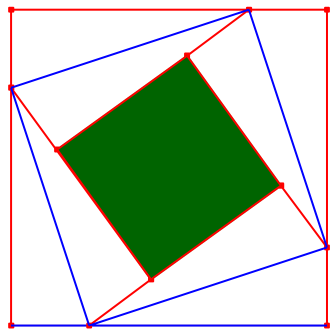
Problemes de Geometria per a l'ESO 106

1051.- Al plegar un paper quadrat pel vèrtex (amb quatre plecs iguals) s'ha format en l'interior un quadrat (quadrat ombrejat). De quina forma hem de doblegar el paper a fi que l'àrea del quadrat interior siga $\frac{1}{n}$ l'àrea del quadrat inicial.

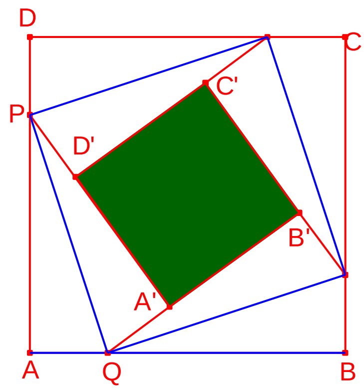


Solució:

Siga ABCD el quadrat exterior de costat $\overline{AB}=1$.

Siga A'B'C'D' el quadrat interior ombrejat.

Al doblegar per la recta PQ el vèrtex A és transforma en A' (vèrtex del quadrat interior).



Per hipòtesi $S_{A'B'C'D'}=\frac{1}{n}S_{ABCD}$.

$S_{ABCD}=1$

Siga $\overline{AQ}=\overline{DP}=x$.

L'àrea del quadrat A'B'C'D' és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys vuit vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQP}$.

$$S_{A'B'C'D'}=1-8\left(\frac{1}{2}x(1-x)\right).$$

$$1-8\left(\frac{1}{2}x(1-x)\right)=\frac{1}{n}.$$

Resolent l'equació:

$$x=\frac{n\pm\sqrt{n}}{2n}.$$

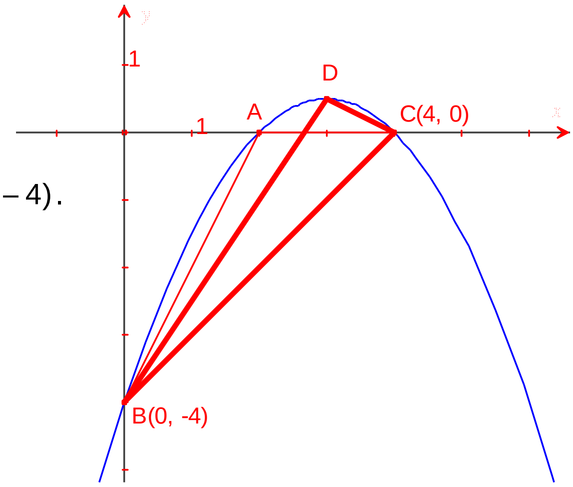
1052.- En la gràfica D és el vèrtex de la paràbola.

La paràbola talla l'eix d'abscisses en els punts A i $C(4,0)$.

La paràbola talla l'eix d'ordenades en el punt $B(0,-4)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 4.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DBC}$.



Solució:

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre la base $\overline{AC}$ és $\overline{OB}=4$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 4, aleshores:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OB}=4$.

$\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot 4=4$. $\overline{AC}=2$.

Aleshores, les coordenades de A són: $A(2,0)$.

Per ser B punt de tall amb l'eix d'ordenades l'equació de la paràbola és:

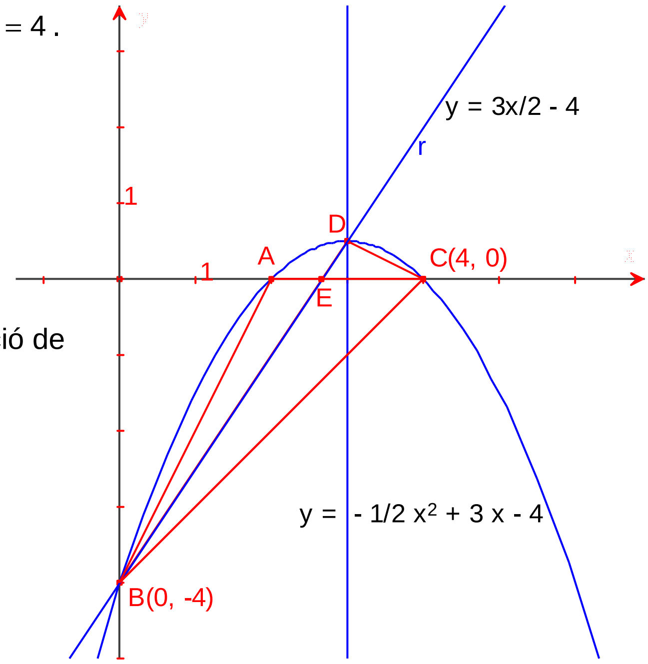
$f(x)=ax^2+bx-4$.

La paràbola passa pels punts A, C:

$\begin{cases}2^2a+2b-4=0\\4^2a+4b-4=0\end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=3\end{cases}$.

Les coordenades del vèrtex D són:

$D(3,f(3))$. $D\left(3,\frac{1}{2}\right)$.



L'equació de la recta r que passa pels punts B i D té equació: $y=\frac{3}{2}x-4$.

Siga E la intersecció de la recta r i l'eix d'abscisses.

Les seues coordenades són: $E\left(\frac{8}{3},0\right)$. $\overline{EC}=\frac{4}{3}$.

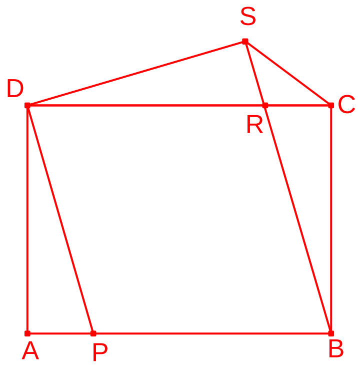
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DBC}$ és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{EBC}$, $\overset{\Delta}{DEC}$.

Les altures dels dos triangles sobre la base $\overline{EC}$ són 4 i $\frac{1}{2}$, respectivament.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DBC}$ és:

$S_{DBC}=S_{EBC}+S_{DEC}=\frac{1}{2}\frac{4}{3}4+\frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{1}{2}=3$.

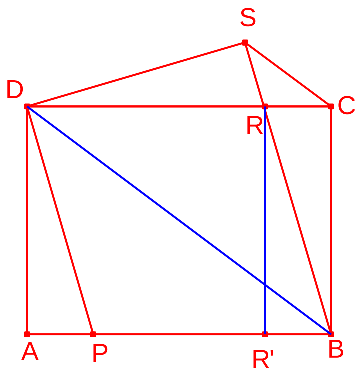
1053.- En la figura ABCD és un rectangle. $\angle DSR = 90^o$.



$\overline{AP} = \overline{RC}$, $\overline{AD} = \overline{DS}$ i $\overline{DP} = \overline{PB}$.
El perímetre de PBRD és 100cm.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBR}$ és $300cm^2$. Calculeu:
a) El perímetre de APRSD.
b) L'àrea de APRSD.
c) L'àrea de $\overset{\Delta}{RCS}$.

Solució:



Els triangles $\overset{\Delta}{DAP}$, $\overset{\Delta}{BCR}$ són iguals, aleshores:
$\overline{DP} = \overline{RB}$.
Aleshores, PBRD és un rombe.

El perímetre de PBRD és 100cm aleshores: $\overline{PB} = \frac{100}{4} = 25$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBR}$ és $300cm^2$. Aleshores:
$\frac{\overline{PB} \cdot \overline{AD}}{2} = 300$. $\frac{25 \cdot \overline{AD}}{2} = 300$. $\overline{AD} = 24$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAP}$:
$\overline{AP} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DSR}$, $\overset{\Delta}{BCR}$ són iguals, aleshores: $\overline{SR} = \overline{RC} = \overline{AP} = 7$.
Siga R' la projecció de R sobre el costat $\overline{AB}$.
$\overline{RR'} = \overline{AD} = 24$, $\overline{R'B} = \overline{RC} = 7$. $\overline{PR'} = \overline{PB} - \overline{R'B} = 25 - 7 = 18$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PR'R}$:
$\overline{PR} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 10\sqrt{10}$.
a)
El perímetre del pentàgon APRSD és:
$P_{APRSD} = \overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RS} + \overline{SD} + \overline{AD} = 2\overline{AD} + 2\overline{AP} + \overline{PR} = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 7 + 10\sqrt{10} = 62 + 10\sqrt{10}$
b)
L'àrea del pentàgon APRSD és i gual a la suma de l'àrea del trapezi APRD i del triangle rectangle $\overset{\Delta}{DSR}$:

$$S_{APRSD} = \frac{\overline{AP} + \overline{DR}}{2}\overline{AD} + \frac{\overline{DS} \cdot \overline{RS}}{2} = \frac{7 + 25}{2}24 + \frac{24 \cdot 7}{2} = 468.$$

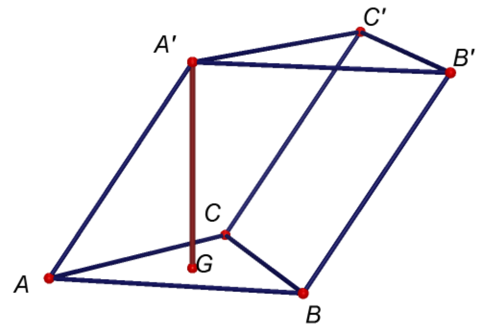
c)
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{RCS}$, $\overset{\Delta}{RDB}$ són semblants i de raó: $\overline{RS} : \overline{RC} = 25 : 7$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PBR}$ $\overset{\Delta}{RDB}$ tenen la mateixa àrea: $S_{RDB} = S_{PBR} = 300$.

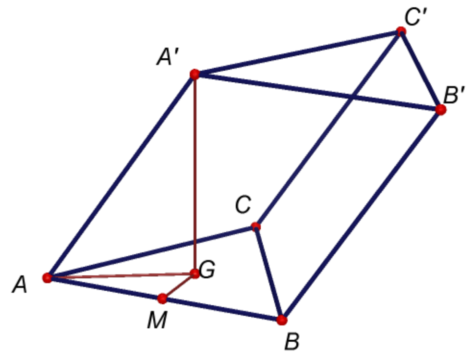
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{RCS}$ és: $S_{RCS} = \left(\frac{7}{25}\right)^2 S_{RDB} = \frac{588}{25}$.

1054.- Totes les arestes d'un prisma triangular mesuren a.

La projecció d'un vèrtex de la cara superior és el baricentre de la cara inferior.
Calculeu l'àrea i el volum del prisma.



Solució:
Siga el prima triangular ABCA'B'C' tal que totes les arestes mesuren a.
Siga G (baricentre de la base inferior) i projecció del vèrtex A'.
Notem que la cara BCC'B' és un quadrat.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMG}$:



$$\overline{AG} = a\frac{\sqrt{3}}{3}, \ \overline{GM} = a\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGA'}$:

$$\overline{A'G} = a\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AGA'}$, $\overset{\Delta}{BGA'}$ són iguals, aleshores:

$$\overline{AA'} = \overline{BA'}$$

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABA'}$ és equilàter.
L'àrea del prisma és igual a la suma de 6 vegades l'àrea d'un triangle equilàter de costat a i l'àrea d'un quadrat de costat a:

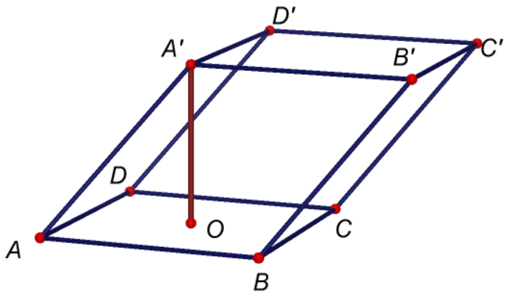
$$S_{prisma} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) + a^2 = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = S_{ABC} \cdot \overline{A'G} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^3.$$

1055.- La base d'un prisma és un quadrat i totes les arestes mesuren a.

La projecció d'un vèrtex de la cara superior és centre de la cara inferior.
Calculeu l'àrea i el volum del prisma.



Solució:
Siga el prima triangular ABCDA'B'C'D' tal que totes les arestes mesuren a i ABCD és un quadrat
Siga O (centre de la base inferior) i projecció del vèrtex A'.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\overline{AO} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOA'}$:

$$\overline{A'O} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOA'}$, $\overset{\Delta}{BOA'}$ són iguals, aleshores:
$\overline{AA'} = \overline{BA'}$

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABA'}$ és equilàter.
Notem que totes les cares laterals són iguals.
L'àrea del prisma és igual a la suma de 8 vegades l'àrea d'un triangle equilàter de costat a i l'àrea de dos quadrats de costat a:

$$S_{prisma} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) + 2\left(a^2\right) = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)a^2.$$

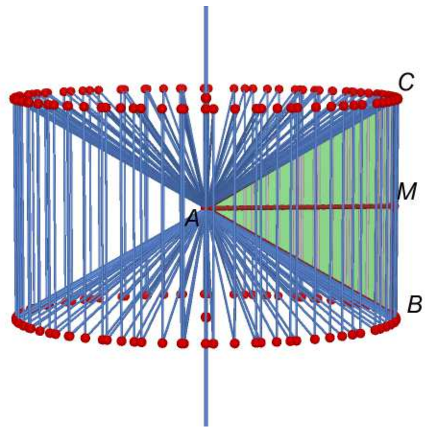
El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = S_{ABCD} \cdot \overline{A'G} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3.$$

1056.- Un triangle equilàter de costat a, gira al voltant d'un eix paral·lel a un costat i passa pel vèrtex oposat. Determineu l'àrea i el volum del sòlid de revolució.

Gúsiev, problema 782.

Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.

Siga l'eix que passa pel vèrtex A i és paral·lel al costat $\overline{BC}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

L'àrea del sòlid de revolució és igual a la suma de l'àrea lateral d'un cilindre de radi $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ i altura $\overline{BC} = a$ i

l'àrea lateral de dos cons iguals de radis $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ i generatriu $\overline{AB} = a$:

$$S = \left(2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)a + 2\left(\pi\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a\right) = 2\pi\sqrt{3} \cdot a^2.$$

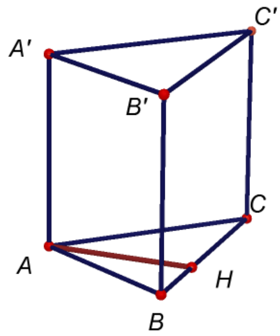
Els volum del sòlid de revolució és igual al volum d'un cilindre de radi $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ i altura $\overline{BC} = a$ menys el volum de dos cons iguals de radis $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ i altura $\overline{BM} = \frac{a}{2}$:

$$V = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 a - 2\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \frac{a}{2}\right) = \frac{\pi}{2}a^3.$$

1057.- L'àrea d'una cara lateral d'un prisma recte triangular és m^2. Determineu el volum del prisma si la distància de l'aresta oposada al plànol de l'anomenada cara és igual a 2a.

Gúsiev, problema 813.

Solució:



Siga el prima ABCA'B'C' tal que l'àrea de la cara BCC'B' és m^2.

Siga H la projecció de A sobre l'aresta $\overline{BC}$.

$\overline{AH} = 2a$.

Siga $\overline{BC} = b$, $\overline{BB'} = h$.

Per hipòtesi, $bh = m^2$.

El volum del prisma és:

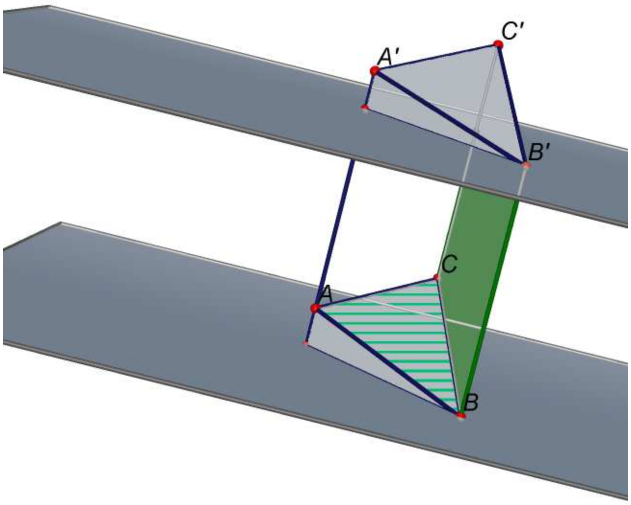
$$V = S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot 2a \cdot h = am^2.$$

Nota:

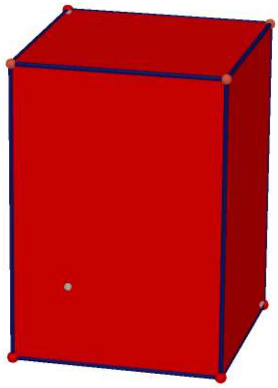
Si el prima és oblic el resultat és el mateix.

Pels vèrtexs B i B' tracem dos plànols perpendiculars a l'aresta $\overline{AA'}$.

Aconseguiríem un prisma recte amb les mateixes condicions del problema.



1058.- Tenim un bloc de fusta de $7cm \times 7cm \times 10cm$.



Es pintes totes les 6 cares de roig i es divideixen en 490 cubets iguals d'1cm d'aresta.
Quants dels cubets en què ha quedat dividit el bolc tenen
1 cara pintada de roig
2 cares pintades de roig
3 cares pintades de roig
Cap cara pintada de roig.

Solució:
Els cubs que tenen 3 cares pintades de roig són els que formen els vèrtexs de l'ortoedre.
Els cubs que tenen 2 cares pintades de roig són els que formen les arestes sense comptar els vèrtexs.
Els cubs que tenen 1 cara pintada de roig són els que formen les cares sense comptar les arestes.

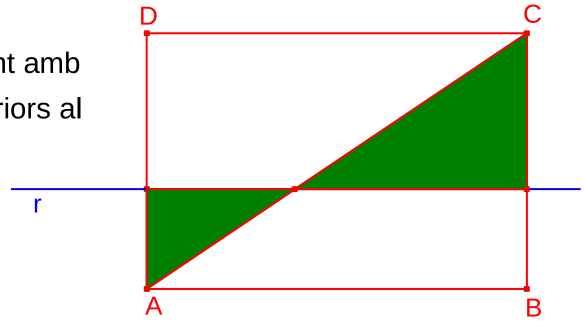
Núm. cares pintades de roig	Total
3	8
2	$5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 72$
1	$2(5 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 8) = 210$
0	$490 - (8 + 72 + 210) = 200$ $5 \cdot 5 \cdot 8 = 200$

Generalització:
Tenim un bloc de fusta de $a \times b \times c$, $a, b, c \in N$.
Es pintes totes les 6 cares de roig i es divideixen en $a \cdot b \cdot c$ cubets iguals d'1cm d'aresta.
Quants dels cubets en què ha quedat dividit el bolc tenen
1 cara pintada de roig
2 cares pintades de roig
3 cares pintades de roig
Cap cara pintada de roig.

Núm. cares pintades de roig	Total
3	8
2	$(a-2)4 + (b-2)4 + (c-2)4 = 4(a+b+c) - 24$
1	$2((a-2)(b-2) + (a-2)(c-2) + (b-2)(c-2)) =$ $= 2(ab + ac + bc) - 8(a+b+c) + 24$
0	$(a-2)(b-2)(c-2)$

1059.- Siga un rectangle ABCD.

Una recta r és mou paral·lelament al costat $\overline{AB}$, formant amb la diagonal $\overline{AC}$ dos triangles oposats pels vèrtexs, interiors al rectangle.
Demostreu que la suma de les àrees d'aquests triangles és mínima quan la recta r passa pel punt mig del segment $\overline{AD}$.



Solució:

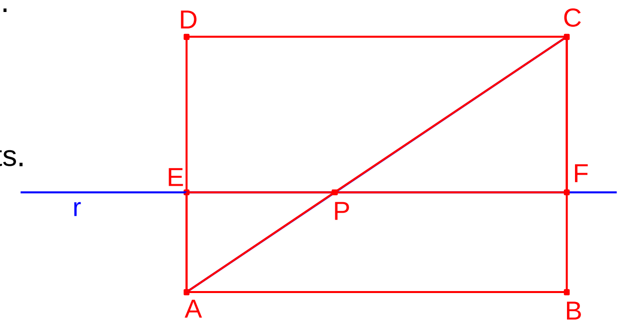
Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{Ab}=a$, $\overline{AD}=b$.

La recta r talla els costats $\overline{AD}, \overline{BC}$ en els punts E, F, respectivament.

Siga P la intersecció de la recta r i la diagonal $\overline{AC}$.

Siga $\overline{AE}=x$.

$\overline{DE}=\overline{FC}=b-x$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEP}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{b}=\frac{\overline{EP}}{a}.$$

$$\overline{EP}=\frac{a}{b}x. \quad \overline{PF}=a-\frac{a}{b}x.$$

La suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AEP}$, $\overset{\Delta}{PFC}$ és:

$$S(x)=\frac{1}{2}\frac{a}{b}x^2+\frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{b}x\right)(b-x),\ x\in[0,b].$$

$$S(x)=\frac{a}{b}x^2-ax+\frac{ab}{2}.$$

La funció és una paràbola còncava. El seu mínim s'assoleix en el vèrtex:

$$x=\frac{a}{2\frac{a}{b}}=\frac{b}{2}.$$

El mínim s'assoleix quan la recta r passa pel punt mig del segment $\overline{AD}$.

L'àrea mínima és, $S\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{ab}{4}$, és a dir, la quarta part de l'àrea del rectangle ABCD.

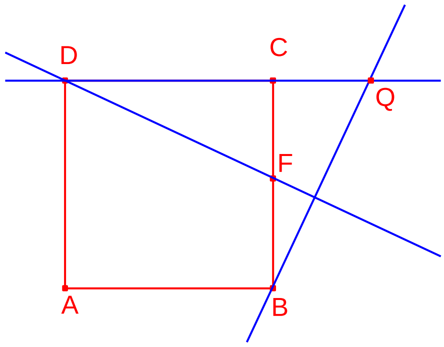
1060.- Siga ABCD un quadrat i F un punt qualsevol del costat $\overline{BC}$.

Pel punt B tracem un perpendicular a la recta DF que talla la recte DC en el punt Q. Determineu la mesura de l'angle $\angle FQC$.

Solució:

Per tindre els costats sobre perpendiculars, els angles $\angle CDF$, $\angle CBQ$ són iguals.

$\overline{CD} = \overline{BC}$.



Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDF}$, $\overset{\Delta}{CQB}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CF} = \overline{CQ}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{FCQ}$ és rectangle i isòsceles.

Per tant, $\angle FQC = 45^o$.