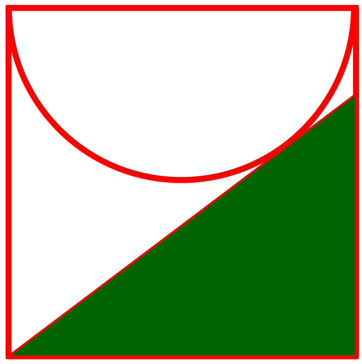
Problemes de Geometria per a l'ESO 102

1011.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

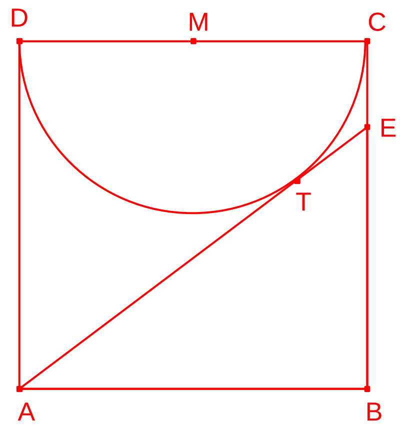
Siga T el punt de tangència de la circumferència i la recta AE.

$\overline{AT}=\overline{AD}=c$.

Siga $\overline{BE}=x$.

$\overline{EC}=\overline{ET}=c-x$.

$\overline{AE}=2c-x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$(2c-x)^2=x^2+c^2$.

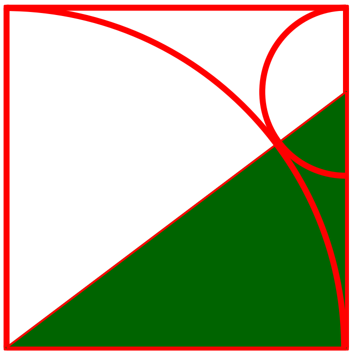
$4c^2-4cx+x^2=x^2+c^2$. Simplificant:

$\frac{x}{c}=\frac{3}{4}$.

Els catets del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ estan en proporció $\overline{BE}:\overline{AB}=3:4$.

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ estan en proporció $\overline{BE}:\overline{AB}:\overline{AE}=3:4:5$.

1012.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

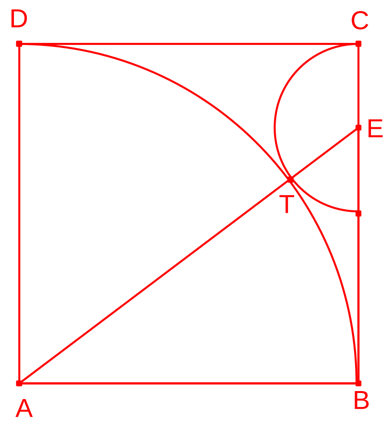


Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Siga T el punt de tangència dels dos arcs.

Siga E el centre de la semicircumferència.



$\overline{AT}=\overline{AD}=c$.

Siga $\overline{EC}=\overline{ET}=r$ radi de la semicircumferència.

$\overline{BE}=c-r$.

$\overline{AE}=c+r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$(c+r)^2=(c-r)^2+c^2$.

$4c^2+2cr+r^2=c^2-2cr+r^2+c^2$. Simplificant:

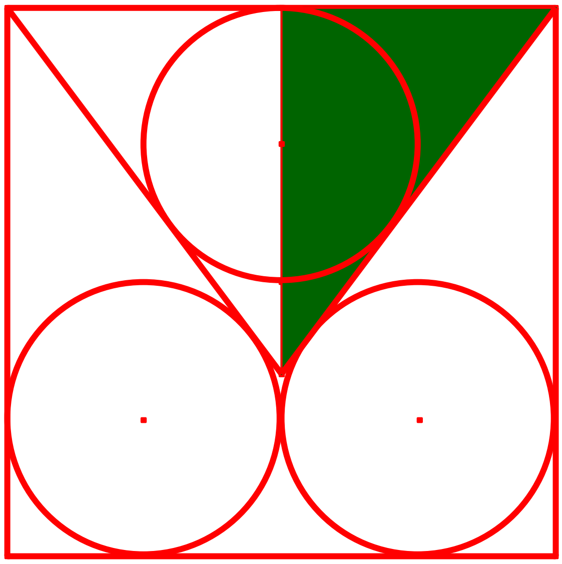
$r=\frac{1}{4}c$.

$\overline{BE}=\frac{3}{4}c$.

Els catets del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ estan en proporció $\overline{BE}:\overline{AB}=3:4$.

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ estan en proporció $\overline{BE}:\overline{AB}:\overline{AE}=3:4:5$.

1013.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

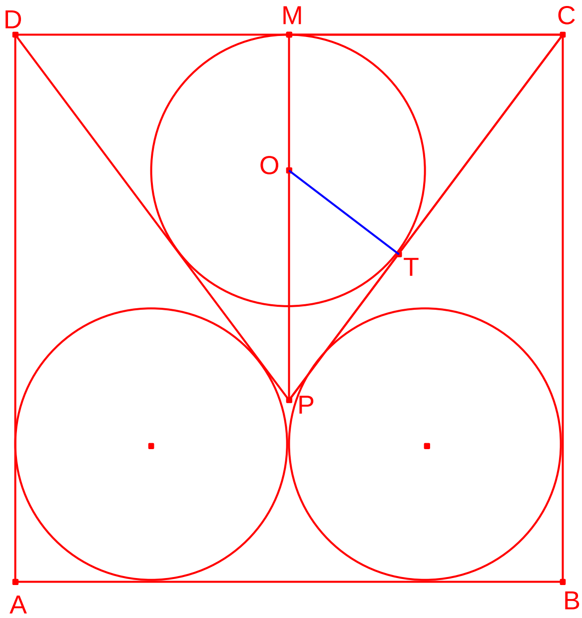
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i la recta PC tangent a les dues circumferències de radi

$\overline{OT}=\overline{OM}=\frac{1}{4}c$.

$\overline{CT}=\overline{CM}=\frac{1}{2}c$.

Siga $x=\overline{PT}$, $y=\overline{OP}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PMC}$, $\overset{\Delta}{PTO}$ són semblants i de raó 2:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$x=\frac{\overline{PM}}{2}=\frac{c}{8}+\frac{y}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTO}$:

$y^2=x^2+\left(\frac{c}{4}\right)^2$. $y^2=\frac{c^2}{64}+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{8}cy+\frac{c^2}{16}$. Resolent l'equació:

$y=\frac{5}{12}c$.

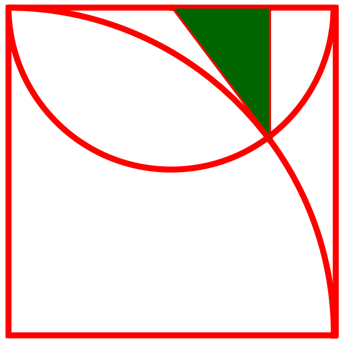
$\overline{PM}=\frac{1}{4}c+\frac{5}{12}c=\frac{2}{3}c$.

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{PM}}=\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{2}{3}c}=\frac{3}{4}.$$

Els catets del triangle $\overset{\Delta}{PMC}$ estan en proporció $\overline{CM}:\overline{PM}=3:4$.

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{PMC}$ estan en proporció $\overline{CM}:\overline{PM}:\overline{PC}=3:4:5$.

1014.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Siga T La intersecció dels dos arcs.

$\overline{MD}=\overline{MT}=\frac{1}{2}c$

Aleshores T és el punt de tangència de la circumferència de centre A i radi c

$\overline{AT}=a$ és perpendicular a la recta MT.

La recta PT talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P'.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AP'T}$, $\overset{\Delta}{TPM}$ són semblants i de raó 2:1.

Siga $\overline{PT}=x$.

Aplicant el teorema de Tales:

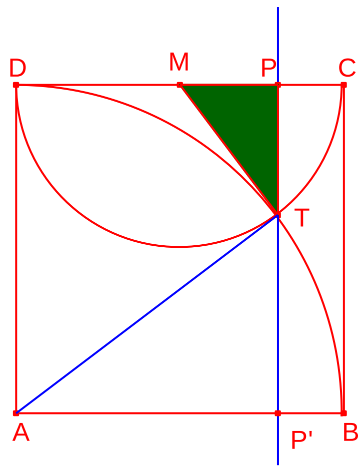
$\overline{AP'}=2x$, $\overline{TP'}=c-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AP'T}$:

$c^2=(2x)^2+(c-x)^2$. Simplificant:

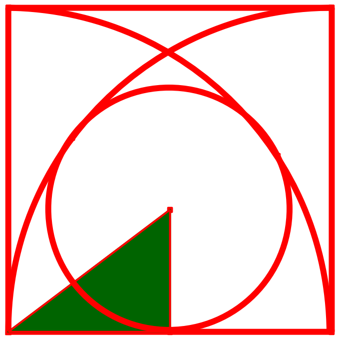
$x=\frac{2}{5}c$.

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{MT}}=\frac{\overline{AP'}}{\overline{AT}}=\frac{x}{\frac{1}{2}c}=\frac{\frac{2}{5}c}{\frac{1}{2}c}=\frac{4}{5}.$$



Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{MPT}$ estan en proporció $\overline{MP}:\overline{PT}:\overline{MT}=3:4:5$.

1015.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

Siga T el punt mig del costat $\overline{AB}$.

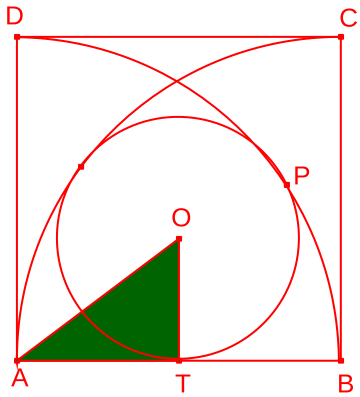
$\overline{AT} = \frac{1}{2}c$.

Siga O el centre de la circumferència.

Siga P la intersecció de l'arc i de la circumferència.

Siga $\overline{OT} = \overline{OP} = r$ radi de la circumferència.

$\overline{AO} = c - r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATO}$:

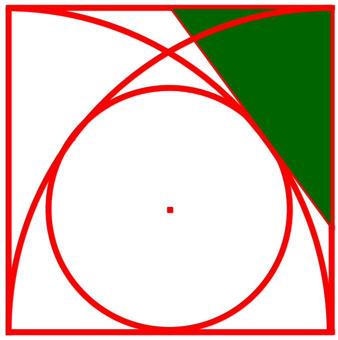
$(c-r)^2 = r^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Simplificant:

$r = \frac{3}{8}c$.

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{AT}} = \frac{r}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{3}{8}c}{\frac{1}{2}c} = \frac{3}{4}.$$

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{ATO}$ estan en proporció $\overline{OT} : \overline{AT} : \overline{AO} = 3:4:5$.

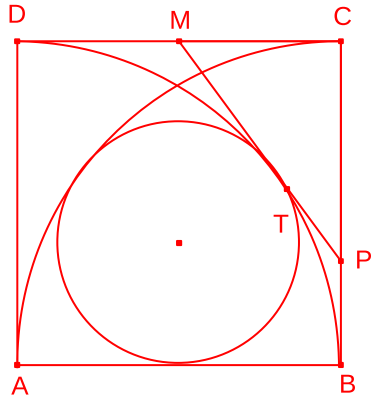
1016.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.



$\overline{CM}=\frac{1}{2}c$.

Siga T la intersecció de l'arc i de la circumferència.

Siga $\overline{MT}=\overline{DM}=\frac{1}{2}c$.

La recta MT talla el costat $\overline{BC}$ en el punt P.

Siga $\overline{CP}=x$.

$\overline{BP}=c-x$.

$\overline{PT}=\overline{BP}=c-r$.

$\overline{MP}=\frac{3}{2}c-x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCP}$:

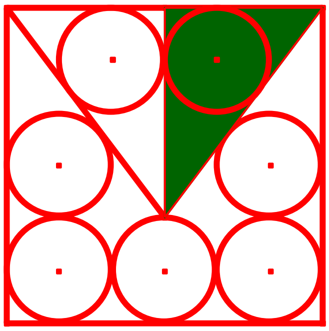
$\left(\frac{3}{2}c-x\right)^2=x^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Simplificant:

$x=\frac{2}{3}c$.

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CP}}=\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{2}{3}c}=\frac{3}{4}.$$

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ estan en proporció $\overline{CM}:\overline{CP}:\overline{PM}=3:4:5$.

1017.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



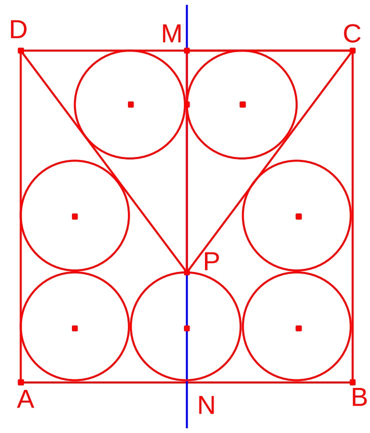
Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.

La recta MN talla la circumferència en el punt P.



$\overline{CM}=\frac{1}{2}c$.

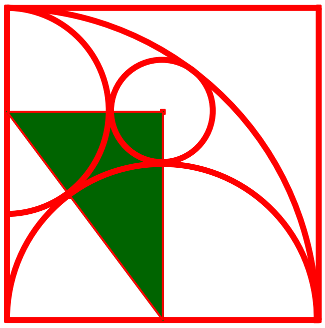
$\overline{PN}=\frac{1}{3}c$.

$\overline{PM}=\frac{2}{3}c$.

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{PM}}=\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{2}{3}c}=\frac{3}{4}.$$

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ estan en proporció $\overline{CM}:\overline{PM}:\overline{CP}=3:4:5$.

1018.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

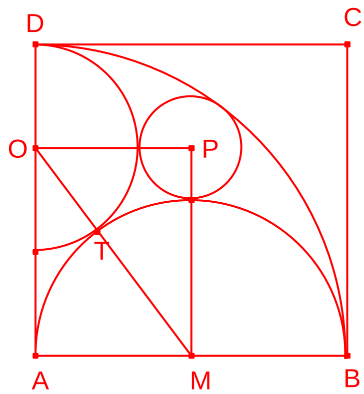
$\overline{AM}=\overline{OP}=\frac{1}{2}c$.

Siga T la intersecció de les dues semicircumferències.

Siga $\overline{OT}=\overline{OD}=x$.

$\overline{OA}=\overline{PM}=c-x$.

$\overline{OM}=\overline{OT}+\overline{MT}=x+\frac{c}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPO}$:

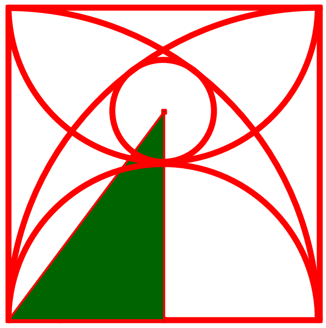
$\left(\frac{c}{2}+x\right)^2=(c-x)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Simplificant:

$x=\frac{1}{3}c$.

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}=\frac{\frac{1}{2}c}{c-\frac{1}{3}c}=\frac{3}{4}.$$

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{MPO}$ estan en proporció $\overline{OP}:\overline{OM}:\overline{PM}=3:4:5$.

1019.- El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{AM}=\frac{1}{2}c$.

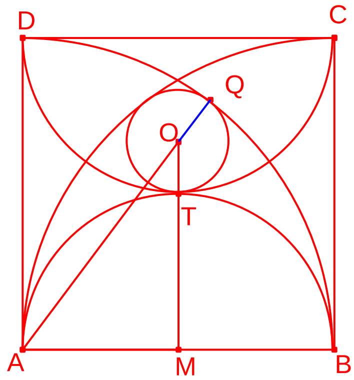
Siga T la intersecció de les dues semicircumferències.

Siga $\overline{MT}=\overline{AM}=\frac{1}{2}c$.

Siga O el centre de la circumferència menuda.

Siga $\overline{OT}=\overline{OQ}=x$ el radi.

$\overline{OM}=\frac{1}{2}c+x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

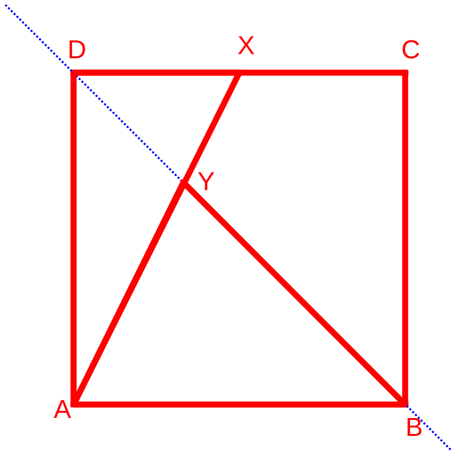
$(c-x)^2=\left(\frac{1}{2}c+x\right)x^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Simplificant:

$x=\frac{1}{6}c$.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{OM}}=\frac{\frac{1}{2}c}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)c}=\frac{3}{4}.$$

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ estan en proporció $\overline{AM}:\overline{OM}:\overline{AO}=3:4:5$.

1020.- Siga el quadrat ABCD.
Siga X el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga Y la intersecció de la diagonal BD i la recta AX.
Proveu que les àrees $S_{ADX}:S_{ABY}:S_{BCXY}=3:4:5$.



Solució:
Siga S l'àrea del quadrat ABCD.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADX}$ és:

$$S_{ADX}=\frac{1}{4}S.$$

$$S_{ABY}+S_{BCXY}=\frac{3}{4}S \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABY}$, $\overset{\Delta}{XDY}$ són semblants i de raó 2:1.
La proporció entre les seues àrees és:

$$\frac{S_{ABY}}{S_{XDY}}=2^2=4$$

$$S_{XDY}+S_{BCXY}=\frac{1}{2}S.$$

$$\frac{1}{4}S_{ABY}+S_{BCXY}=\frac{1}{2}S \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} S_{ABY}+S_{BCXY}=\frac{3}{4}S \\ \frac{1}{4}S_{ABY}+S_{BCXY}=\frac{1}{2}S \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} S_{ABY}=\frac{1}{3}S \\ S_{BCXY}=\frac{5}{12}S \end{cases}.$$

$$S_{ADX}:S_{ABY}:S_{BCXY}=3:4:5.$$