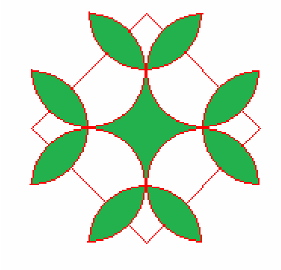
Problemes de Geometria per a l'ESO 103

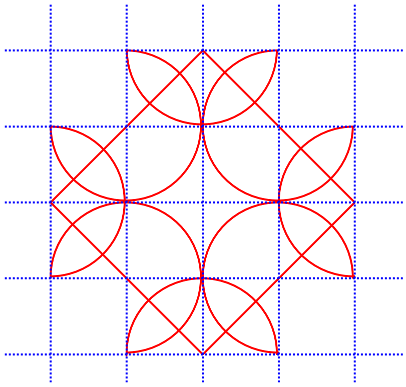
1021.- El figura de la dreta està format per vuit arcs circulars d'igual radi. Els centres de quatre arcs són els vèrtexs del quadrat i els altres 4 arcs tangents .
tenen el centre en els punts migs dels costats del quadrat.
Si la diagonal del quadrat és 1, determineu el perímetre de la regió ombrejada.
UKMT, senior 2013. Problema 21.



Solució:
El radi dels arcs és la quarta part de la diagonal del quadrat.

$r = \frac{1}{4}$.

Els arcs que tenen centre en els vèrtexs del quadrat són semicircumferències.
Els arcs que tenen centre en els punts migs dels costats del quadrat són $\frac{3}{4}$ de circumferència.



El perímetre de la figura és:

$$p = 4\left(\frac{1}{2}(2\pi r)\right) + 4\left(\frac{3}{4}(2\pi r)\right) = 10\pi r = 10\pi\frac{1}{4} = \frac{5}{2}\pi .$$

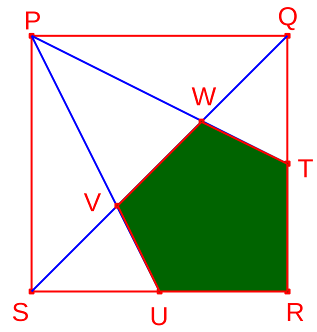
1022.- En la figura PQRS és un quadrat.

Els punts T i u són punts migs dels costats $\overline{QR}$ i $\overline{RS}$, respectivament.

La diagonal $\overline{QS}$ talla els segments $\overline{PT}$ i $\overline{PU}$ en els punts W, V, respectivament.

Determineu la proporció entre les àrees del pentàgon RTWVU i el quadrat PQRS.

UKMT, senior 2013. Problema 23.



Solució:

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{SUV}$.

$S_{TQW} = S_{SUV} = S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{SUV}$, $\overset{\Delta}{QPV}$ són semblants i de raó 1:2.

Aleshores, $S_{QPV} = 4S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{SVP}$, $\overset{\Delta}{QPV}$ tenen la mateixa altura, les àrees són proporcionals a les bases:

$\dfrac{S_{SVP}}{S_{QPV}} = \dfrac{\overline{SV}}{\overline{QV}} = \dfrac{1}{2}$. Aleshores:

$S_{SVP} = \dfrac{1}{2} S_{QPV} = 2S$.

$S_{SQP} = S_{SVP} + S_{QPV} = 6S$.

$S_{PQRS} = 2S_{SQP} = 12S$

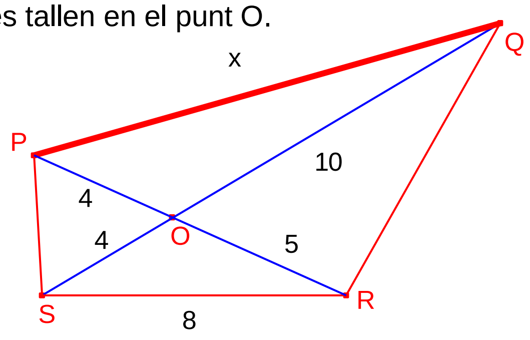
$S_{SRQ} = S_{SQP} = 6S$.

$S_{RTWVU} = S_{STQ} - 2S_{SUV} = 4S$.

La proporció entre les àrees del pentàgon RTWVU i el quadrat PQRS.

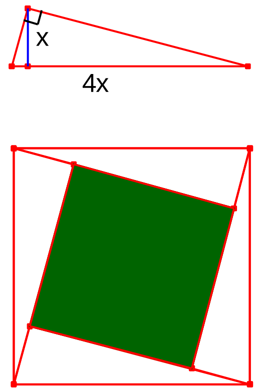
$\dfrac{S_{RTWVU}}{S_{PQRS}} = \dfrac{4S}{12S} = \dfrac{1}{3}$.

1023.- En la figura, les diagonals del quadrilàter PQRS és tallen en el punt O. Determineu la mesura del costat $x=\overline{PQ}$.
UKMT, senior 2013. Problema 24.

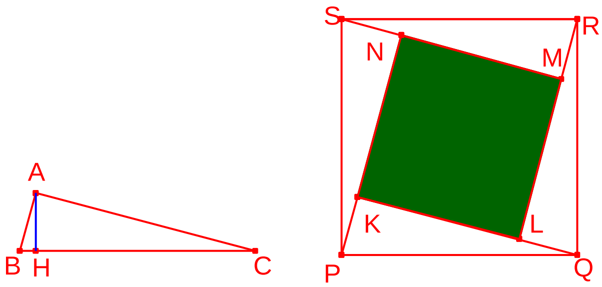


Solució:
Siga $\alpha=\angle SOR=\angle POQ$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{SOR}$:
$8^2=4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\alpha$.
$\cos\alpha=-\frac{23}{40}$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{POQ}$:
$x^2=4^2+10^2-2\cdot 4\cdot 10\cdot\cos\alpha$.
$x^2=162$.
$x=9\sqrt{2}$.

1024.- La hipotenusa d'un triangle rectangle és 4 vegades major que l'altura sobre la hipotenusa.
Amb quatre triangles rectangles s'ha col·locat com en la figura.
Calculeu la mesura del costat del quadrat interior ombrejat.
UKMT, senior 2013. Problema 8.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$. $\overline{BC} = 4x$ i d'altura $\overline{AH} = x$.
Siga $y = \overline{KL}$ el costat del quadrat ombrejat KLMN.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}4x \cdot x = 2x^2.$$

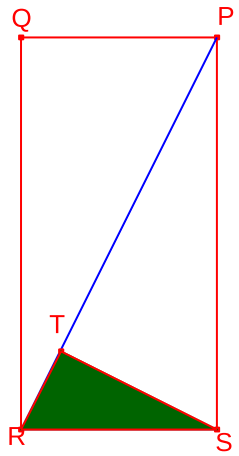
L'àrea del quadrat ombrejat és igual a l'àrea del quadrat exterior PQRS menys quatre vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$S_o = (4x)^2 - 4\left(2x^2\right) = 8x^2.$$

$$S_o = y^2.$$

El costat del quadrat ombrejat és:

$$y = \sqrt{S_o} = 2x\sqrt{2}.$$



1025.- Siga el quadrat PQRS tal que $\overline{PQ} : \overline{QR} = 1:2$.
Siga T la projecció de S sobre la diagonal $\overline{PR}$.

Calculeu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{RST}$ i el rectangle PQRS.
UKMT, senior 2013. Problema 14.

Solució:
Siga $\overline{PQ} = c$, $\overline{QR} = 2c$ costats del rectangle PQRS.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RSP}$:
$\overline{RP} = c\sqrt{5}$.
La seua àrea és:
$S_{PQRS} = 2c^2$.
Siga $\overline{RT} = x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{RST}$, $\overset{\Delta}{RPS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{TS} = 2x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{RST}$ és:

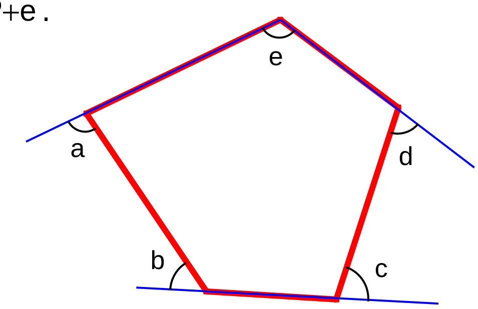
$$S_{RST} = \frac{1}{2}x \cdot 2x = x^2.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SPT}$, $\overset{\Delta}{RPS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{TP} = 4x$.
$\overline{RP} = 5x$.
Aleshores, $c\sqrt{5} = 5x$.
Elevant al quadrat $x^2 = \frac{1}{5}c^2$.

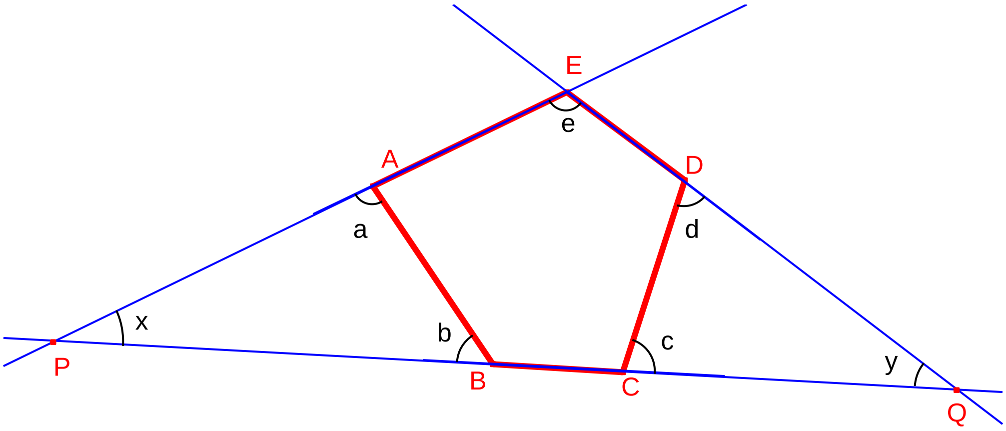
La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{RST}$ i el rectangle PQRS és:

$$\frac{S_{RST}}{S_{PQRS}} = \frac{x^2}{2c^2} = \frac{\frac{1}{5}c^2}{2c^2} = \frac{1}{10}.$$

1026.- En la següent figura proveu que $a+b+c+d=180^{o}+e$.



Solució:



Siga el pentàgon ABCDE.
Les rectes AE, BC es tallen en el punt P.
Les rectes DE, BC es tallen en el punt Q.
Siga $x=\angle APB$, $y=\angle CQD$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{PQE}$ és 180º:

$180^{o}=e+x+y$ (1)

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{PBA}$ és 180º:

$a+b+x=180^{o}$ (2)

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{CQD}$ és 180º:

$c+d+y=180^{o}$ (3)

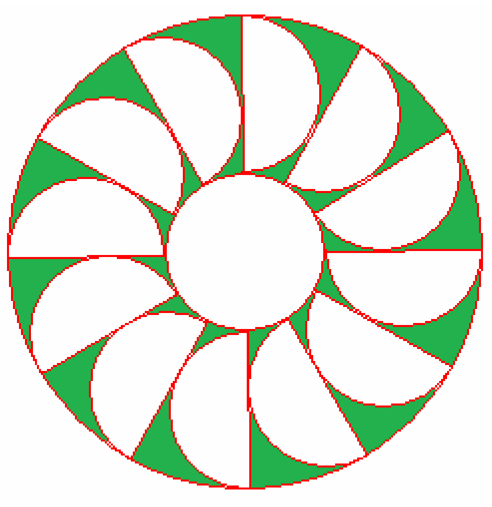
Sumant les tres expressions:

$180^{o}+a+b+x+c+d+y=e+x+y+180^{o}+180^{o}$.

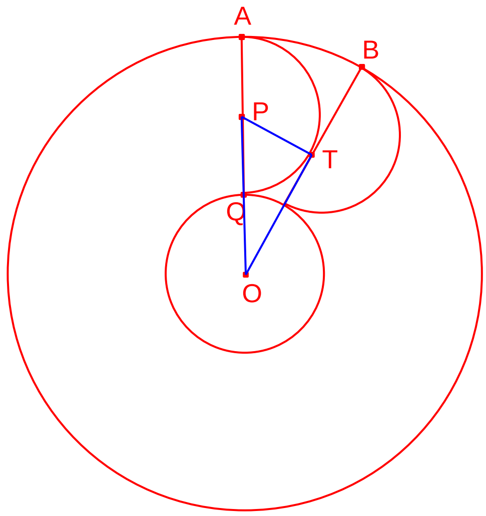
Simplificant:

$a+b+c+d=180^{o}+e$.

2027.- En la figura, sobre una corona circular s'han dibuixat dotze semicercles iguals tangents a les circumferències pel diàmetre i tangents entre ells pel diàmetre.
Els diàmetres dels semicercles pertanyen a diàmetres de la circumferència gran.
Calculeu la proporció entre la zona ombrejada i la corona circular.



Solució:
Siga O el centre de les dues circumferències que formen la corona circular.
Siga $\overline{AQ} = 2s$ diàmetre d'una semicircumferència tangent a la corona circular.
Siga P el seu centre.
Siga $\overline{OQ} = r$ radi de la circumferència interior de la corona.
El radi de la circumferència exterior és:
$\overline{OA} = \overline{AB} = r + 2s$.
$\angle AOB = \frac{360^o}{12} = 30^o$.
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el radi $\overline{OB}$.
$\overline{PT} = s$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$\overline{OP} = 2\overline{PT} = 2s$.
$\overline{OP} = r + s$.
Igualant ambdues expressions:
$2s = r + s$.
Aleshores, $r = s$.
L'àrea de la corona circular és igual a l'àrea del cercle major menys l'àrea del cercle menor:
$S_c = \pi(r+2s)^2 - \pi r^2 = \pi(3s)^2 - \pi s^2 = 8\pi s^2$.
L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea de la corona menys l'àrea de 6 cercles de radi s:
$S_o = 8\pi s^2 - 6\pi s^2 = 2\pi s^2$.
La proporció entre les àrees de la zona ombrejada i la corona circular és:
$\frac{S_o}{S_c} = \frac{2\pi s^2}{8\pi s^2} = \frac{1}{4}$.

1028.- Les coordenades dels vèrtexs d'un quadrat són $(p,0)$, (a,b), (c,d), $(0,q)$, on a, b, c, d, p, q són nombres reals positius.

Proveu que $p+q=\frac{1}{3}(a+b+c+d)$.

Solució:

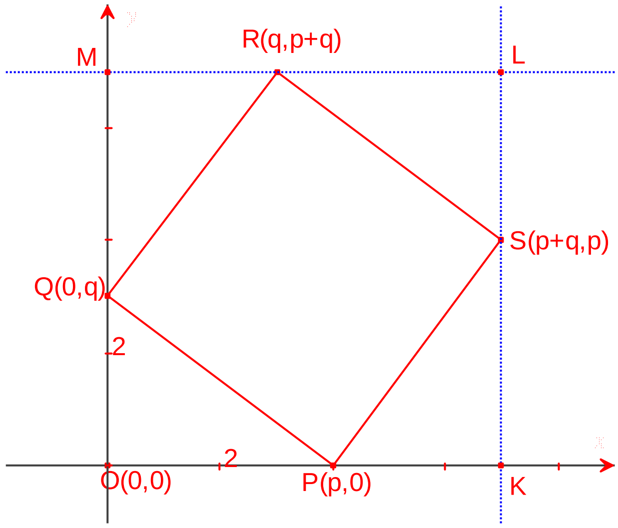
Siga O(0, 0) l'origen de coordenades.

Siguen $P(p,0)$, $Q(0,q)$ $R(a,b)$, $S(c,d)$, les coordenades del quadrat PQRS.

Pel punt R tracem una paral·lela r a l'eix d'abscisses que talla l'eix d'abscisses en el punt M.

Pel punt S tracem una paral·lela s a l'eix d'ordenades que talla l'eix d'abscisses en el punt K.

Les rectes r, s s'intersecten en el punt L.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{POQ}$, $\overset{\Delta}{QMR}$, $\overset{\Delta}{RLS}$, $\overset{\Delta}{SKP}$ són iguals.

$\overline{KS}=\overline{QM}=p$, $\overline{MR}=\overline{PQ}=q$.

Aleshores hores les coordenades de R i S són:

$R(q,p+q)$, $S(p+q,p)$.

Igualant les coordenades dels punts R, S:

$$\begin{aligned} a &= p+q \\ b &= p \\ c &= q \\ d &= p+q \end{aligned}.$$

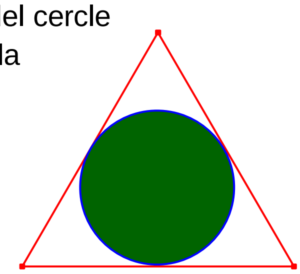
Sumant les quatre expressions:

$a+b+c+d=3(p+q)$.

Aleshores, $p+q=\frac{1}{3}(a+b+c+d)$.

1029.- Proveu que en un triangle equilàter la proporció entre l'àrea del cercle inscrit i l'àrea del triangle és igual a la proporció entre la longitud de la circumferència inscrita i el perímetre del triangle.

$$\frac{S_{C.ins}}{S_{ABC}}=\frac{P_{C.cins}}{P_{ABC}}.$$



Solució:

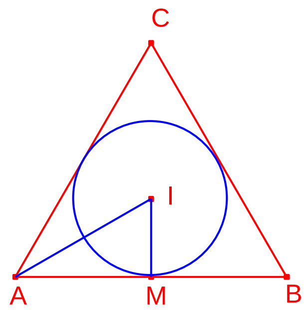
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB}=c$.

Siga I l'incentre del triangle.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga $\overline{MI}=r$ radi de la circumferència inscrita.

$\angle IAM=30^o$, aleshores, $\overline{AI}=2\cdot\overline{MI}=2r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMI}$:

$$(2r)^2=r^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Resolent l'equació:

$$r=\frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

La proporció entre l'àrea del cercle inscrit i l'àrea del triangle és:

$$\frac{S_{C.ins}}{S_{ABC}}=\frac{\pi r^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2}=\frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}c\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

La proporció entre la longitud de la circumferència inscrita i el perímetre del triangle.

$$\frac{P_{C.ins}}{P_{ABC}}=\frac{2\pi r}{3c}=\frac{2\pi\frac{\sqrt{3}}{6}c}{3c}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Aleshores, $\frac{S_{C.ins}}{S_{ABC}}=\frac{P_{C.cins}}{P_{ABC}}$.

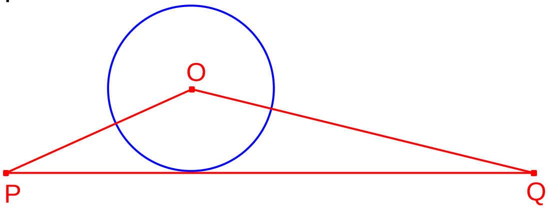
1030.- En la figura hi ha una circumferència de centre O i el triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$.

El costat $\overline{PQ}$ és tangent a la circumferència.

L'àrea del cercle és igual a l'àrea del triangle.

Determineu la raó entre la longitud del costat $\overline{PQ}$ i la longitud de la circumferència.

UKMT, senior 2013. Problema 11.

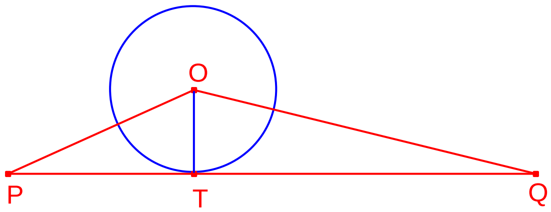


Solució:

Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{PQ}$.

Siga $\overline{OT} = r$ radi de la circumferència.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és igual a l'àrea del cercle, aleshores:



$$S_{OPQ} = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot \overline{OT} = \pi r^2 .$$

$$\frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot r = \pi r^2 .$$

$$\overline{PQ} = 2\pi r .$$

La longitud de la circumferència és:

$$L = 2\pi r$$

La proporció entre $\overline{PQ}$ i la longitud de la circumferència és:

$$\frac{\overline{PQ}}{L} = 1.$$