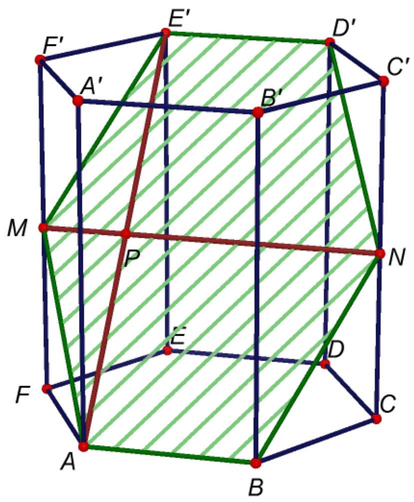
Problemes de Geometria per a l'ESO 104

1031.- Donat el prisma regular hexagonal d'aresta de la base a i altura h, determineu l'àrea de la secció formada pel plànol que passa per l'aresta d'una base i l'aresta oposada de l'altra base.

Solució:



Siga ABCDEFA'B'C'D'E'F' d'aresta de la base $\overline{AB} = a$ i altura $\overline{AA'} = h$.

La secció del prisma que passa per les arestes $\overline{AB}$, $\overline{D'E'}$ és l'hexàgon ABND'E'M tal que M i N són els punts migs de les arestes $\overline{FF'}$, $\overline{CC'}$, respectivament.

$\overline{MN} = 2a$.

Siga P la intersecció dels segments $\overline{MN}$, $\overline{AE'}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}}.$$

$$\overline{MP} = \frac{1}{2}a.$$

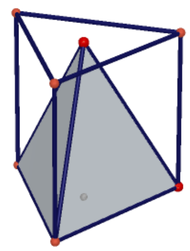
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3a^2 + h^2}}{2}.$$

L'àrea de la secció és igual al doble de l'àrea del trapezi ABNM:

$$S_{ABND'E'M} = 2\left(\frac{\overline{AB} + \overline{MN}}{2}\overline{AP}\right) = \frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 + h^2}.$$

1032.- Siga el prisma regular triangular d'aresta de la base 6 i altura 6.

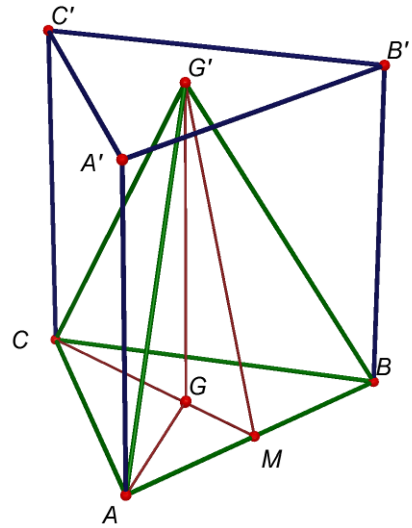


Amb el centre de la base superior i els vèrtexs de la base inferior es construeix una piràmide. Determineu:

a) L'angle que forma una cara lateral de la piràmide i la base del prisma.

b) l'angle que forma l'aresta lateral de la piràmide i la base del prisma.

Solució:



Siga ABCA'B'C' el prisma regular d'aresta de la base $\overline{AB}=6$ i altura $\overline{AA'}=6$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siguen G i G' els baricentres de la base inferior i superior, respectivament.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}6=3\sqrt{3}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\sqrt{3}\ ,\ \overline{CG}=\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{CM}=2\sqrt{3}.$$

a)

L'angle que forma una cara lateral de la piràmide ABCG' i la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és l'angle $\alpha=\angle GMG'$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GMG'}$:

$$tg\alpha=\frac{\overline{GG'}}{\overline{GM}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

$$\alpha=arctg\left(2\sqrt{3}\right)\approx 73^o53'52''.$$

b)

L'angle que forma una aresta lateral de la piràmide ABCG' i la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és l'angle $\beta=\angle GAG'$.

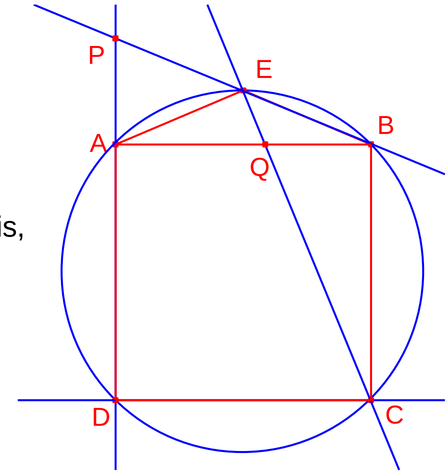
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GAG'}$:

$$tg\beta=\frac{\overline{GG'}}{\overline{AM}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

$$\beta=arctg\left(\sqrt{3}\right)=60^o.$$

1033.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABE}$, $E=135^{\circ}$.

Sobre el costat $\overline{AB}$ dibuixem a l'exterior del triangle el quadrat ABCD.
Les rectes AD i BE s'intersecten en el punt P.
Les rectes CE i AB s'intersecten en el punt Q.
Proveu que $\overline{AP}=\overline{BQ}$.



Solució:

En el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$, $A=B=\dfrac{45^{\circ}}{2}$.

Considerem la circumferència circumscrita al quadrat ABCD.
Notem que per ser $\angle AEB=135^{\circ}$, $\angle ACB=45^{\circ}$ suplementaris, el quadrilàter AEBC és inscriptible, aleshores E pertany a la circumferència inscrita al quadrat ABCD.
Per ser angle $\angle EAB$, $\angle ECB$ inscrits en la circumferència:

$\angle ECB=\ell EAB=\dfrac{45^{\circ}}{2}$. $\overline{BA}=\overline{BC}$.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAP}$, $\overset{\Delta}{CBQ}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AP}=\overline{BQ}$.

1034.- Siga ABCD un rectangle $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{3}$.

Sobre el costat $\overline{AB}$ i cap a l'interior del rectangle es dibuixa el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABP}$.

Sobre el costat $\overline{BC}$ i cap a l'exterior del rectangle es dibuixa el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCQ}$.

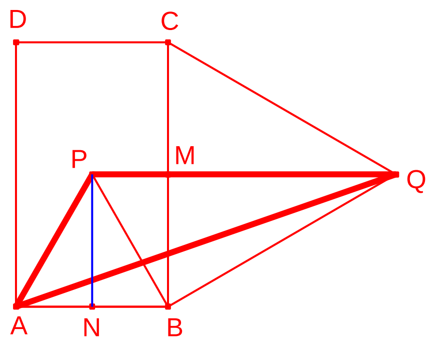
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$.

KöMaL, K401.

Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{BMQ}$, $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\overline{MQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}=\frac{3}{2}.$$

$$\overline{PN}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\overline{PN}=\overline{BQ}$.

Aleshores, $\overline{PQ}$ és paral·lel a $\overline{AB}$.

$$\overline{PQ}=\overline{NB}+\overline{MQ}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és.

$$S_{APQ}=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{PN}=\frac{1}{2}2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1035.- Siga el punt E del costat $\overline{AD}$ del quadrat ABCD d'àrea 64.

Siga F de la prolongació del costat $\overline{AB}$ més prop del vèrtex B, tal que el triangle $\overset{\Delta}{DAF}$ és rectangle i isòsceles d'àrea 50.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFE}$.

KöMaL, C1197.

Solució:

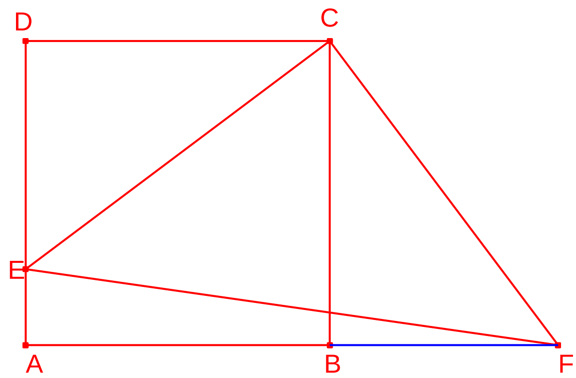
Siga el quadrat ABCD d'àrea 64. Els seu costat és $\overline{AB} = 8$.

Siga el triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{DAF}$, $C = 90^{o}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DAF}$ és 50, aleshores:

$\frac{1}{2}\overline{CE}^2 = 50$, aleshores:

$\overline{CE} = \overline{CF} = 10$.



Els triangles rectangles el triangle $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{CBF}$ són iguals.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBF}$:

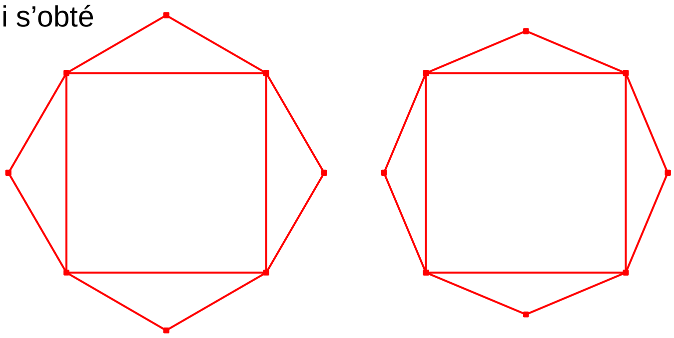
$\overline{BF} = \overline{DE} = 6$.

$\overline{AE} = 2$, $\overline{AF} = 14$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFE}$ és:

$$S_{AFE} = \frac{1}{2}\overline{AF}\cdot\overline{AE} = \frac{1}{2}14\cdot 2 = 14.$$

1036.- Sobre els costats d'un quadrat de costat la unitat i cap a l'exterior és dibuixen triangles isòsceles d'angle en el vèrtexs de 120º i s'obté un octògon equilàter.



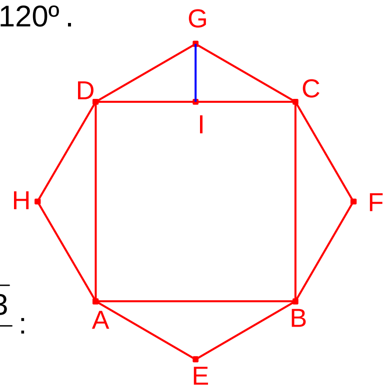
Considerem l'octògon regular que conté els vèrtexs del mateix quadrat de costat 1.
Determineu la proporció entre l'àrea de l'octògon regular i octògon equilàter.
KöMaL, C1193.

Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 1$.

Siga l'octògon equilàter AEBFCGDH tal que $E = F = G = H = 120º$.

Siga I el punt mig del costat $\overline{CD}$.

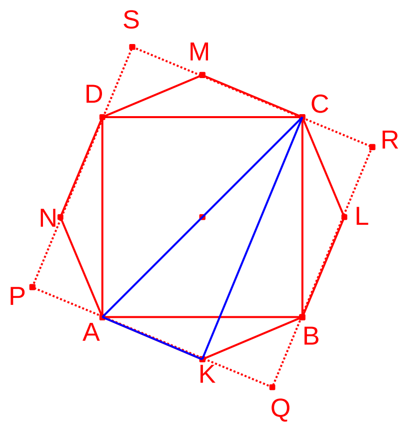


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DIG}$:

$\overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

L'àrea de l'octògon equilàter és igual a l'àrea del quadrat ABCD més l'àrea de 4 triangles equilàters de costat $\overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$S_1 = 1^2 + 4 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Siga $\overline{AK} = c$ costat de l'octògon regular AKBLCMDN.

Aplicant el teorema de Pitàgores el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{2}$.

Siga el quadrat PQRS format per les interseccions de les rectes AK, BL, CM, DN.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APN}$:

$\overline{AP} = \overline{PN} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$. $\overline{KC} = \overline{AK} + 2\overline{AP} = \left(1 + \sqrt{2}\right)c$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKC}$:

$c^2 + \left(\left(1 + \sqrt{2}\right)c\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$. $c^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

L'àrea de l'octògon regular és igual a l'àrea del quadrat PQRS menys l'àrea d'un quadrat de costat c:

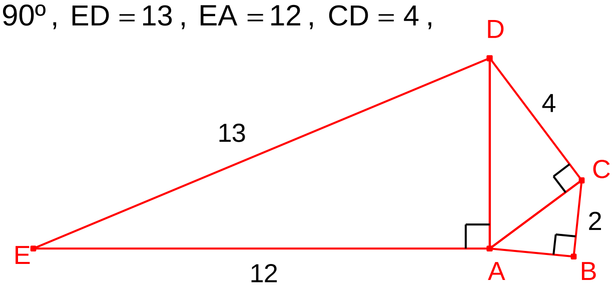
$$S_2 = \left(\left(1 + \sqrt{2}\right)c\right)^2 - c^2 = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)c^2 = \sqrt{2}$$

La proporció entre l'àrea de l'octògon regular i l'octògon equilàter és:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}.$$

1037.- En la figura $\angle EAD = \angle ACD = \angle ABC = 90º$, $\overline{ED} = 13$, $\overline{EA} = 12$, $\overline{CD} = 4$, $\overline{BC} = 2$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EAD}$:

$\overline{AD} = 5$.

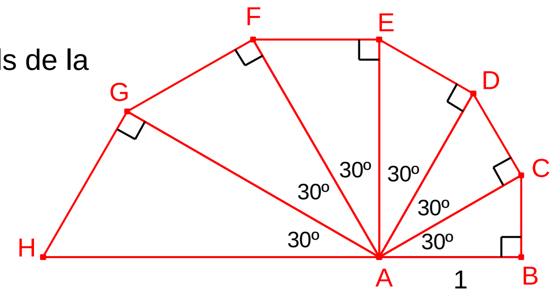
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$\overline{AC} = 3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AB} = \sqrt{5}$.

1038.- Una espiral està formada per 6 triangles com els de la figura.



Els angles de tots els triangles són 30º, 60º, 90º.

Si $\overline{AB} = 1\text{cm}$, determineu:

a) La mesura de $\overline{AH}$.

b) L'àrea afitada pels 6 triangles.

Solució:

Tots els triangles són semblants.

Calculem la hipotenusa del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $x = \overline{AC}$.

$$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

a)

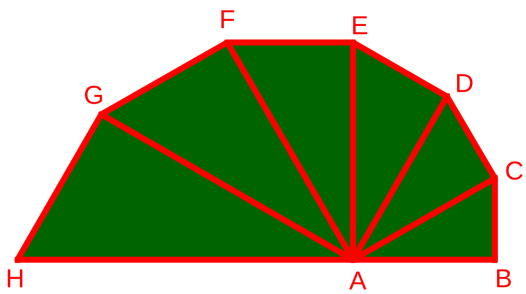
Les hipotenuses formen una progressió geomètrica de primer terme $\overline{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ i raó

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

El terme 6 de la progressió és:

$$\overline{AH} = \overline{AC} \cdot r^{6-1} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^5 = \frac{2^6}{3^3} = \frac{64}{27}.$$

b)



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Les àrees formen una progressió geomètrica de primer terme $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ i de raó

$$r^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

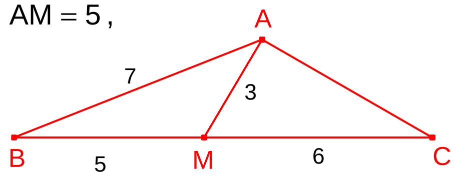
$$S_6 = S_1\left(r^2\right)^{6-1} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^5$$

La suma dels 6 primers termes de la successió:

$$S = \frac{S_1 - S_6 \cdot r^2}{1 - r^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^6}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{3367\sqrt{3}}{1458} \approx 3.999873.$$

1039.- Siga M un punt del costat $\overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AM}=5$, $\overline{CM}=6$.

Si $\overline{AB}=7$ i $\overline{AM}=3$, determineu la mesura del costat $\overline{AC}$.



Solució:
Siga $\beta=\angle ABC$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$3^2=7^2+5^2-2\cdot 7\cdot 5\cos\beta$.

$\cos\beta=\frac{13}{14}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}^2=7^2+11^2-2\cdot 7\cdot 11\cdot\cos\beta$.

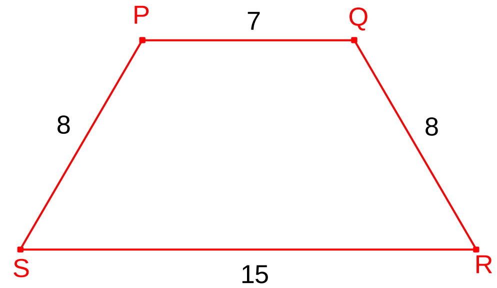
$\overline{AC}^2=7^2+11^2-2\cdot 7\cdot 11\cdot\frac{13}{14}$.

$\overline{AC}^2=27$.

$\overline{AC}=3\sqrt{3}$

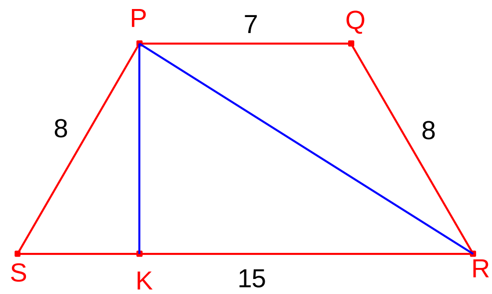
1040.- En el dibuix PQRS és un trapezi isòsceles, $\overline{PQ}=7$, $\overline{PS}=\overline{QR}=8$, $\overline{SR}=15$.

Determineu la longitud de la diagonal $\overline{PR}$.



Solució:

Siga K la projecció de P sobre la base $\overline{RS}$.



$\overline{SK}=\dfrac{\overline{RS}-\overline{PQ}}{2}=4$.

$\overline{RK}=15-4=11$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SKP}$:

$\overline{KP}=4\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RKP}$:

$\overline{PR}=13$.