Problemes de Geometria per a l'ESO 109

1081.- En la figura ABCD és un rectangle $\overline{AB} = 8cm$, $\overline{BC} = 10cm$.

El segment $\overline{OH}$ és perpendicular a la base ABCD.

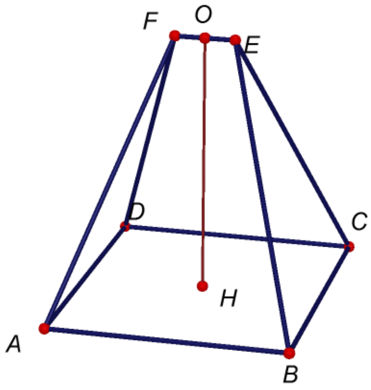
$\overline{OH} = 5\sqrt{3}cm$.

El segment $\overline{FE}$ és paral·lel a la base ABCD.

$\overline{FE} = 2cm$

$\overline{FA} = \overline{FD} = \overline{EB} = \overline{EC}$.

Calculeu el volum del sòlid.

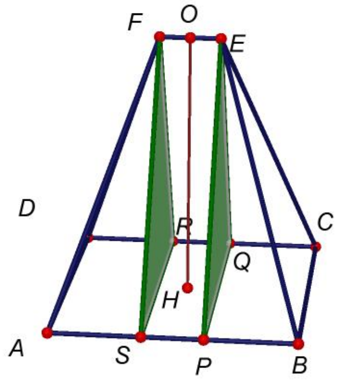


Solució:

Amb les condicions del problema H és el centre del rectangle ABCD.

Tracem el plànol que passa pel punt E perpendicular al segment $\overline{FE}$ que talla la base en els punts P, Q.

Tracem el plànol que passa pel punt F perpendicular al segment $\overline{FE}$ que talla la base en els punts R, S.



$\overline{SP} = \overline{FE} = 2$.

$\overline{PB} = \overline{AS} = 3$.

El volum del sòlid és igual al dues vegades el volum de la piràmide PBCQE (de base PBCQ) més la suma del volum del prisma PQESRF (de base PQE).

$$V_{PBCQE} = \frac{1}{3}\overline{PB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{OH} = \frac{1}{3} 3 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}\ .$$

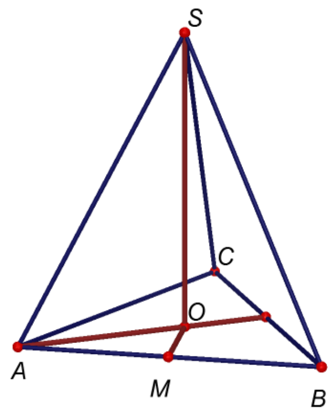
$$V_{PQESRF} = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot \overline{OH} \cdot \overline{SP} = \frac{1}{2} 10 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 2 = 50\sqrt{3}\ .$$

El volum del sòlid és:

$$V_{sòlid} = 2V_{PBCQE} + V_{PQESRF} = 150\sqrt{3} \approx 259.81cm^3\ .$$

1082.- En una piràmide triangular regular l'altura és igual a l'aresta de la base. Determineu l'angle que forma una aresta lateral i la base.
Gúsiev, problema 632.

Solució:



Siga ABCS la piràmide regular d'aresta de la base $\overline{AB} = a$.

Siga O el baricentre de la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{SO} = a$, altura de la piràmide.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

L'angle que forma l'aresta lateral $\overline{AS}$ i la base és $\alpha = \angle SAO$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$;

$$\overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

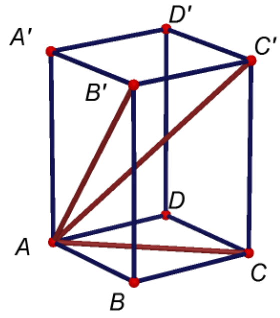
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \sqrt{3}.$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{3} = 60^{\circ}.$$

1083.- La diagonal d'un prisma quadrangular regular forma una angle de 45º amb la base.
Determineu l'angle que forma la diagonal amb la diagonal d'una cara que la intersecta.
Gúsiev, problema 634.

Solució:



Siga ABCDA'B'C'D' el prima regular d'aresta de la base $\overline{AB} = a$.

$\angle C'AC = 45^o$ diagonal del cub.

Siga $\alpha = \angle C'AB'$ angle que forma la diagonal $\overline{AC'}$ i $\overline{AB'}$ diagonal de la cara ABB'A'.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ACC'}$ és rectangle i isòsceles:

$\overline{CC'} = \overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$\overline{AC'} = 2a$.

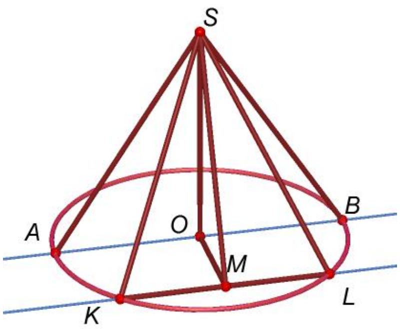
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

$\alpha = \arcsin\dfrac{1}{2} = 30^o$.

1084.- L'angle de la secció axial d'un con és 2α.
Pel vèrtex es traça un plànol que forma un angle β amb l'altura del con.
Determineu l'angle entre les generatrius per les quals el plànol talla la superfície del con.
Gúsiev, problema 635.

Solució:



Siga el con de centre de la base O i vèrtex S.
Siga $\overline{AB}$ un diàmetre de la base.
$\angle ASB = 2\alpha$.
Siga $\overline{AS} = g$ generatriu del con.

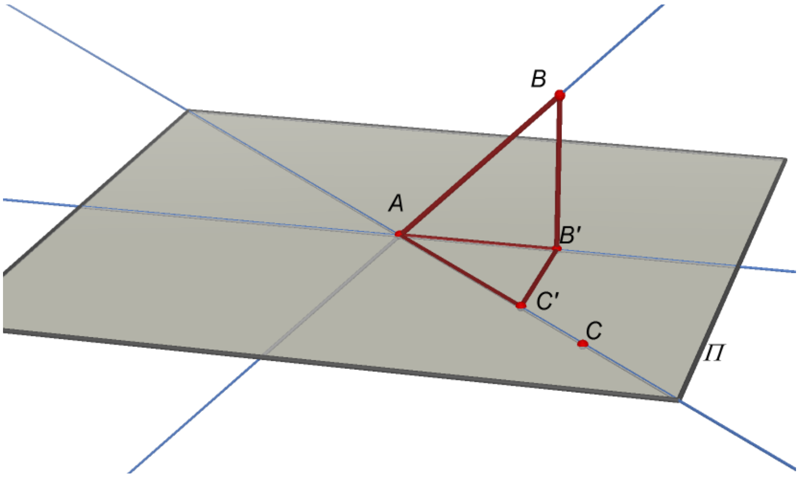
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:
$\overline{OS} = g \cdot \cos\alpha$.
Siga SKL el plànol que talla el con.
Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$.
L'angle que forma el plànol SKL i l'altura $\overline{OS}$ és $\beta = \angle OSM$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:
$$\overline{SM} = \frac{\overline{OS}}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} g.$$
Siga $\gamma = \angle KSL$ l'angle que formen les generatrius $\overline{SK}, \overline{sL}$ que determinen el plànol SKL.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMS}$:
$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SK}} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} g}{g} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$
$$\frac{\gamma}{2} = \arccos\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$
$$\gamma = 2\arccos\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

1085.- La recta AB talla el plànol Π formant un angle de 45º.
La projecció d'aquesta recta sobre el plànol Π forma un angle de 45º amb la recta AC continguda en el plànol.
Determineu la mesura de l'angle $\angle BAC$.
Gúsiev, problema 631.

Solució:



El punt A pertany al plànol Π.
Siga B' la projecció de B sobre el plànol Π.
$\angle BAB' = 45^{\circ}$
Siga $\overline{AB} = 2a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AB'B}$:
$\overline{AB'} = \overline{BB'} = a\sqrt{2}$.
Siga C' de la recta AC tal que $\angle AB'C' = 90^{\circ}$.
$\angle AB'C' = 45^{\circ}$.

El triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$ és rectangle i isòsceles:
$\overline{B'C'} = \overline{AB'} = a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{AB'C'}$:
$\overline{AC'} = 2a$.

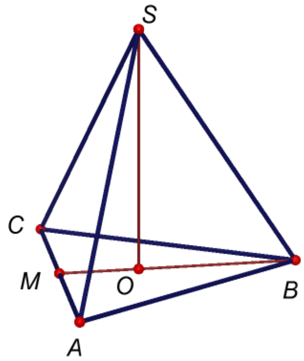
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{BB'C'}$:
$\overline{BC'} = 2a$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC'}$ és equilàter, aleshores, $\angle BAC = 60^{\circ}$.

1086.- En una piràmide regular triangular l'angle diedre de l'aresta de la base és α.
Determineu l'angle que forma l'aresta lateral i la base.
Gúsiev, problema 705.

Solució:

Siga ABCS la piràmide regular de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$.
Siga O el baricentre del triangle de la base.
$\overline{SO}$ és l'altura de la piràmide ABCS.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.
L'angle diedre de l'aresta de la base $\overline{AC}$ és $\angle SMB = \alpha$.
L'angle que forma l'aresta lateral $\overline{SB}$ i la base és $\angle SBO = \beta$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a, \quad \overline{OB} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$\overline{SO} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOB}$:

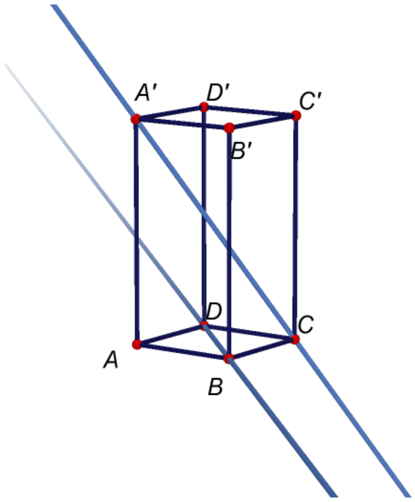
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{SO}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha.$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\right).$$

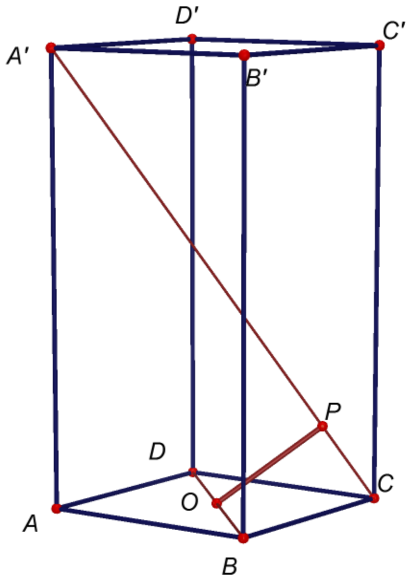
1087.- Calculeu el nombre de vèrtex d'un poliedre convex format per 60 triangles i 80 quadrilàters.

Solució:
El teorema d'Euler de poliedres convexos:
$C+V=A+2$.
El nombre de cores és:
$C=60+80=140$.
Una aresta està formada per la intersecció de dos costats de dues cares poligonals.
El nombre d'arestes és igual a la meitat del nombre del costats de totes cares poligonals:
$A=\frac{3\cdot 60+4\cdot 80}{2}=250$.
Aplicant la fórmula d'Euler:
$140+V=250+2$.
Resolent l'equació:
$V=112$.
El políedre té 112 vèrtexs.

1088.- Siga el prisma regular quadrangular ABCDA'B'C'D' tal que $\overline{AB}=2$, $\overline{AA'}=4$.
Calculeu la distància entre les rectes BD i A'C.



Solució:
La distància entre les dues rectes és igual a la distància entre els punts d'intersecció de la perpendicular comuna a les dues rectes i les dues rectes.
La perpendicular comuna passa pel centre O de la base ABCD i un punt P de la recta A'C tal que $\overline{OP}$ és perpendicular al segment $\overline{A'C}$.



Siga $\angle ACA' = \alpha$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 2\sqrt{2}$.
$\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'AC}$:
$\overline{A'C} = 2\sqrt{6}$.

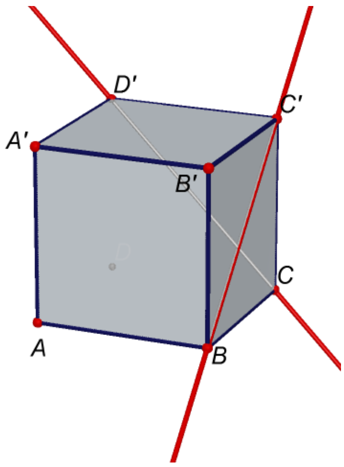
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{A'AC}$, $\overset{\Delta}{OPC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}}.$$

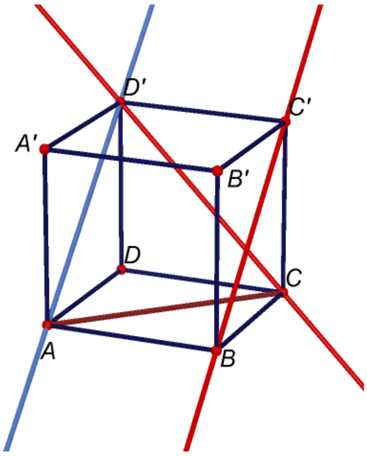
$$\frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{\overline{OP}}{\sqrt{2}}.$$

$$\overline{OP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

1089.- En el cub ABCDA’BC’D’ Calculeu l’angle de les rectes BC’, CD’.



Solució:



Les rectes BC’, AD’ són paral·leles.

$\overline{AD'} = \overline{AC} = \overline{BC'}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ACD'}$ és equilàter.

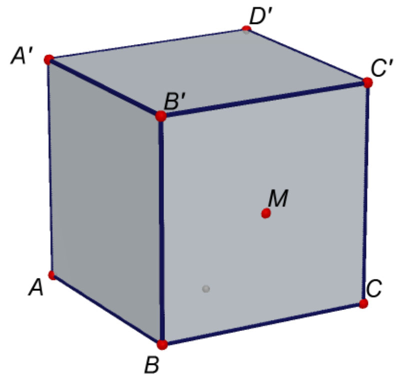
Les rectes CD’, AD’ formen 60º.

L’angle de es rectes CD’ i BC’ és igual a l’angle de les rectes CD’, AD’, és a dir, mesura 60º.

1090.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’.

La distància del vèrtex A al centre de la cara BCC’B’ és $2\sqrt{6}$.

Determineu l’aresta del cub.



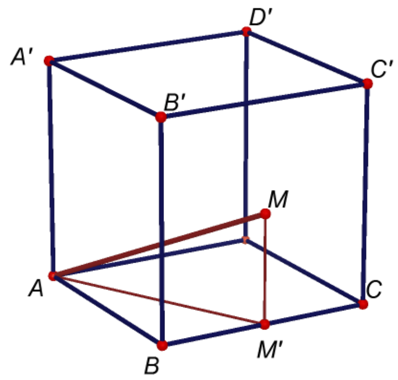
Solució:

Siga $\overline{AB}=a$ l’aresta del cub.

Siga M el centre de la cara BCC’B’.

$\overline{AM}=2\sqrt{6}$

Siga M’ el punt mig de l’aresta $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM'}$:

$$\overline{AM'}^2=a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{5}{4}a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AM'M}$:

$$\overline{AM}^2=\overline{AM'}^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{5}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{6}{4}a^2.$$

$$\overline{AM}=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Aleshores, $2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$. Resolent l’equació:

$a=4$.