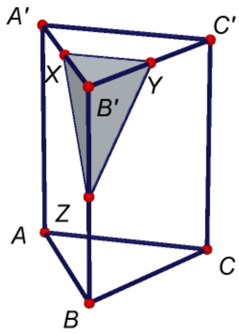
Problemes de Geometria per a l'ESO 105



1041.- Siga el prisma regular triangular ABCA'B'C' d'aresta de la base $\overline{AB} = 12$ i altura $\overline{AA'} = 16$.

Siguen X, Y, Z els punts migs de les arestes $\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{BB'}$, respectivament.

Calculeu el volum del sòlid XYZB'.

Solució:

$\overline{B'X} = \overline{B'Y} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 6$.

$\overline{B'Z} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = 8$.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{XYB'}$ és:

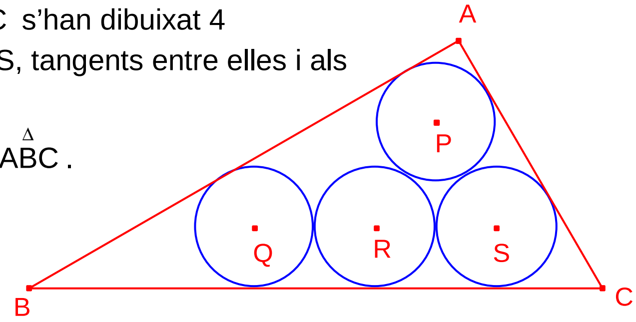
$S_{XYB'} = \frac{\sqrt{3}}{4}6^2$.

El sòlid XYZB' és un tetraedre de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{XYB'}$ i altura $\overline{B'Z}$.

El seu volum és:

$V_{XYZB'} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}6^2 \cdot 8 = 24\sqrt{3}$.

1042.- En la figura, en l'interior del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'han dibuixat 4 circumferències d'igual radi r i centres P, Q, R, S, tangents entre elles i als costats (veure figura).



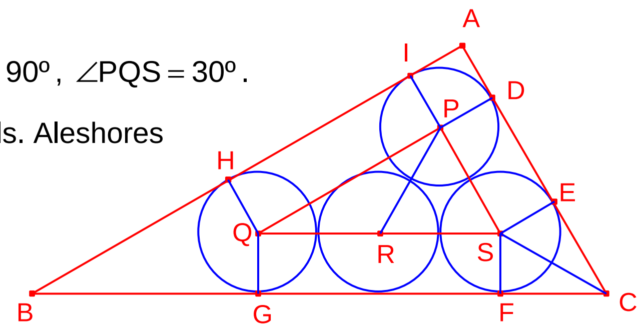
Determineu la mesura dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{PRS}$ és equilàter de costat 2r.

$\overline{PS} = 2r$, $\overline{QS} = 4r$, $\angle QSP = 60^{o}$.

Aleshores, El triangle $\overset{\Delta}{QPS}$ és rectangle, $\angle QPS = 90^{o}$, $\angle PQS = 30^{o}$.



Els costats dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQS}$ són paral·lels. Aleshores són semblants.

Per tant, $A = 90^{o}$, $B = 30^{o}$, $C = 60^{o}$.

$\overline{AD} = r$, $\overline{DE} = 2r$.

$\angle SCE = 30^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CES}$:

$\overline{CE} = r\sqrt{3}$.

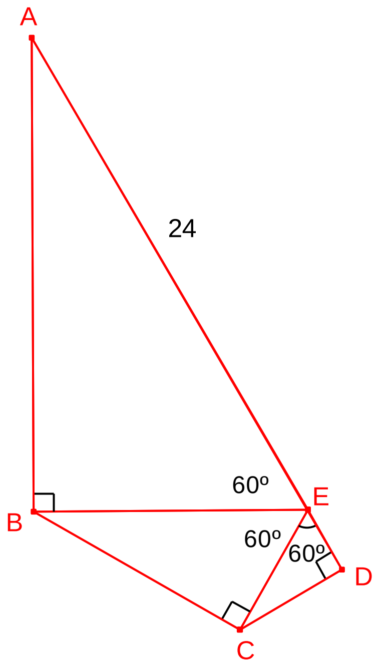
$\overline{AC} = \overline{Ad} + \overline{DE} + \overline{CE} = \left(3 + \sqrt{3}\right)r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{BC} = 2\overline{AC} = 2\left(3 + \sqrt{3}\right)r$.

$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC} = 3\left(1 + \sqrt{3}\right)r$.

1043.- En la figura hi ha 3 triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{CDE}$, $\angle ABE = \angle BCE = \angle CDE = 90^o$, $\angle BEA = \angle CEB = \angle DEC = 60^o$, $\overline{AE} = 24$.
Calculeu l'àrea del polígon ABCD.



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ són semblants i la raó de semblança és:
$4:2:1$.
La proporció entre les àrees és:
$4^2:2^2:1^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{AE} = 12,\ \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AE} = 12\sqrt{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}12 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$$

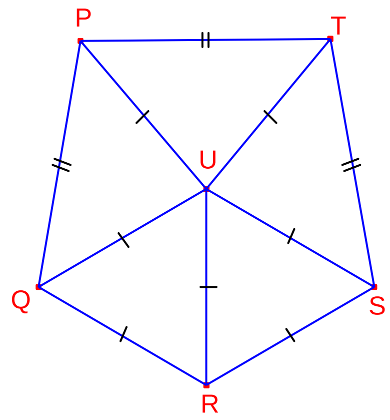
$$S_{BCE} = \frac{1}{4}S_{ABE} = 18\sqrt{3}.$$

$$S_{CDE} = \frac{1}{16}S_{ABE} = \frac{9}{2}\sqrt{3}.$$

$$S_{ABDE} = S_{ABE} + S_{BCE} + S_{CDE} = 72\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{189}{2}\sqrt{3}.$$

1044.- En la figura, $\overset{\Delta}{QUR}$ i $\overset{\Delta}{SUR}$ són triangles equilàters.

$\overset{\Delta}{QUP}$, $\overset{\Delta}{PUT}$ i $\overset{\Delta}{TUS}$ són triangles isòsceles amb
$\overline{PU} = \overline{QU} = \overline{SU} = \overline{TU}$ i $\overline{QP} = \overline{PT} = \overline{TS}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle UST$.



Solució:

$\angle QUR = \angle RUS = 60^o$.

Siga $\alpha = \angle UST = \angle UTS$.

Siga $\beta = \angle QUP = \angle PUT = \angle TUS$.

$3\beta + 2 \cdot 60^o = 360^o$.

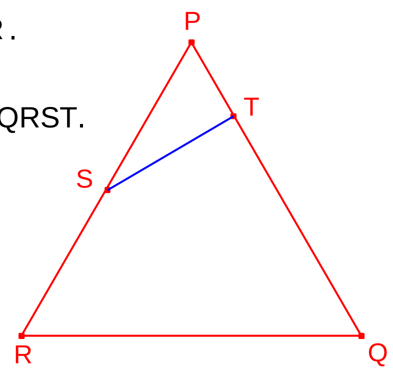
$\beta = 80^o$.

$2\alpha + \beta = 180^o$.

$2\alpha + 60^o = 180^o$.

$\alpha = \angle UST = 50^o$.

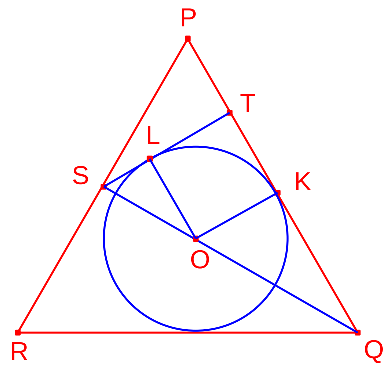
1045.- Si S és el punt mig del costat $\overline{PR}$ del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$.
Siga R del costat $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PT}=1$, $\overline{TQ}=3$.
Calculeu el radi de la circumferència màxima interior al quadrilàter QRST.



Solució:
$\overline{PQ}=4$.
$\overline{PS}=2$.
$P=60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PTS}$ és rectangle.
La circumferència de radi màxim interior al quadrilàter QRST es tangent als segments $\overline{TQ}$, $\overline{TS}$ i $\overline{QR}$.

Aleshores, el centre pertany a la bisectriu $\overline{QS}$ del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.
Siga O el centre d'aquesta circumferència.



Siga $\overline{OK}=\overline{OL}=r$ el seu radi.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKO}$:
$\overline{OQ}=2\overline{OK}=2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SLO}$:

$$\overline{OS}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{OL}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

$$\overline{QS}=\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RSO}$:

$$\overline{QS}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ}=2\sqrt{3}.$$

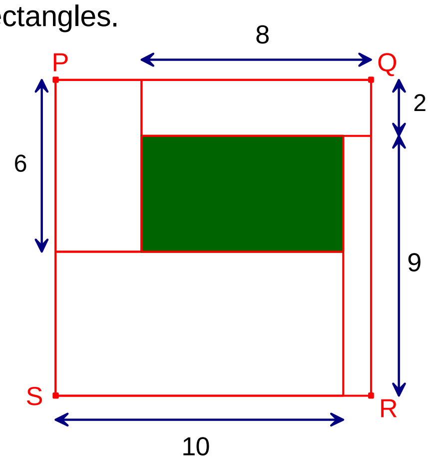
Igualant ambdues expressions:

$$\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r=2\sqrt{3}.$$

Resolent l'equació:

$$r=\frac{3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\approx 1.098.$$

1046.- En la figura POQRS és un quadrat que s'ha dividit en 5 rectangles. Determineu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:

El costat del quadrat PQRS és:

$\overline{QR} = \overline{QL} + \overline{LR} = 2 + 9 = 11$.

$\overline{AD} = \overline{PN} - \overline{QL} = 6 - 2 = 4$.

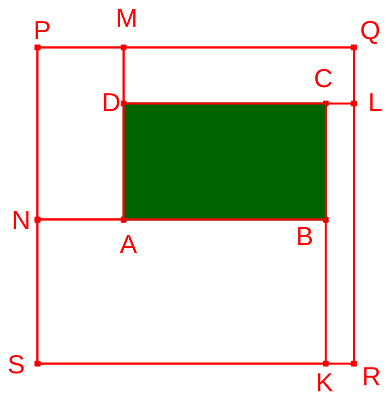
$\overline{PM} = 11 - \overline{MQ} = 11 - 8 = 3$.

$\overline{KR} = 11 - \overline{SQ} = 11 - 10 = 1$.

$\overline{AB} = 11 - \overline{PM} - \overline{KR} = 11 - 3 - 1 = 7$.

L'àrea del rectangle ABCD és:

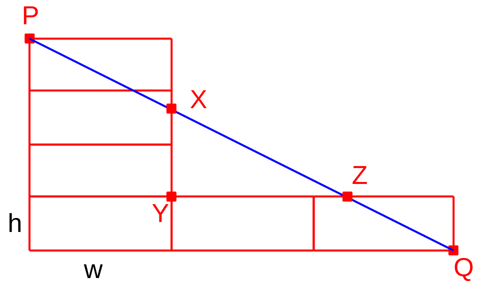
$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 7 \cdot 4 = 28$.



1047.- Sis rectangles iguals de base w i altura h estan col·locats com el dibuix.

El segment $\overline{PQ}$ talla la fila vertical en el punt X i la horitzontal en Z.

Si el triangle rectangle $\overset{\Delta}{XYZ}$ és tal que $\overline{YZ} = 2 \cdot \overline{XY}$, determineu el valor de $\frac{h}{w}$.



Solució:

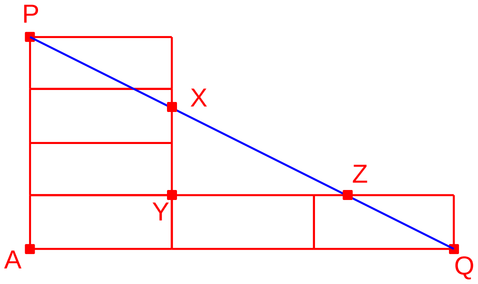
$\overline{AP} = 4h$, $\overline{AQ} = 3w$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PAQ}$, $\overset{\Delta}{XYZ}$ són semblants.

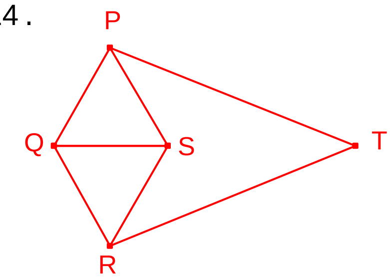
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{4h}{3w} = \frac{\overline{XZ}}{\overline{ZY}} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{h}{w} = \frac{3}{8}.$$



1048.- En el dibuix $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SQ} = 6$ i $\overline{PT} = \overline{RT} = 14$. Calculeu la longitud del segment $\overline{ST}$.



Solució:

Siga M el punt mig del segment $\overline{QS}$.

$\overline{QM} = \overline{MS} = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QMP}$:

$\overline{MP} = 3\sqrt{3}$.

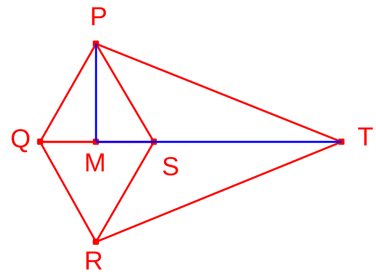
Siga $\overline{ST} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMT}$:

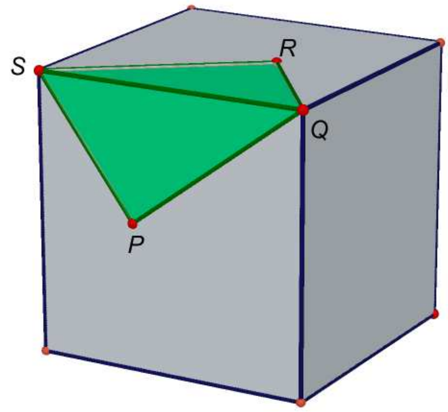
$14^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + (3+x)^2$.

Resolent l'equació:

$x = \overline{ST} = 10$.

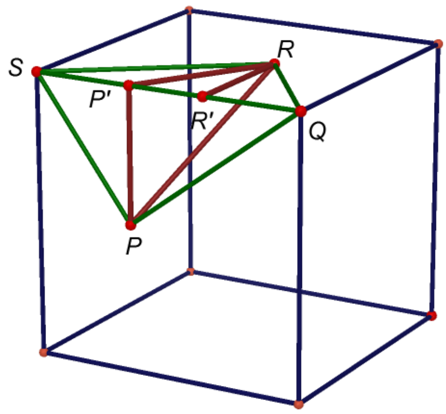


1049.- Siga una peça rectangular de paper PQRS, $\overline{PQ} = 20$ i $\overline{QR} = 15$.
La peça de paper està damunt d'un cub tal que Q i S són vèrtexs del cub (els triangles $\overset{\Delta}{QPS}$ i $\overset{\Delta}{QRS}$ estan en la part frontal i cara superior del cub, respectivament).
Calculeu la distància entre P i R.



Solució:
$\overline{PQ} = \overline{RS} = 20$ i $\overline{QR} = \overline{PS} = 15$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QRS}$:
$\overline{QS} = 25$.
Siga P' la projecció de P sobre l'aresta $\overline{QS}$.
Siga R' la projecció de R sobre l'aresta $\overline{QS}$.

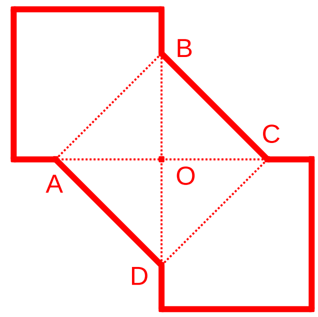


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SP'P}$, $\overset{\Delta}{SPQ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{15}{25} = \frac{\overline{SP'}}{15}$. $\frac{20}{25} = \frac{\overline{PP'}}{15}$.
$\overline{SP'} = 9$, $\overline{PP'} = 12$.
$\overline{P'R'} = \overline{QS} - 2\overline{SP'} = 7$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{P'R`R}$:
$\overline{P'R}^2 = 7^2 + 12^2$
$\overline{P'R} = \sqrt{193}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PP'R}$:
$\overline{PR}^2 = \left(\sqrt{193}\right)^2 + 12^2$.
$\overline{PR} = \sqrt{337} \approx 18'36$.

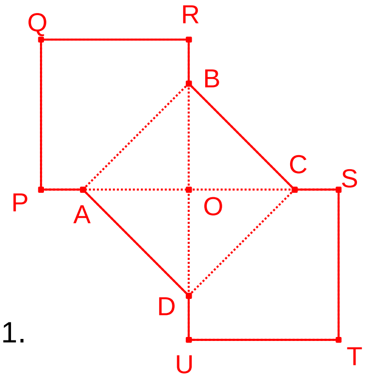
1050.- En la figura, hi ha tres quadrats de costat 3.
Dos quadrats tenen en comú el vèrtex O.
O és el centre del quadrat ABCD.
Determineu el perímetre de la figura.



Solució:
El perímetre de la figura és el perímetre del polígon APQRBCSTUD.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$:

$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$\overline{PA} = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.



El perímetre de la figura és:

$$P_{APQRBCSTUD} = 6 \cdot \overline{AB} + 4 \cdot \overline{PA} = 6 \cdot 3 + 4\left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 30 - 6\sqrt{2} \approx 21.51.$$