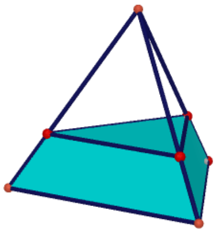
Problemes de Geometria per a l'ESO 108

1071.- Un tetraedre regular d'aresta 20cm conté aigua fins una altura de 5cm.
Calculeu el volum d'aigua.



Solució:

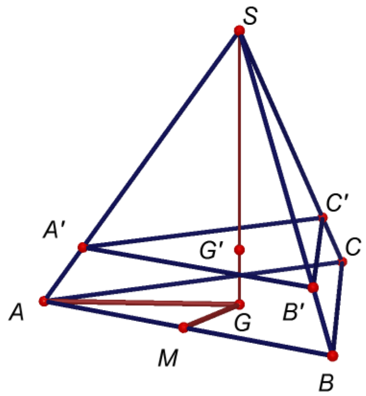
Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB}=20$.

Siga $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ la secció del tetraedre que forma l'aigua.

Siga G i G' els baricentres dels triangles equilàters $A\overset{\Delta}{B}C$, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$, respectivament.

$\overline{GG'}=5$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{M}G$:

$$\overline{AG}=\frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{G}S$:

$$\overline{SG}=\frac{20\sqrt{6}}{3}.$$

El volum del tetraedre ABCS és:

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}20^2\cdot\frac{20\sqrt{6}}{3}=\frac{2000\sqrt{2}}{3}.$$

$$\overline{SG'}=\frac{20\sqrt{6}}{3}-5.$$

Els tetraedres ABCS, A'B'C'S són semblant, els volums són proporcionals als cubs de la proporció de les arestes.

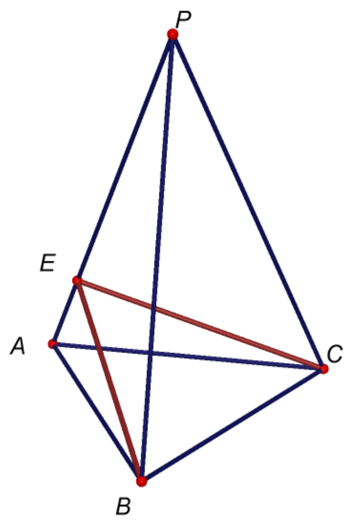
El volum del tetraedre A'B'C'S és:

$$V_{A'B'C''S}=\left(\frac{\frac{20\sqrt{6}}{3}-5}{\frac{20\sqrt{6}}{3}}\right)^3\frac{2000\sqrt{2}}{3}=\frac{5125\sqrt{2}}{6}-\frac{4125\sqrt{3}}{8}.$$

El volum que ocupa l'aigua és igual a la diferència dels volums dels tetraedres ABCS A'B'C'S:

$$V_{ABCA'B'C'S}=\frac{4125\sqrt{3}}{8}-\frac{375\sqrt{2}}{2}\approx 627.9237\text{cm}^3.$$

1072.- Siga la piràmide triangular regular ABCP de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que l'aresta de la base és 5.
Siga E un punt de l'aresta $\overline{AP}$ tal que l'aresta $\overline{AP}$ és perpendicular al plànol BEC i a més a més, $\frac{\overline{PE}}{\overline{AE}}=\frac{7}{2}$.
Calculeu la superfície de la piràmide.



Solució:
Siga $\overline{AE}=2x$, $\overline{PE}=7x$.
$\overline{AP}=\overline{BP}=9x$
El segment $\overline{BE}$ és perpendicular a l'aresta $\overline{AP}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$:

$$5^2=(2x)^2+\overline{BE}^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PEB}$:

$$(9x)^2=(7x)^2+\overline{BE}^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases}4x^2+\overline{BE}^2=5^2\\ -32x^2+\overline{BE}^2=0\end{cases}$$
. Resolent el sistema:

$$\begin{cases}x=\frac{5}{6}\\ \overline{BE}=\frac{10\sqrt{2}}{3}\end{cases}.$$

$$\overline{AP}=9x=\frac{15}{2}.$$

L'àrea lateral de la piràmide és:

$$S_L=3\left(\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{BE}\right)=3\left(\frac{1}{2}\frac{15}{2}\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{75\sqrt{2}}{2}.$$

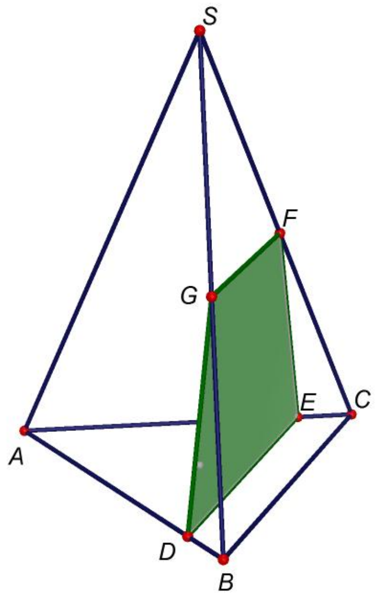
La superfície de la base és:

$$S_B=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2=\frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

L'àrea de la piràmide és:

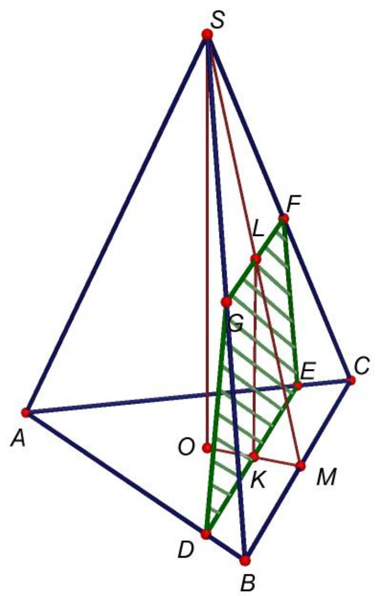
$$S_{ABCP}=\frac{25\sqrt{3}}{4}+\frac{75\sqrt{2}}{2}\approx 63.8583.$$

1073.- Siga ABCS la piràmide triangular regular d'aresta de la base 6 i altura 8.
Siguen D, E punst de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, respectivament, tal que $\overline{AD}=\overline{AE}=5$.
Determineu l'àrea de la secció de la piràmide que conté $\overline{DE}$ i és perpendicular a la base.



Solució:

Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
La secció és el trapezi DEFG.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siguen K, L els punts migs dels segments $\overline{DE}, \overline{FG}$, respectivament.



$\overset{\Delta}{ADE}$ és un triangle equilàter, aleshores, $\overline{DE}=5$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:
$\overline{OM}=\sqrt{3}$. Per la propietat del baricentre, $\overline{AO}=2\cdot\overline{OM}=2\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKD}$:

$$\overline{AK}=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

$$\overline{OK}=\overline{AK}-\overline{AO}=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Aleshores, K és el punt mig del segment $\overline{OM}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SOM}$, $\overset{\Delta}{LKM}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{KL}=\frac{1}{2}\overline{SO}=4.$$

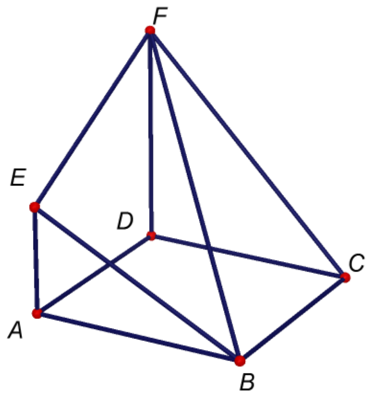
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{SBC}$, $\overset{\Delta}{SGF}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3.$$

L'àrea del trapezi DEFG és:

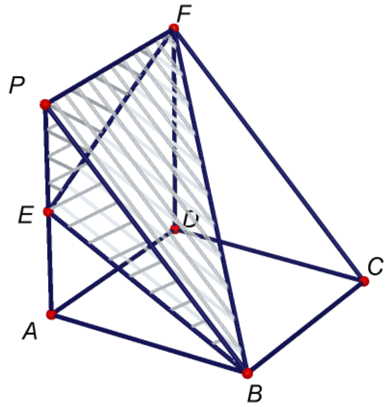
$$S_{DEFG}=\frac{\overline{DE}+\overline{FG}}{2}\overline{KL}=\frac{5+3}{2}4=16.$$

1074.- En la figura ABCD és un quadrat de costat 14.
Les arestes $\overline{DF} = 14$, $\overline{AE} = 7$ i són les dues perpendiculars a la base ABCD.
Calculeu el volum del poliedre.



Solució:
Siga P en la recta AE tal que $\overline{AP} = 7$.

ABPDCF és un prisma de bases paral·leles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{DCF}$.
El volum del poliedre ABCDEF és igual al volum del prisma ABPDCF menys el volum del tetraedre EPFB.



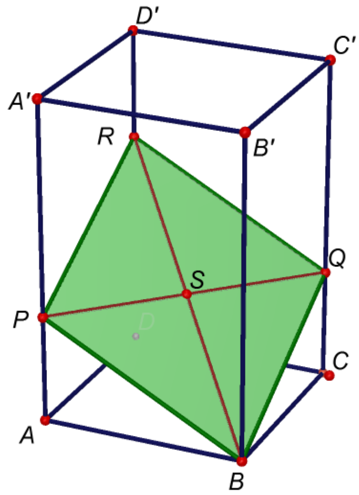
$$V_{ABPDCF} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}7^3 .$$

$$V_{EPFB} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\overline{PE}\cdot\overline{PF}\cdot\overline{AB} = \frac{1}{12}7^3 .$$

$$V_{ABCDEF} = V_{ABPDCF} - V_{EPFB} = \frac{1}{2}7^3 - \frac{1}{12}7^3 = \frac{1715}{12} \approx 142.9267 .$$

1075.- Un prisma quadrangular regular està tallat per un plànol de forma que la secció obtinguda és un rombe, un dels angles del qual és 2α.
Determineu l'angle diedre del plànol i la base del prisma.
Gúsiev, problema 754.

Solució:
Siga el prisma quadrangular regular ABCDA'B'C'D' d'aresta de la base $\overline{AB} = a$.
A fi que el plànol forme un rombe BPRQ, s'ha d'acomplir que $\overline{AP} = \overline{CQ}$.
Les diagonals del rombe són perpendiculars.
Siga S la intersecció de les diagonals.
Siga $2\alpha = \angle PBQ$.
Siga $\overline{AP} = \overline{CQ} = x$.
Siga $\beta = \angle RBD$ angle que forma el plànol i la base del prisma.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAP}$:

$$\overline{BP} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{PQ} = \overline{AC} = \overline{BD} = a\sqrt{2}.$$

$$\overline{PS} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BSP}$:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha.$$

$$x^2 = \frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BSP}$:

$$\overline{BS}^2 = a^2 - x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}a^2.$$

$$\overline{BR} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a\sqrt{2}.$$

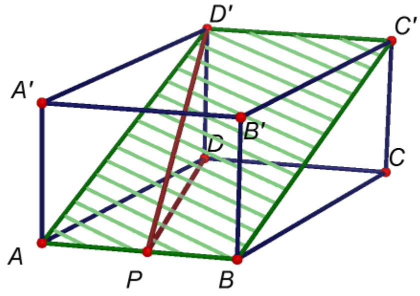
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DBR}$:

$$\cos\beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{BR}} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}a\sqrt{2}} = \mathrm{tg}\alpha.$$

$$\beta = \arccos(\mathrm{tg}\alpha).$$

1076.- En un paral·lelepípede recte (la base és un romboide), un dels angles de la base és α. La secció del paral·lelepípede formada per una aresta de la base, la longitud de la qual és a, i l'aresta oposada té àrea S i forma amb el plànol de la base un angle $90^{\circ}-\alpha$.
Determineu l'altre costat de la base.
Gúsiev, problema 729.

Solució:
Siga el paral·lelepípede ABCDA'B'C'D', tal que $\overline{AB}=a$, $\angle DAB=\alpha$.
Siga D la projecció de D sobre l'aresta $\overline{AB}$.
La secció ABC'D' i la base formen un angle $90^{\circ}-\alpha$, aleshores:

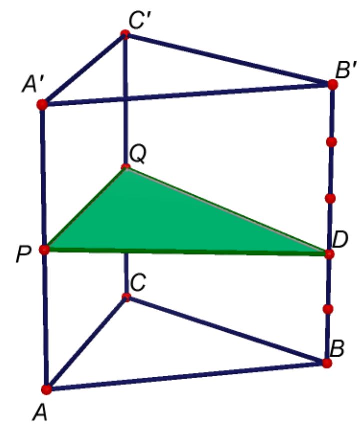


$\angle D'PD=90^{\circ}-\alpha$.
Siga $x=\overline{AD}$ l'altra aresta de la base.
Siga $y=\overline{DP}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:
$\frac{y}{x}=\sin\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{D'PD}$:
$\frac{y}{\overline{PD'}}=\sin\alpha$.
De les dues expressions anteriors:
$x=\overline{PD'}$
La secció ABC'D' té àrea S:
$a\cdot\overline{PD'}=S$.
$a\cdot x=S$. Aleshores:
$x=\frac{S}{a}$.

1077.- El plànol secant passa pels punts P, Q, punts migs de les arestes $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$, respectivament, dels prisma triangular regular ABCA'B'C'.
El punt D pertany a l'aresta $\overline{BB'}$ tal que $\overline{BD}:\overline{B'D}=2:3$.
Determineu l'àrea de la secció que determina el plànol en el prisma si totes les arestes del prisma són iguals a a.
Gúsiev, problema 734.



Solució:

La secció és el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQD}$, $\overline{PD}=\overline{QD}$.

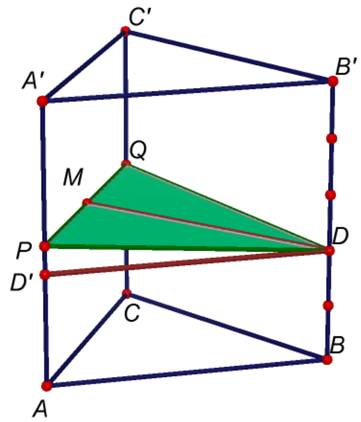
$\overline{BD}=\frac{2}{5}a$. $\overline{AP}=\overline{CQ}=\frac{1}{2}a$.

$\overline{PQ}=a$.

Siga D' la projecció de D sobre l'aresta $\overline{AA'}$.

$\overline{PD'}=\overline{AP}-\overline{BD}=\frac{1}{10}a$.

$\overline{DD'}=\overline{AB}=a$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PD'D}$:

$\overline{PD}=\frac{\sqrt{101}}{10}a$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

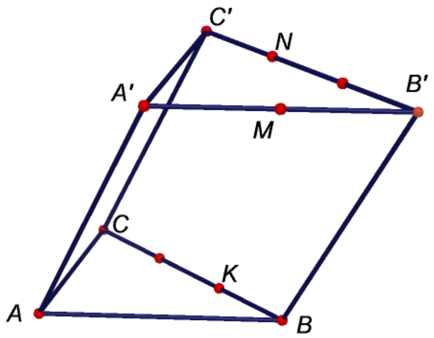
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMD}$:

$\overline{DM}=\frac{\sqrt{19}}{5}a$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQD}$ és:

$$S_{PQD}=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{DM}=\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{19}}{5}a=\frac{\sqrt{19}}{10}a^2.$$

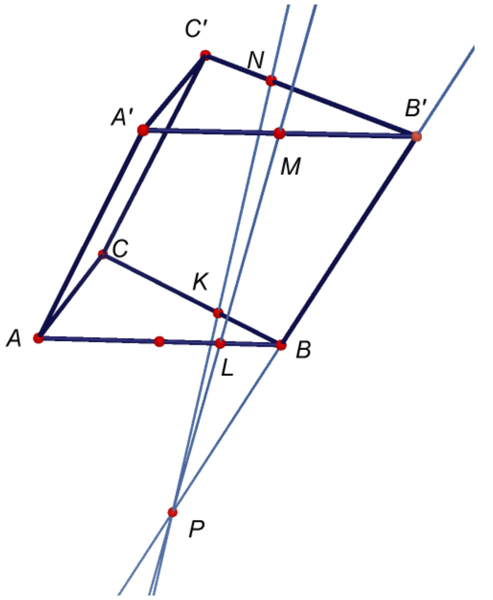
1078.- Donat el prisma triangular ABCA’B’C’. Determineu en quina raó divideix el volum del prisma un plànol secant que passa pels punts M, N, K de les arestes $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{BC}$, respectivament, si $\overline{B'M}:\overline{A'B'}=1:2$, $\overline{B'N}:\overline{B'C'}=2:3$ i $\overline{BK}:\overline{BC}=1:3$.
Gúsiev, problema 843.



Solució:
Siga el prisma oblic ABCA’B’C’ amb les següent mesures:
$\overline{AB}=2y$, $\overline{BC}=3x$, $\alpha=\angle ABC$.
$\overline{B'N}=2x$, $\overline{B'M}=y$, $\overline{BK}=x$.
Siga h l’altura del prisma.
El volum del prisma ABCA’B’C’ és:

$$V_{prisma}=\frac{1}{2}(3x)(2y)\sin\alpha\cdot h=3xyh\cdot\sin\alpha\ .$$

Siga L de l’aresta $\overline{AB}$ tal que $\overline{BL}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{2}y$.



La secció que determinen els punts M. N, K en el prisma és el quadrilàter MNKL.
Les rectes NK, BB’, ML s’intersecten en el punt P
Els tetraedres MB’NP, LBKP són semblants i de raó 2:1.
L’altura del tetraedre MB’NP és 2h.
El volum del tetraedre MB’NP és:

$$V_{MB'NP}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}(2x)y\cdot\sin\alpha\cdot 2h=\frac{2}{3}xyh\cdot\sin\alpha\ .$$

El volum del tetraedre LBKP és:

$$V_{LBKP}=\frac{1}{8}V_{MB'NP}=\frac{1}{12}xyh\cdot\sin\alpha\ .$$

El volum del poliedre MB’NLBK és igual a la diferència dels volums dels dos tetraedres:

$$V_1=V_{MB'NP}-V_{LBKP}=\frac{7}{12}xyh\cdot\sin\alpha\ .$$

El volum del poliedre MNC’A’LKCA és igual a la diferència dels volums del prisma i del poliedre MB’NLBK:

$$V_2=V_{prisma}-V_{MB'NLBK}=\left(3-\frac{7}{12}\right)xyh\cdot\sin\alpha=\frac{29}{12}xyh\cdot\sin\alpha\ .$$

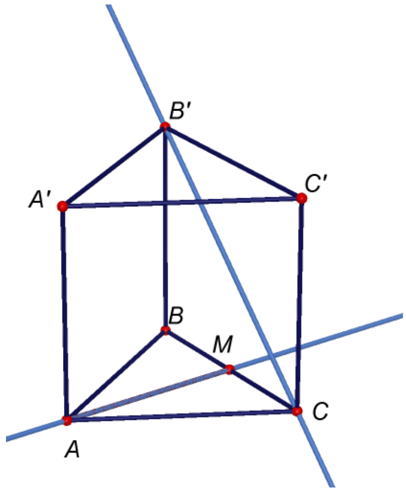
La proporció entre els volums dels dos poliedres en què queda dividit el prisma pel plànol MNK.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{7}{12}xyh\cdot\sin\alpha}{\frac{29}{12}xyh\cdot\sin\alpha}=\frac{7}{29}\ .$$

1079.- Siga el prisma triangular regular ABCA'B'C' que té totes les arestes iguals a a.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Calculeu la distància entre les rectes AM i B'C.



Solució:

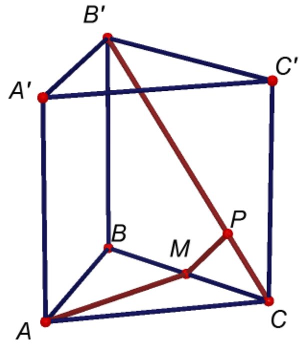
Siga P la projecció de M sobre la recta B'C.

La distància mínima entre les rectes AM i B'C és igual a la distància entre M i P.

Notem que MP és perpendicular comuna a ambdues rectes.

El triangle $\overset{\Delta}{MPC}$ és rectangle i isòsceles.

$\overline{MC} = \frac{1}{2}a$.



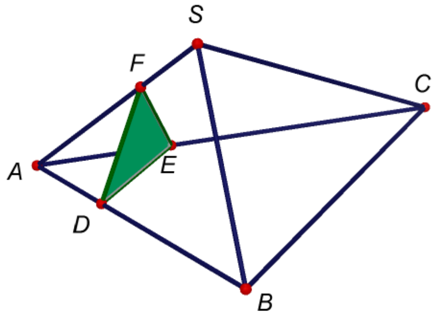
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPC}$:

$\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

1080.- Siga el tetraedre ABCS.

Siguen els punts D, E, F sobre les arestes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AS}$, respectivament, tals que $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AD}$, $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{AE}$, $\overline{AF} = 2 \cdot \overline{SF}$.

Determineu la proporció entre els volums dels dos sòlids en què divideix el tetraedre ABCS el plànol que formen els punts D, E, F.



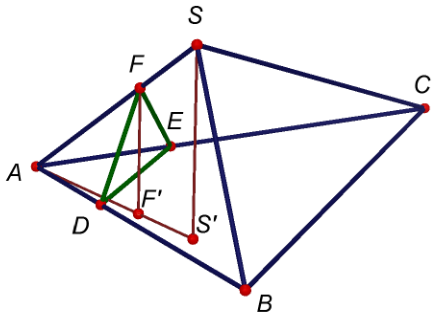
Solució:

Siga S' la projecció de S sobre el plànol base ABC.

Siga $\overline{SS'} = h$ altura del tetraedre ABCS.

Siga F' la projecció de F sobre el plànol base ABC.

Els volum del tetraedre ABCS és:



$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 1:3.

$$S_{ADE} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABC} = \frac{1}{9} S_{ABC}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AF'F}$, $\overset{\Delta}{AS'S}$ són semblants i de raó 2:3.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{FF'} = \frac{2}{3} \overline{SS'} = \frac{2}{3} h.$$

Els plànol DEF divideix el tetradre inicial ABCS en un tetraedre ADEF i el poliedre de vèrtexs DEFBCS.

El volum del tetraedre ADEF és:

$$V_{AFDE} = \frac{1}{3} S_{ADE} \cdot 2h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABC} \cdot 2h = \frac{2}{27}\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{2}{27} V_{ABCS}.$$

El volum del políedre DEFBCS és igual a la diferència dels volum dels tetraedres ABCS i ADEF:

$$V_{DEFBCS} = V_{ABCS} - V_{AFDE} = V_{ABCS} - \frac{2}{27} V_{ABCS} = \frac{25}{27} V_{ABCS}.$$

La raó entre els volums dels dos sòlids és:

$$\frac{V_{AFDE}}{V_{DEFBCS}} = \frac{\frac{2}{27} V_{ABCS}}{\frac{25}{27} V_{ABCS}} = \frac{2}{25}.$$