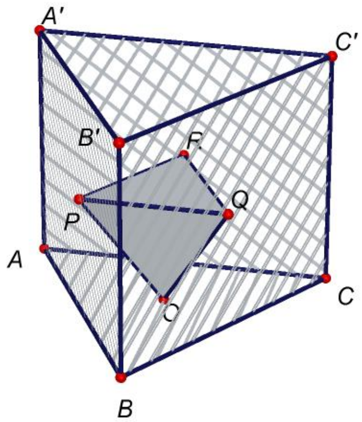
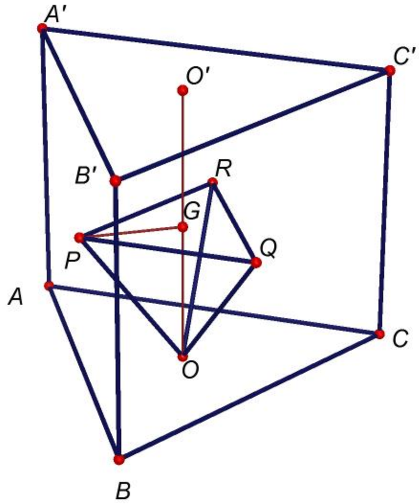
Problemes de Geometria per a l'ESO 110

1091.- En un prisma triangular regular els centres de les cares laterals i el centre de la base inferior formen un tetraedre regular.
Determineu la proporció entre els volums del prisma i el tetraedre.

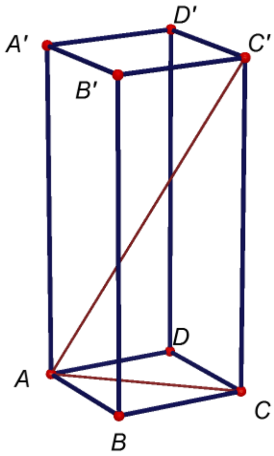


Solució:
Notem que l'aresta del tetraedre és igual a la meitat de l'aresta de la base del prisma i que l'altura del tetraedre és igual a la meitat de l'altura del prisma.
Siga OPQR el tetraedre regular que té els vèrtexs P, Q, R en els centres de les cares laterals del prisma regular ABCA'B'C' i O en el centre de la base inferior..



Siga $\overline{PQ} = a$.
Siga $h = \overline{GO}$ l'altura del tetraedre.
Siga S l'àrea de la base del tetraedre.
L'àrea de la base del prisma és $4S$
L'àresta de la base del prisma és $\overline{AB} = 2a$ i l'altura $\overline{AA'} = 2h$.
El volum del prisma és:
$V_{prisma} = 4S \cdot 2h$.
El volum del tetraedre és:
$V_{tetraedre} = \frac{1}{3} S \cdot h$.
La proporció entre els volums és:
$$\frac{V_{prisma}}{V_{tetraedre}} = \frac{8S \cdot h}{\frac{1}{3} S \cdot h} = 24 .$$

1092.- Un prisma regular quadrangular té volum $36cm^3$.
L'angle que formen en un vèrtex de la base la diagonal del prisma i la diagonal de la base és 60º.
Calculeu la superfície del prisma.



Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el prisma regular d'aresta de la base $\overline{AB} = a$ i altura $\overline{AA'} = h$.
Siga $\angle C'AC = 60º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$\overline{AC'} = \sqrt{2a^2 + h^2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC'}$.

$\overline{AC'} = 2a\sqrt{2}$.

$\overline{AC'} = \sqrt{2a^2 + h^2} = 2a\sqrt{2}$. Elevant al quadrat:

$2a^2 + h^2 = 8a^2$.

$h^2 = 6a^2$.

El volum del prisma és 36, aleshores:

$V = a^2 \cdot h = 36$.

$\frac{1}{6}h^2 \cdot h = 36$. Resolent l'equació:

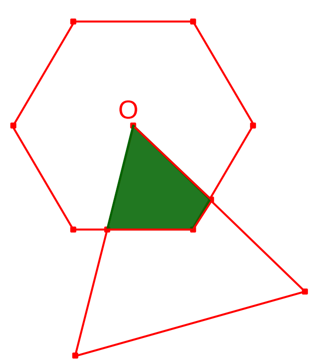
$h = 6$.

$a^2 = 6$.

$a = \sqrt{6}$.

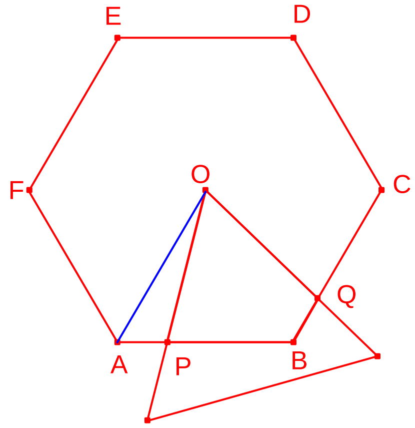
La superfície del prisma és:

$S = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 6 + 4\sqrt{6} \cdot 6 = 12 + 24\sqrt{6} \approx 70.79cm^2$.



1093.- Un triangle equilàter té el vèrtex en el centre O d'un hexàgon regular d'àrea 12cm^2.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada d'ambdós polígons.

Solució:



Siga ABCDEF l'hexàgon regular de centre O.
Siga OPBQ el quadrilàter format per la intersecció de l'hexàgon i el triangle equilàter.

$\angle AOB = \angle POQ = 60^{\circ}$.

Aleshores, $\angle AOP = \angle BOQ$.

$\angle OAP = \angle OBQ = 60^{\circ}$.

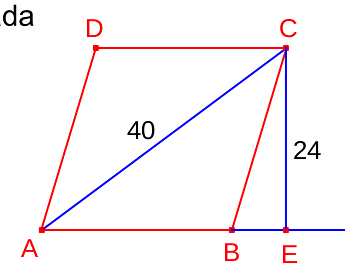
$\overline{OA} = \overline{OB}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{OAP}$, $\overset{\Delta}{OBQ}$ són iguals.

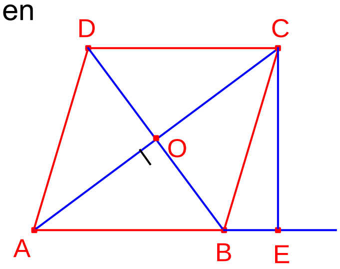
Aleshores, les àrees del polígon OPBQ i del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ són iguals.

Aleshores, $S_{OPBQ} = S_{OAB} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF} = \frac{1}{6} 12 = 2\text{cm}^2$.

1094.- Donat el rombe ABCD de diagonal $\overline{AC}=40$, l'altura traçada des del vèrtex C és $\overline{CE}=24$.
Determineu la mesura de l'altra diagonal.



Solució:
Siga $\overline{AB}=c$ costat del rombe.
Siga $\overline{BD}=d$ l'altra diagonal del rombe.
Les diagonals d'un rombe són perpendiculars i divideixen el rombe en quatre triangles rectangles iguals.
Siga O la intersecció de les diagonals.



$\overline{AO}=\frac{\overline{AC}}{2}=20$, $\overline{BO}=\frac{\overline{BD}}{2}=\frac{d}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$c^2=20^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

L'àrea del rombe ABCD és:

$$S_{ABCD}=\overline{AB}\cdot\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$

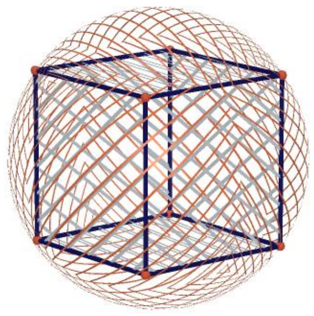
$$24c=\frac{1}{2}40d \qquad (2)$$

Considerem els sistema d'equacions format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} c^2=20^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ 24c=\frac{1}{2}40d \end{cases}. \text{ Resolent el sistema: } \begin{cases} c=25 \\ d=30 \end{cases}.$$

La mesura de l'altra diagonal del rombe és $\overline{BD}=30$.

1095.- Calculeu l'aresta i el volum d'un cub inscrit en una esfera de radi r.



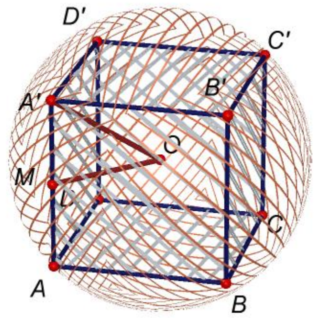
Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el cub d'aresta $a=\overline{AB}$.

$\overline{AA'}=a$.

Siga O el centre de l'esfera (centre del cub).

Siga M el punt mig de l'aresta lateral $\overline{AA'}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=a\sqrt{2}$.

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\overline{A'M}=\frac{1}{2}a$, $\overline{OA'}=r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA'}$:

$$r^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

$$a^2=\frac{4}{3}r^2.$$

El volum del cub és:

$$V_{cub}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^3=\frac{8\sqrt{3}}{9}r^3.$$

Nota: La proporció entre el volum del cub i de l'esfera és:

$$\frac{V_{cub}}{V_{esfera}}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{9}r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\approx 0.3676.$$

1096.- Calculeu l'angle que formen les diagonals d'un cub.

Solució:

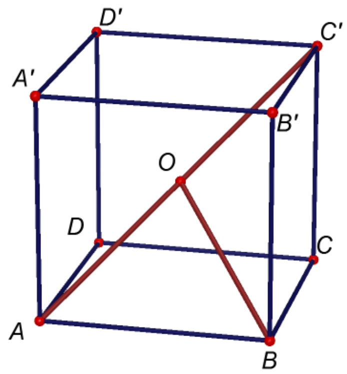
Siga ABCDA'B'C'D' el cub d'aresta $a = \overline{AB}$.

Siga O el centre del cub.

Aplicant el teorema de Pitàgores la diagonal del cub és:

$\overline{AC'} = a\sqrt{3}$.

$\overline{AO} = \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{AC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



Siga $\alpha = \angle AOB$ l'angle que formen dues diagonals.

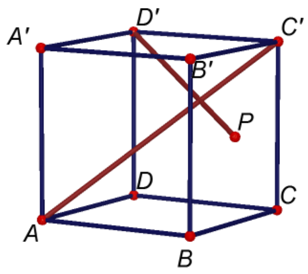
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $A\overset{\Delta}{O}B$:

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \cos\alpha .$$

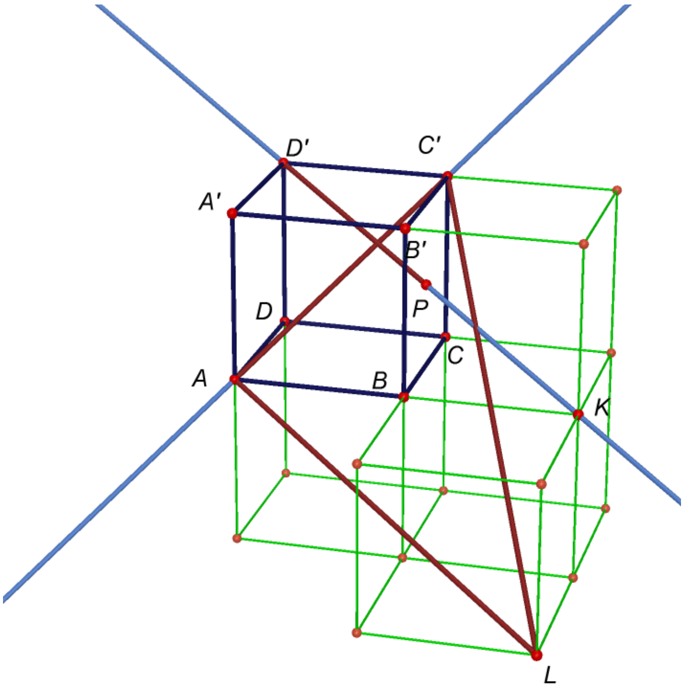
$$\cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 70º31'44''.$$

1097.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’.
Siga P el centre de la cara BCC’B’.
Determineu l’angle que formen la diagonal $\overline{AC'}$ i el segment $\overline{PD'}$.



Solució:



Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta 1.
La recta PD’ passa pel vèrtex K del cub adossat a la cara BCC’B’.
La recta paral·lela a la recta PD’ que passa pel vèrtex A passa pel vèrtex L (veure figura).
L’angle que formen les rectes PD’ AC’ és l’angle $\alpha = \angle C'AL$

$\overline{AC'} = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

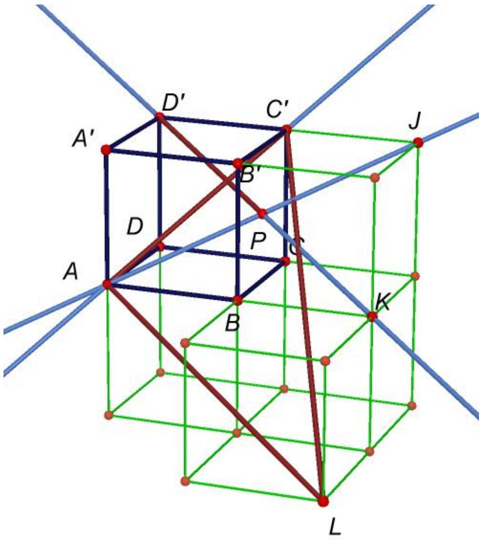
$\overline{AL} = \overline{D'K} = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$.

$\overline{LC'} = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$.

$\overline{LC'}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{AL}^2$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores:
$\alpha = \angle C'AL = 90^o$.

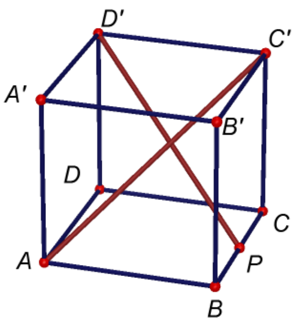
Nota: La recta AP passa pel vèrtex J del cub adossat a la cara BCC’B’.
C’ pertany al plànol APD’.
Aleshores, les rectes PD’ i AC’ és tallen en un punt.



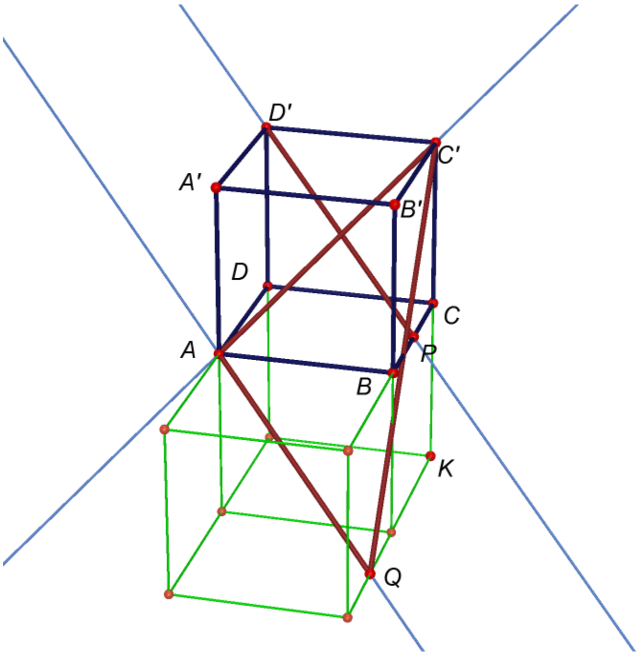
1098.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’.

Siga P el punt mig de l’aresta $\overline{BC}$.

Determineu l’angle que formen la diagonal $\overline{AC'}$ i el segment $\overline{PD'}$.



Solució:



Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta 1.

La recta PD’ passa pel vèrtex K del cub adossat a la cara BCC’B’.

La recta paral·lela a la recta PD’ que passa pel vèrtex A passa pel vèrtex Q (veure figura).

$\overline{KQ} = \frac{3}{2}$.

L’angle que formen les rectes PD’ AC’ és l’angle $\alpha = \angle C'AQ$

$\overline{AC'} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

$\overline{AQ} = \overline{D'P} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2}$.

$\overline{QC'} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $A\overset{\Delta}{Q}C'$:

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{9}$.

$\alpha = \arccos\frac{-\sqrt{3}}{9} \approx 101^{\circ}5'45''$.

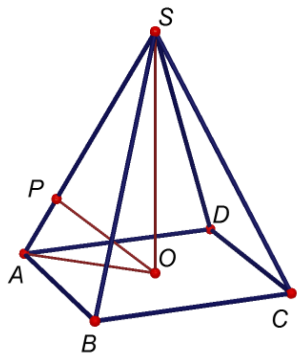
1099.- Siga la piràmide regular quadrangular d'aresta de la base a i altura h. Determineu la distància del centre de la base a l'aresta lateral.

Solució:

Siga la piràmide regular ABCDS de base el quadrat ABCD de costat a.

Siga O el centre de la base.

$\overline{OS} = h$.



Siga P la projecció de O sobre l'aresta lateral $\overline{AS}$.

La distància de O a l'aresta $\overline{AS}$ és igual a la mesura $d = \overline{OP}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\overline{AS} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 2a^2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AOS}$, $\overset{\Delta}{APO}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

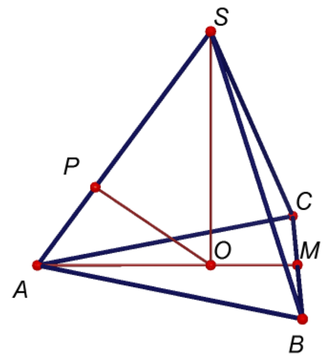
$$\frac{h}{\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 2a^2}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}.$$

$$d = \frac{ah\sqrt{2}}{\sqrt{4h^2 + 2a^2}}.$$

1100.- Siga la piràmide regular triangular d'aresta de la base a i altura h.
Determineu la distància del baricentre de la base a l'aresta lateral.

Solució:

Siga la piràmide regular ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.
Siga O el baricentre de la base.
$\overline{OS} = h$.
Siga P la projecció de O sobre l'aresta lateral $\overline{AS}$.
La distància de O a l'aresta $\overline{AS}$ és igual a la mesura $d = \overline{OP}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$;

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\overline{AS} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{3}a^2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AOS}$, $\overset{\Delta}{APO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{3}a^2}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{3}a}.$$

$$d = \frac{ah}{\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$