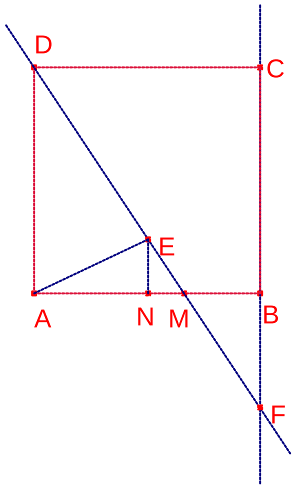
Problemes de Geometria per a l'ESO 11

101.- Siga el quadrat ABCD de costat 5. Siga M un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AM} = 2 \cdot \overline{MB}$. Les recte DM i BC s'intersecten en el punt F. Siga E el punt mig del segment $\overline{DF}$. Calculeu la mesura del segment $\overline{AE}$.
Olimpíada argentina 2005. Regional, nivell 3.



Solució:
$5 = \overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = 3 \cdot \overline{MB}$.

Aleshores, $\overline{MB} = \frac{5}{3}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DCF}$, $\overset{\Delta}{MBF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{BF}} .$$

$\dfrac{5}{\frac{5}{3}} = \dfrac{5 + \overline{BF}}{\overline{BF}}$. Resolent l'equació:

$$\overline{BF} = \frac{5}{2} .$$

Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{MB} = \frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{5}{6} .$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ENM}$, $\overset{\Delta}{FBM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{NE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BM}}$$

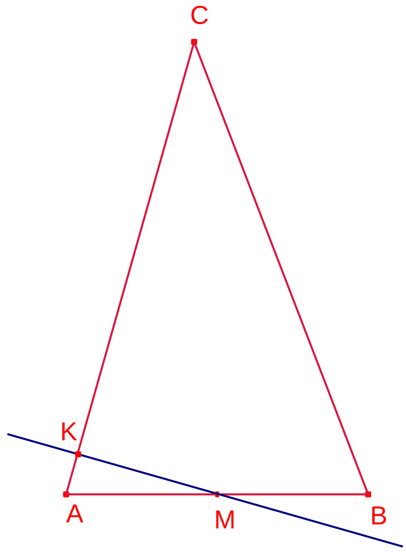
$\dfrac{\overline{NE}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}$. Resolent l'equació:

$$\overline{NE} = \frac{5}{4} .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANE}$:

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AN}^2 + \overline{NE}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{5} .$$

102.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=100$, $AC=156$. Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. La recta perpendicular al costat $\overline{AC}$ que passa per M talla el costa $\overline{AC}$ en el punt K i $\overline{AK}=14$. Calculeu la mesura del costat $\overline{BC}$.
Olimpíada argentina 2005. regional. Nivell 2



Solució:
$\overline{AM}=50$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKM}$:

$$\cos A=\frac{14}{50}=\frac{7}{25}.$$

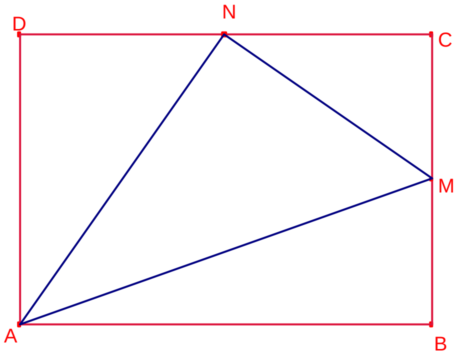
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{BC}^2=100^2+156^2-2\cdot 100\cdot 156\frac{7}{25}=25600.$$

Aleshores, $\overline{BC}=160$.

103.- Siga el rectangle ABCD $\overline{BC} < \overline{CD}$ i siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ respectivament. En aquest rectangle el triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és rectangle $\angle MNA = 90^{o}$. Si $\overline{BC} = 5$, calculeu la mesura del segment $\overline{CD}$.

Olimpíada Argentina 2008. Intercolegial. Nivell 3



Solució:

Siga $x = \overline{DN} = \overline{CN}$.

$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{5}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MCN}$, $\overset{\Delta}{NDA}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{AD}}.$$

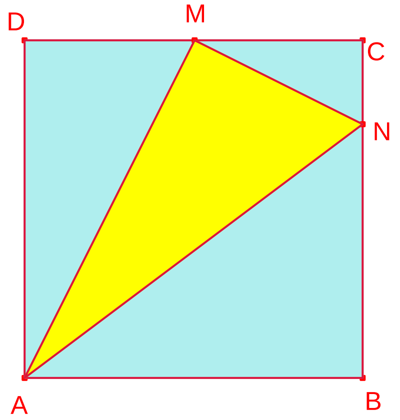
$$\frac{\frac{5}{2}}{x} = \frac{x}{5}.$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{CD} = 2x = 5\sqrt{2}.$$

104.- Siga el quadrat ABCD de costat a. Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$. Siga N un punt del costat $\overline{BD}$ tal que $\overset{\Delta}{AMN}$ és un triangle rectangle $M = 90^{o}$. Calculeu $\overline{CN}$ i l'àrea del triangle.



Solució:

$\overline{DM} = \overline{CM} = \frac{a}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MCN}$, $\overset{\Delta}{ADM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}}.$$

$$\frac{\overline{CN}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{a}.$$

Aleshores, $\overline{CN} = \frac{a}{4}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCN}$:

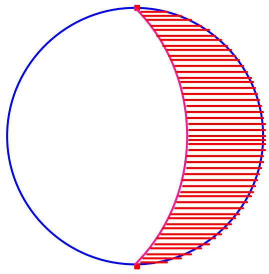
$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{5}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

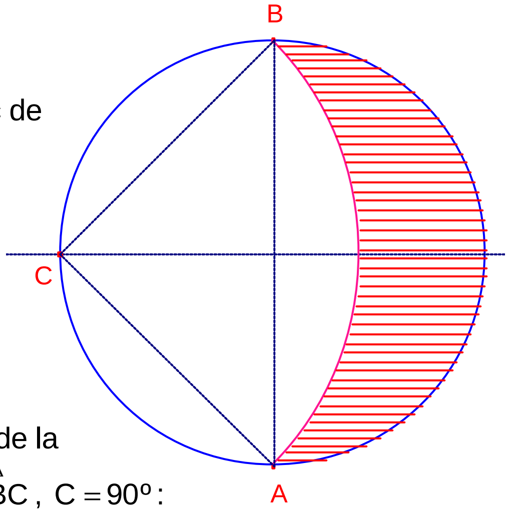
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMN}$:

$$S_{AMN} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MN}}{2} = \frac{5}{16}a^2.$$



105.- La frontera de l'ombra sobre la lluna es sempre un arc de cercle. Un cert dia, es constata que l'ombra de la lluna passa per dos punts diametralment oposat. Si el centre de l'arc que forma aquesta ombra es troba sobre la circumferència de la lluna, determineu la proporció exacta de la lluna que no està en la ombra, és a dir la que es veu.
Crux Mathematicorum. Totten-M2.

Solució:



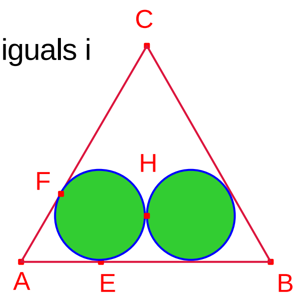
Siguen A, B els punts diametralment oposats que formen l'arc de la lluna.
El centre C de l'arc que forma l'ombra està en la mediatriu del segment $\overline{AB}$ i en la circumferència de la lluna.
Aleshores, $\angle ACB = 90^o$.

Siga R el radi de la circumferència de la lluna.
L'àrea de la lluna és:
$S_T = \pi \cdot R^2$.
Calculem el radi de l'arc de circumferència que forma l'ombra de la lluna, aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^o$:
$\overline{CA} = \overline{CB} = R\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S = \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{2}.$$
L'àrea del sector circular ACB de radi $\overline{CA}$ és:
$$S = \frac{1}{4}\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2.$$

L'àrea de la lluna menys l'ombra és igual a la meitat del cercle de radi R menys el segment circular AB.
$$S_v = \frac{1}{2}\pi R^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{2}\right) = R^2.$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_v}{S_T} = \frac{R^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{1}{\pi}.$$

106.- En la figura el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter i les circumferències són iguals i tangents entre elles i cadascuna a dos costats. Siguen E, F, H punts de tangència. Calculeu els angles del triangle $\overset{\Delta}{EFH}$.

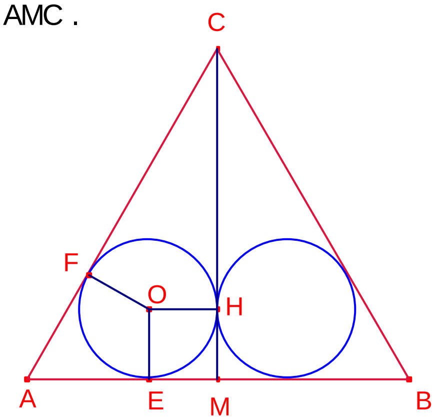


Si el costat del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 20 calculeu el radi de les dues circumferències iguals.

Solució:

Siga $\overline{CM}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
El punt de tangència H pertany a l'altura $\overline{CM}$.

Una de les circumferències està inscrita en el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$. Siga O el seu centre.



$\overline{OE}$ és perpendicular al costat $\overline{AB}$. Aleshores, $\angle AEO = 90^o$.
$\overline{OF}$ és perpendicular al costat $\overline{AC}$. Aleshores, $\angle AFO = 90^o$.
Aleshores, $\angle EOF = 120^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{EOF}$ és isòsceles, aleshores, $\angle OFE = \angle OEF = 30^o$.

$\overline{OH}$ és perpendicular al costat $\overline{CM}$. Aleshores, $\angle MHO = 90^o$, $\angle EOH = 90^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{EOH}$ és isòsceles, aleshores, $\angle OEH = \angle OHE = 45^o$.

$\angle FOH = 360^o - \angle EOF + \angle EOH = 150^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{HOF}$ és isòsceles, aleshores, $\angle OFH = \angle OHF = 15^o$.

Calculem els angles del triangle $\overset{\Delta}{EFH}$.
$E = \angle OEF + \angle OEH = 30^o + 45^o = 75^o$.
$F = \angle OFE + \angle OFH = 30^o + 15^o = 45^o$.
$H = 180^o - (E + F) = 180^o - (75^o + 45^o) = 60^o$.

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = 10.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

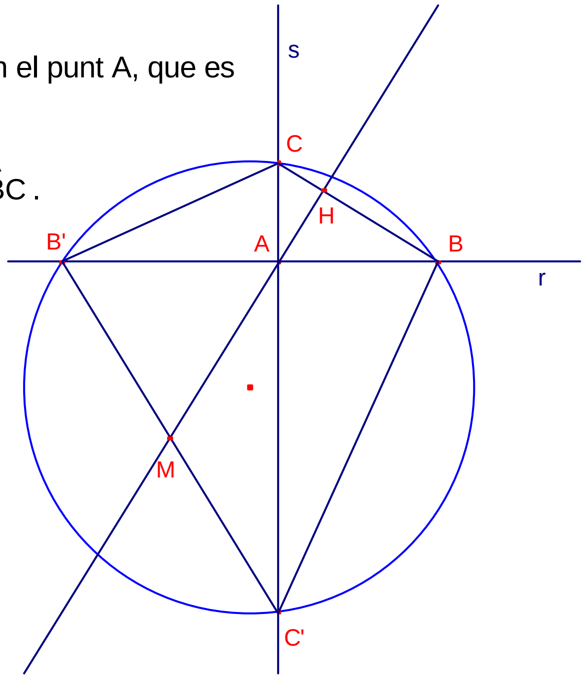
$$\overline{CM} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}.$$

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$.

$$r = \frac{\overline{AM} + \overline{CM} - \overline{AC}}{2} = \frac{10 + 10\sqrt{3} - 20}{2} = 5\sqrt{3} - 5 = 5\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

107.- Dues rectes es tallen perpendicularment en un punt interior a una circumferència, determinant quatre triangles rectangles amb les hipotenuses inscrites en la circumferència. Demostreu que l'altura sobre la hipotenusa de cada triangle és una mitjana del triangle oposat pel vèrtex.
UPC - Examen parcial de Geometria. 2004.

Solució:
Siguen les rectes perpendiculars r i s que es tallen en el punt A, que es tallen la circumferència en els punts B, C, B'. C'.



Siga AH la recta altura sobre el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
La recta altura talla la hipotenusa $\overline{B'C'}$ del triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$ en el punt M.
Hem de demostrar que M és el punt mig de la hipotenusa $\overline{B'C'}$.

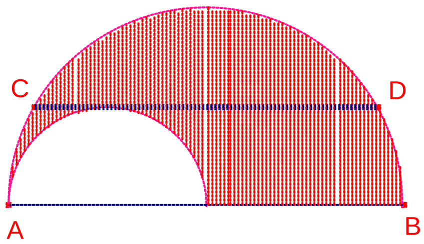
Siga $\alpha = \angle HAC$.
Aleshores, $\angle HAB = 90º - \alpha$.
Per tant, l'angle $\angle BAC = \alpha$.

$\angle MAC' = \alpha$ per ser oposat pel vèrtex a l'angle $\alpha = \angle HAC$.
$\angle B'C'C = \angle B'BC = \alpha$, per ser angles inscrits en una circumferència i abraçar el mateix arc.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AMC'}$ és isòsceles i $\overline{MC'} = \overline{MA}$.

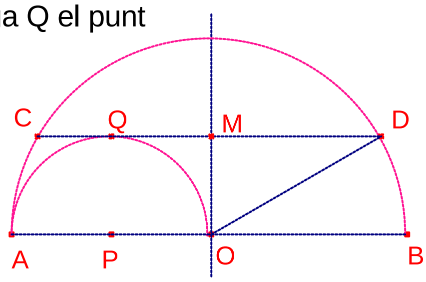
Anàlogament el triangle $\overset{\Delta}{AMB'}$ és isòsceles i $\overline{MB'} = \overline{MA}$.

Per tant, $\overline{MB'} = \overline{MC'}$, aleshores, M és el punt mig del segment $\overline{B'C'}$, és a dir, $\overline{AM}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$ oposat pel vèrtex del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

108.- En la figura adjunta mostra dos semicercles.
La corda $\overline{CD}$, de longitud 4 és paral·lela al diàmetre $\overline{AB}$ del semicercle gran i és tangent al semicercle menut.
El semicercle gran és seu diàmetre és el doble del diàmetre del semicercle menut.
Quina és l'àrea de la regió ombrejada?.
Proves Cangur 2007, problema 12.



Solució:
Siga O en centre de la semicircumferència gran.
Siga P el centre de la circumferència menuda.
Siga $r=\overline{OB}=\overline{OD}$, el radi de la semicircumferència gran.
El segment $\overline{CD}$ és tangent a la semicircumferència menuda. Siga Q el punt de tangència.
El radi de la semicircumferència menuda és:

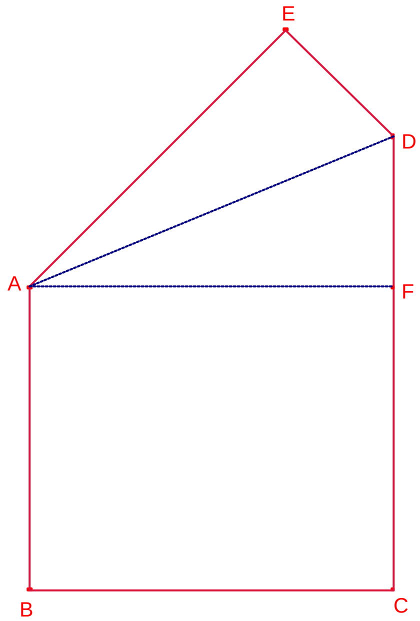


$\overline{PO}=\overline{PQ}=\frac{r}{2}$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{CD}$.
El triangle $\overset{\Delta}{OMD}$ és rectangle, $\overline{MD}=2$, $\overline{OM}=\overline{PQ}=\frac{r}{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$r^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+2^2$. Resolent l'equació en r:
$r=\frac{16}{3}$.
L'àrea ombrejada és la diferència entre el semicercle grani el menut:

$$S_{ombrejada}=\frac{1}{2}\left(\pi r^2\right)-\frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\right)=2\pi.$$

Generalització:
Si la longitud del segment $\overline{CD}=d$, l'àrea ombrejada és: $S_{ombrejada}=\frac{d^2}{8}\pi$.

109.- En un pentàgon ABCDE, $\overline{AB}=10\text{cm}$, $\overline{BC}=12\text{cm}$, $\overline{CD}=15\text{cm}$, $\overline{EA}=12\text{cm}$ i els angles B, C, E del pentàgon són rectes. Calculeu l'àrea del pentàgon.
OMA. Olimpíada Cabri 2002.



Solució:
Amb les dades podem construir el pentàgon.

Siga F la projecció de A sobre el costat $\overline{CD}$.
$\overline{FD}=\overline{CD}-\overline{BA}=15-10=5\text{cm}$.

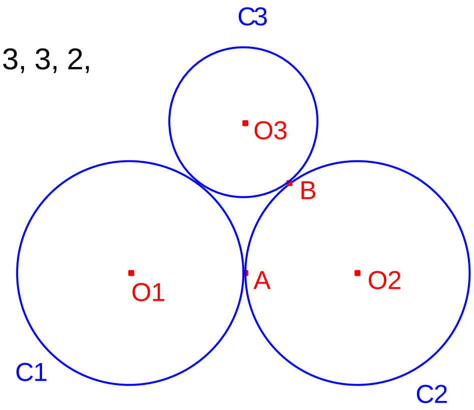
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFD}$:
$\overline{AD}=\sqrt{12^2+5^2}=13\text{cm}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:
$\overline{DE}=\sqrt{13^2-12^2}=5\text{cm}$

L'àrea del pentàgon ABCDE és igual a la suma de les àrees del rectangle ABCF, del triangle $\overset{\Delta}{AFD}$ i del triangle $\overset{\Delta}{AED}$.
$S_{ABCF}=12\cdot 10=120\text{cm}^2$.
$S_{AFD}=\dfrac{12\cdot 5}{2}=30\text{cm}^2$.
$S_{AED}=\dfrac{12\cdot 5}{2}=30\text{cm}^2$.

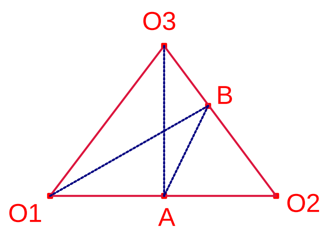
$S_{ABCDE}=S_{ABCF}+S_{AFD}+S_{AED}=120+30+30=180\text{cm}^2$.

110.- En la figura les circumferències C_1, C_2, C_3 tenen radis 3, 3, 2, respectivament i són tangents dos a dos.
Siguen A i B dos dels punts de tangència.
Calculeu la mesura dels segments $\overline{O_3A}$, $\overline{O_1B}$, $\overline{AB}$.
OMA. Olimpíada Cabri 2002.



Solució:
Considerem el triangle format pels centres de les tres circumferències.

$\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_3} = 5$.
$\overline{O_1O_2} = 6$.
$\overline{O_1A} = \overline{O_2A} = 3$
$\overline{O_2B} = 3$.
$\overline{O_3B} = 2$.



El triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2O_3}$ és isòsceles, per tant, $\overline{O_3A}$ és altura del triangle.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O_2\overset{\Delta}{A}O_3$:
$\overline{O_3A} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Siga $\alpha = \angle AO_2O_3$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $O_2\overset{\Delta}{A}O_3$:
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $O_1\overset{\Delta}{O_2}B$:
$\overline{O_1B}^2 = 6^2 + 3^2 - 2\cdot 6\cdot 3\cdot \cos\alpha$.
$\overline{O_1B}^2 = 6^2 + 3^2 - 2\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{3}{5}$.
$\overline{O_1B} = \frac{3}{5}\sqrt{65}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $A\overset{\Delta}{O_2}B$:
$\overline{AB}^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot \cos\alpha$.
$\overline{AB}^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot \frac{3}{5}$.
$\overline{AB} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$.