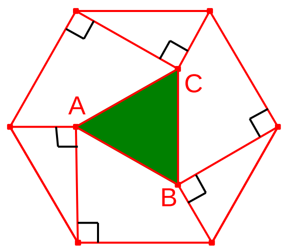
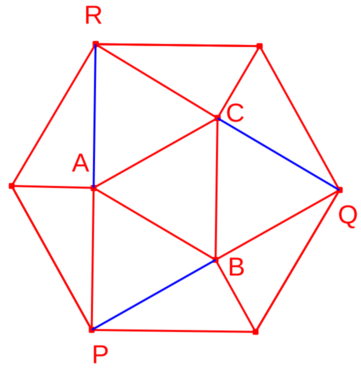
Problemes de Geometria per a l'ESO 107

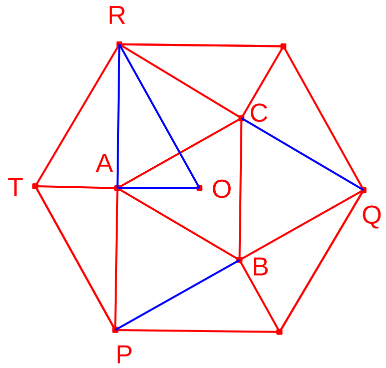


1061.- En la figura, determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, si l'àrea de l'hexàgon regular és H.

Solució:



$S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{PQR}$.



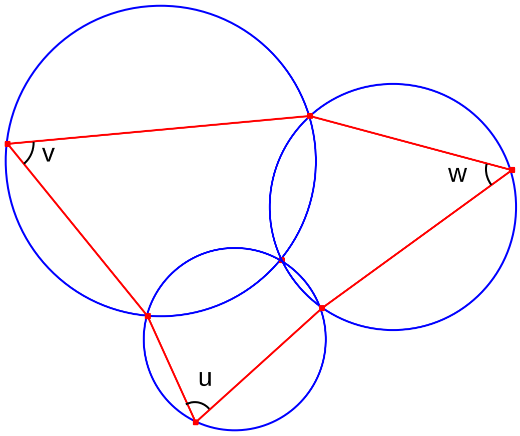
$S_{TAR} = S_{OAR}$.

$S_{PQR} = \frac{1}{2} S_{hexa} = \frac{1}{2} H$.

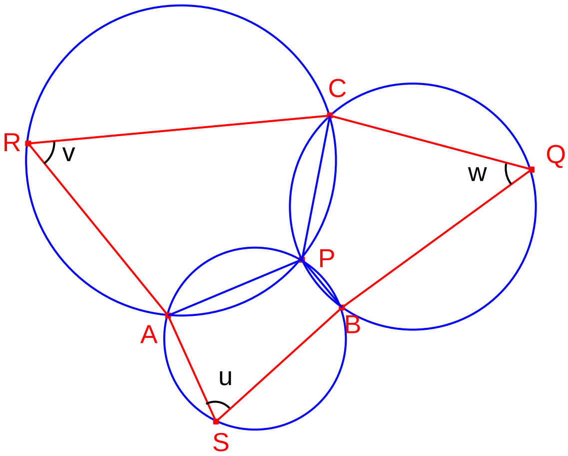
Aleshores:

$S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{PQR} = \frac{1}{8} H$.

1062.- En la figura calculeu la suma $u+v+w$.



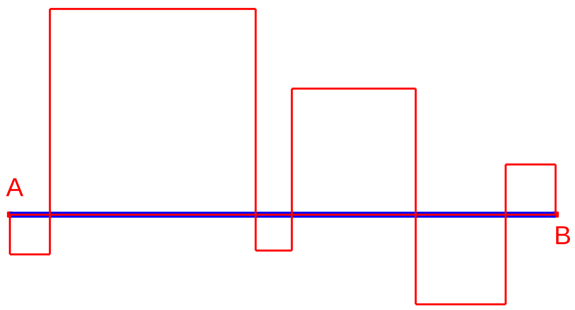
Solució:
Siga P la intersecció de les tres circumferències.
Siguen A, B, C les intersecció de les circumferències.



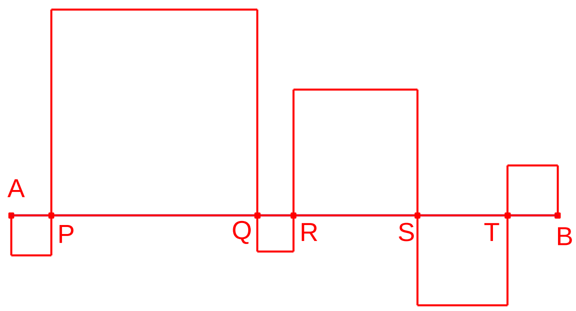
El quadrilàter APBS és inscriptible, aleshores, els angles oposats són suplementaris.
$\angle APB = 180º - u$.
Anàlogament, $\angle APC = 180º - v$, $\angle BPC = 180º - w$.

$\angle APB + \angle APC + \angle BPC = 360º$.
$\angle APB + \angle APC + \angle BPC = 180º - u + 180º - v + 180º - w$.
Igualant ambdues expressions:
$180º - u + 180º - v + 180º - w = 360º$.
$u + v + w = 180º$.

1063.- En figura, sobre un segment de longitud 24 s'han 6 quadrats.
Calculeu la suma dels perímetres dels 6 quadrats.



Solució:



Siguen $\overline{AP}=a, \overline{PQ}=b, \overline{QR}=c, \overline{RS}=d, \overline{ST}=e, \overline{TB}=f$ els costats dels sis quadrats.

$a+b+c+d+e+f=24$.

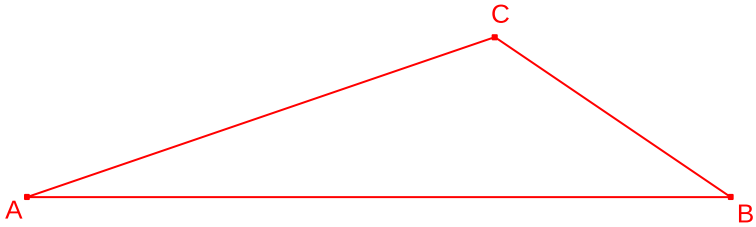
La suma dels perímetres dels sis quadrats és:

$4a+4b+4c+4d+e+4f=4(a+b+c+d+e+f)=4\cdot 24=96$.

1064.- L'àrea dels quadrats dibuixats sobre els costats d'un triangle mesuren 225cm^2, 676cm^2 i 1369cm^2. Calculeu l'àrea del triangle.

Solució.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que els quadrats sobre els costats a, b, c, respectivament són $a^2 = 225$, $b^2 = 676$ i $c^2 = 1369$.



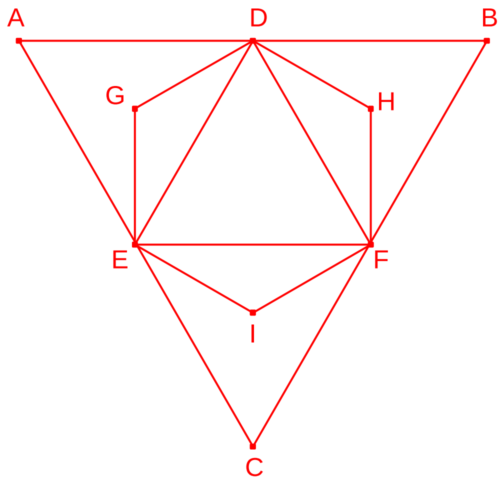
Els costats del triangle són:

$a = 15, b = 26, c = 37$.

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

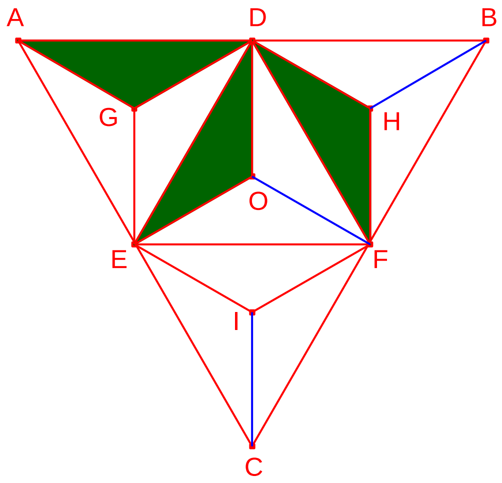
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{78 \cdot 48 \cdot 26 \cdot 4}}{4} = 156\text{cm}^2.$$

1065.- En la figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter i FHDGEI és un hexàgon regular.



Proveu que $S_{FHDGEI}{}^{2} = S_{ABC} \cdot S_{DEF}$.

Solució:



Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

$S_{ABC} = 12 \cdot S_{ODE}$. $S_{DEF} = 3 \cdot S_{ODE}$. $S_{FHDGEI} = 6 \cdot S_{ODE}$.

$S_{FHDGEI} = 2 \cdot S_{ABC}$.

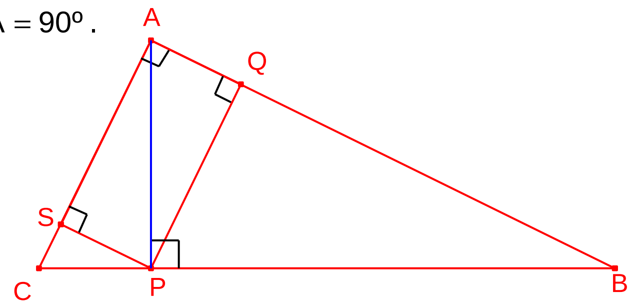
$S_{FHDGEI} = \frac{1}{2} S_{DEF}$.

Multiplicant ambdues expressions:

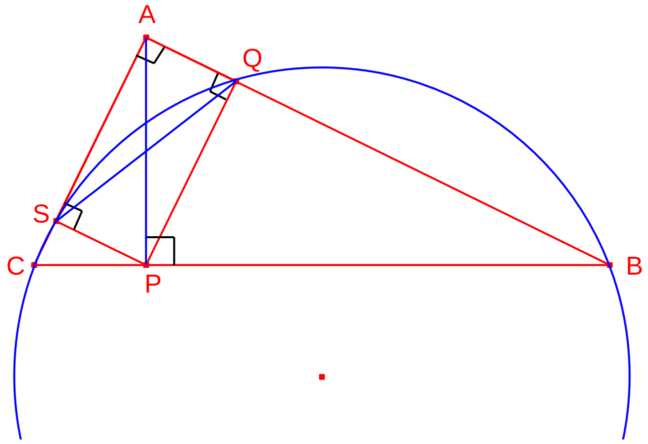
$S_{FHDGEI}{}^{2} = S_{ABC} \cdot S_{DEF}$.

1066.- En la figura el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $A = 90º$.

$\overline{AP}$ és l'altura i PQAS és rectangle.
Proveu que el quadrilàter CSQB és inscriptible.



Solució:
Un quadrilàter és inscriptible si els angles oposats són suplementaris.



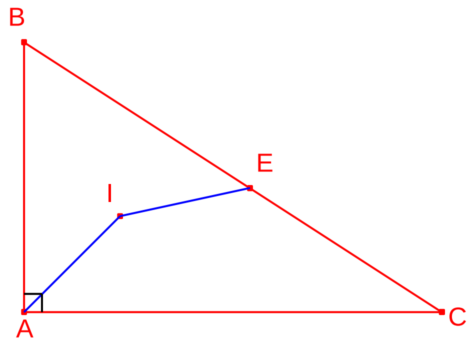
$\angle CAP = B$.
$\angle SQP = \angle CAP = B$.
$\angle QSP = 90º – B$.
$\angle CSQ = 90º + 90º – B = 180º$.
Aleshores, els angles S i B del quadrilàter CSQB són suplementaris, aleshores, el quadrilàter és inscriptible.

1067.- En la figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle $A = 90^o$.

Siga I l'incentre.

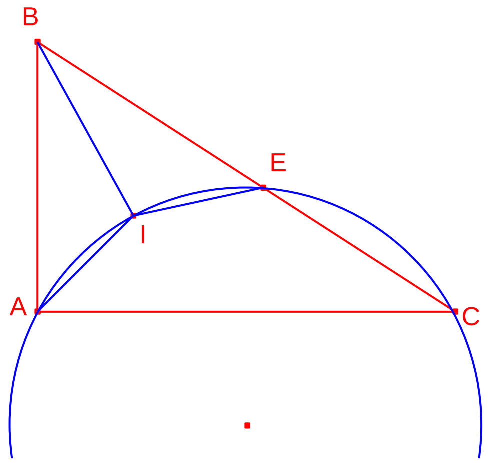
Siga E de la hipotenusa tal que $\overline{AB} = \overline{BE}$.

Proveu que el quadrilàter AIEC és inscriptible.



Solució:

Un quadrilàter és inscriptible si els angles oposats són suplementaris.



$\angle IAC = 45^o$.

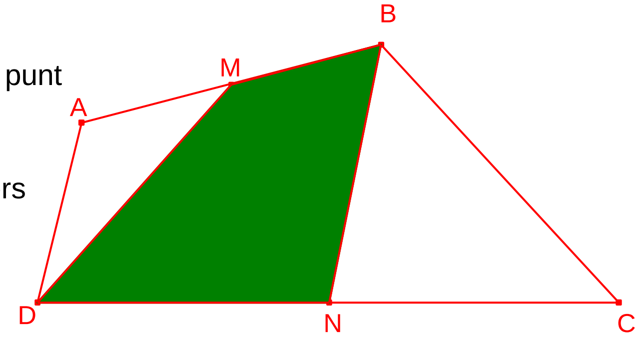
$\overline{AB} = \overline{BE}$, $\angle ABI = \angle EBI$, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABI}$, $\overset{\Delta}{EBI}$ són iguals.

Per tant, $\overline{AI} = \overline{EI}$, $\angle BEI = \angle BAI = 45^o$.

Aleshores, $\angle IEC = 135^o$.

Aleshores, els angles A i E del quadrilàter AIEC són suplementaris, per tant el quadrilàter és inscriptible.

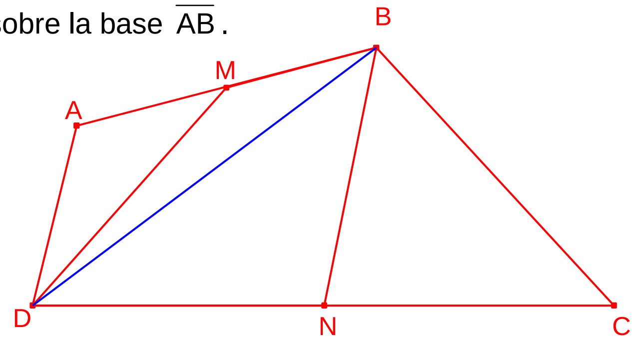
Ricard Peiró i Estruch



1068.- Donat el quadrilàter convex ABCD, siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ i N el punt mig del costat $\overline{CD}$. Calculeu la proporció entre les àrees dels quadrilàters DMBN i ABCD.

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{DMB}$, $\overset{\Delta}{DAB}$ tenen la mateixa altura sobre la base $\overline{AB}$.



Aleshores:

$$S_{DMB} = \frac{1}{2} S_{DAB}.$$

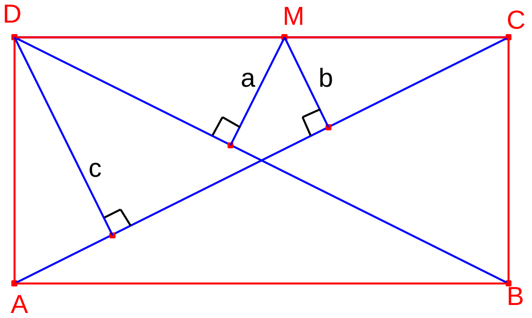
Els triangles $\overset{\Delta}{DNB}$, $\overset{\Delta}{DCB}$ tenen la mateixa altura sobre la base $\overline{DC}$.

Aleshores:

$$S_{DNB} = \frac{1}{2} S_{DCB}.$$

$$S_{DMBN} = S_{DMB} + S_{DBN} = \frac{1}{2} S_{DAB} + \frac{1}{2} S_{DCB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

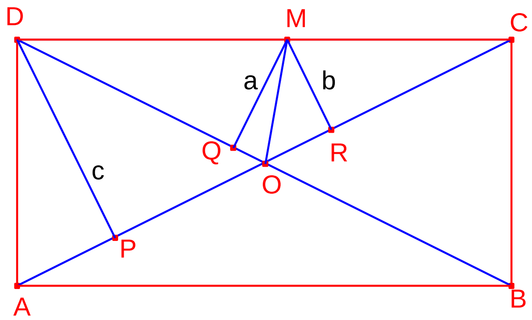
1069.- En la figura ABCD és un rectangle.



Siga M un punt qualsevol del costat $\overline{CD}$.
Proveu que $c = a + b$.

Solució:
Siga O el centre del rectangle ABCD.
$\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD}$

Les superfícies dels triangles $\overset{\Delta}{AOD}$, $\overset{\Delta}{CDO}$ són iguals a la quarta part del rectangle ABCD.

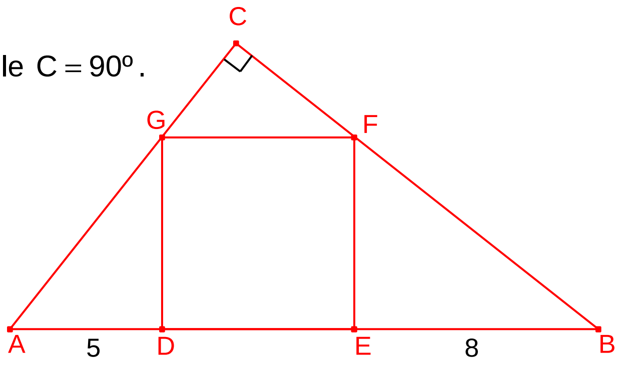


$S_{AOD} = \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot c$.

$S_{CDO} = S_{DMO} + S_{CMO} = \frac{1}{2}\overline{OD} \cdot a + \frac{1}{2}\overline{OC} \cdot b$.

Aleshores, $c = a + b$.

1070.- En la figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle $C = 90^{o}$.



DEFG és un quadrat.

$\overline{AD} = 5, \overline{BE} = 8$.

Calculeu l'àrea del quadrat DEFG.

Solució:

Siga $x = \overline{DE} = \overline{DG}$ costat del quadrat.

$\angle AGD = \angle EBF$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADG}$, $\overset{\Delta}{FEB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{5}{x} = \frac{x}{8}$. Simplificant:

$x^2 = 40$.

L'àrea del quadrat DEFG és:

$S_{DEFG} = x^2 = 40$.