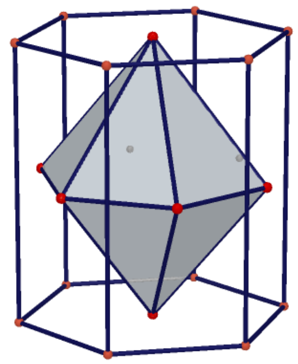
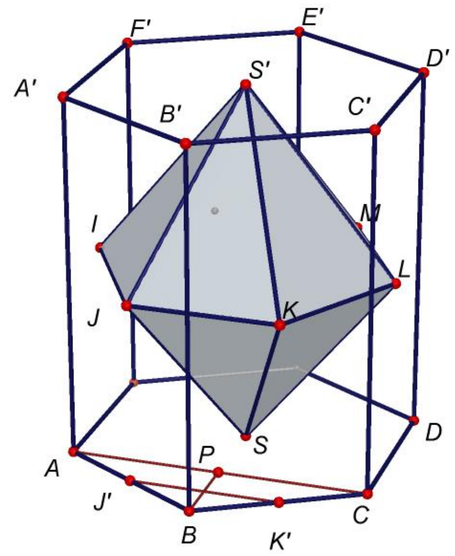
Problemes de Geometria per a l'ESO 111



1101.- Siga el prima regular hexagonal.
Determineu la proporció entre el volum del poliedre dual del prisma (aquell que té per vèrtexs els punts migs de les cares) i el volum del prisma.



Solució:
Siga el prisma regular hexagonal ABCDEFA'B'C'D'E'F' d'aresta de la base a i altura h.
El poliedre SIJKLMNS' dual és una dipiràmide.
Siga J' la projecció de J sobre l'aresta $\overline{AB}$.
Siga K' la projecció de K sobre l'aresta $\overline{BC}$.
Siga P el punt mig del segment $\overline{AC}$.
$\overline{JK} = \overline{J'K'} = \overline{AP}$.
$\angle CAB = 30^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

L'altura de cadascuna de les piràmides és $\frac{h}{2}$ i l'aresta de la base $\overline{JK} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

El volum de la dipiràmide és:

$$V_{diPiramide} = 2\left(\frac{1}{3}6\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2h.$$

El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot h.$$

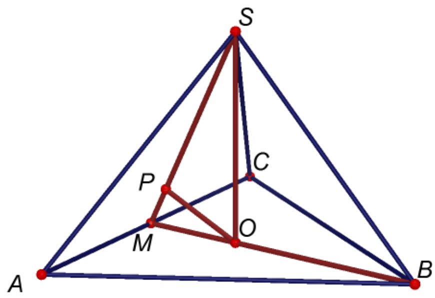
La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{diPiramide}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2h}{6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h} = \frac{1}{4}.$$

1102.- Siga la piràmide regular triangular d'aresta de la base a i altura h. Determineu la distància del baricentre de la base a una cara lateral.

Solució:

Siga la piràmide regular ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.
Siga O el baricentre de la base.
$\overline{OS} = h$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.
Siga P la projecció de O sobre el segment $\overline{MS}$.
La distància de O a la cara lateral és igual a la mesura $d = \overline{OP}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{MO} = \frac{1}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$\overline{MS} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{MOS}$, $\overset{\Delta}{MPO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}.$$

$$d = \frac{ah}{\sqrt{12h^2 + a^2}}.$$

1103.- Siga la piràmide regular quadrangular d'aresta de la base a i altura h. Determineu la distància del centre de la base a la cara lateral.

Solució:

Siga la piràmide regular ABCDS de base el quadrat ABCD de costat a.

Siga O el centre de la base.

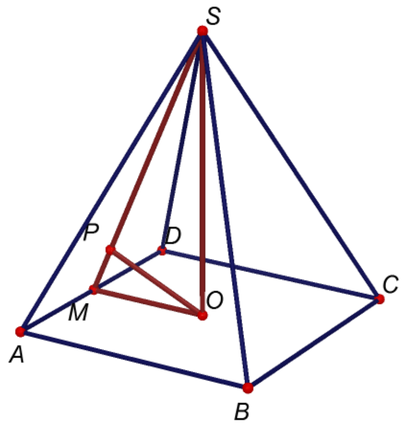
$\overline{OS} = h$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.

Siga P la projecció de O sobre el segment $\overline{MS}$.

La distància de O a la cara lateral és igual a la mesura

$d = \overline{OP}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$\overline{MS} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}.$$

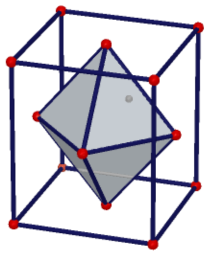
Els triangles $\overset{\Delta}{MOS}$, $\overset{\Delta}{MPO}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

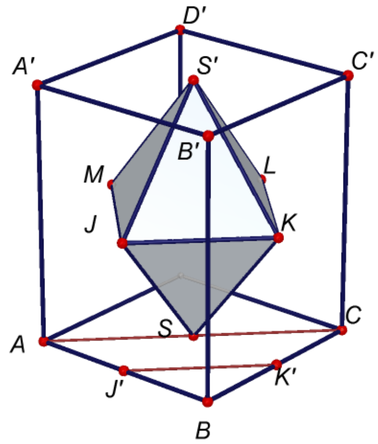
$$\frac{h}{\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}} = \frac{d}{\frac{1}{2}a}.$$

$$d = \frac{ah}{\sqrt{4h^2 + a^2}}.$$

1104.- Siga el prima regular quadrangular.
Determineu la proporció entre el volum del poliedre dual del prisma (aquell que té per vèrtexs els punts migs de les cares) i el volum del prisma.



Solució:
Siga el prisma regular quadrangular ABCDA'B'C'D' d'aresta de la base a i altura h.
El poliedre SJKLMS' dual és una dipiràmide.
Siga J' la projecció de J sobre l'aresta $\overline{AB}$.
Siga K' la projecció de K sobre l'aresta $\overline{BC}$.



$\overline{JK} = \overline{J'K'} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

L'altura de cadascuna de les piràmides és $\frac{h}{2}$ i l'aresta de la base $\overline{JK} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

El volum de la dipiràmide és:

$$V_{diPiramide} = 2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{6}a^2h.$$

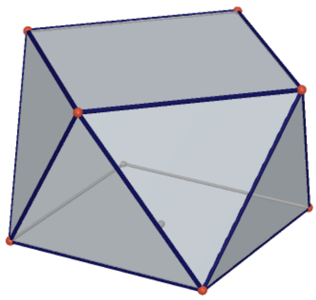
El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = a^2 \cdot h.$$

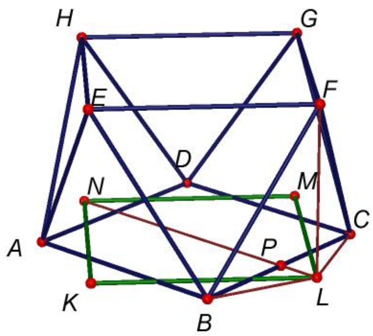
La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{diPiramide}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{1}{6}a^2h}{a^2h} = \frac{1}{6}.$$

1105.- Les base d'un antiprisma recte són dos quadrats de costat a.
L'altura de l'antiprisma és h.
Determineu el volum de l'antiprisma.

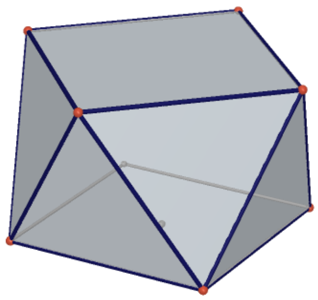


Solució:
Siga l'antiprisma ABCDEFGH de bases els quadrats ABCD, EFGH de costat a.
Siguen KLMN la projecció del quadrat EFGH sobre la base ABCD.
$\overline{EK} = h$ altura de l'antiprisma.
El volum de l'antiprisma és igual al volum del prisma octagonal de base AKBLCMDN i altura h menys el volum de vuit tetraedres iguals al tetraedre BLCF.

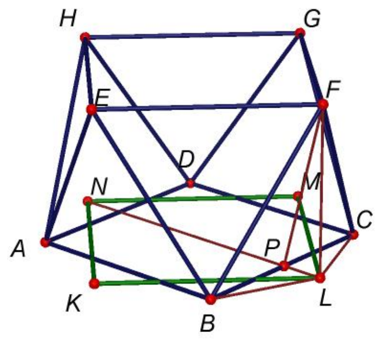


Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
$\overline{NL} = a\sqrt{2}$.
$\overline{PL} = \dfrac{\overline{NL} - a}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BLC}$ és:
$$S_{BLC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{PL} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a^2.$$
L'àrea de l'octògon regular AKBLCMDN és:
$$S_{oct} = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{BLC} = \sqrt{2}\, a^2.$$
El volum del tetraedre BLCF és:
$$V_{BLCF} = \frac{1}{3}S_{BLC} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}-1}{4}a^2h.$$
El volum del prisma octagonal de base AKBLCMDN i altura h és:
$$V_{prisma} = S_{oct} \cdot h = \sqrt{2}\, a^2h.$$
El volum de l'antiprisma és:
$$V_{ABCDEFGH} = V_{prisma} - 8 \cdot V_{BLCF} = \sqrt{2}\, a^2h - 8\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}-1}{4}a^2h\right) = \frac{1}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)a^2h.$$

1106.- Les base d'un antiprisma recte són dos quadrats de costat a.
L'altura de l'antiprisma és h.
Determineu l'àrea de l'antiprisma.



Solució:
Siga l'antiprisma ABCDEFGH de bases els quadrats ABCD, EFGH de costat a.
Siguen KLMN la projecció del quadrat EFGH sobre la base ABCD.
$\overline{EK} = h$ altura de l'antiprisma.
L'àrea de l'antiprisma és igual a dues vegades l'àrea del quadrat ABCD més l'àrea de vuit triangles iguals al triangle $\overset{\Delta}{BCF}$.



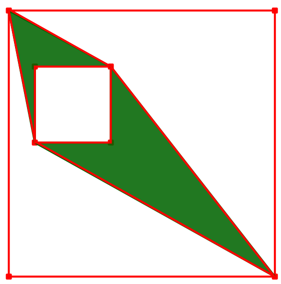
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
$\overline{NL} = a\sqrt{2}$.
$$\overline{PL} = \frac{\overline{NL} - a}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LPF}$:
$$\overline{PF} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + \left(3-2\sqrt{2}\right)a^2}.$$

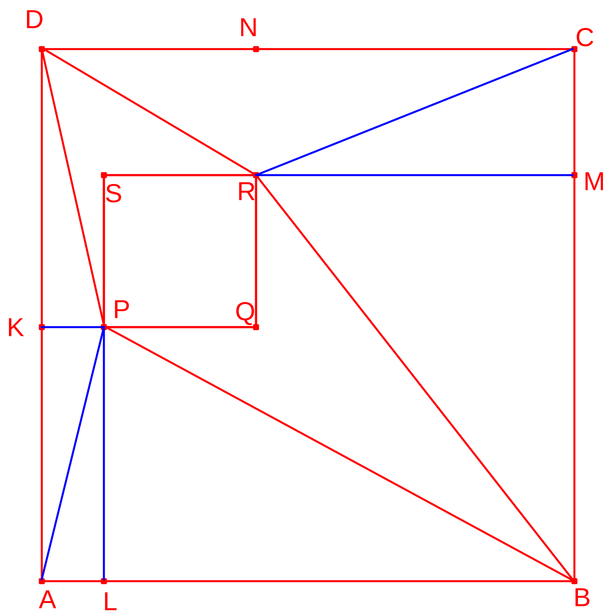
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCF}$ és:
$$S_{BCF} = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PF} = \frac{1}{4}\left(a\sqrt{4h^2 + \left(3-2\sqrt{2}\right)a^2}\right).$$

L'àrea de l'antiprisma és:
$$S_{ABCDEFGH} = 2S_{ABCD} + 8S_{BCF} = 2a^2 + 2a\sqrt{4h^2 + \left(3-2\sqrt{2}\right)a^2}.$$

1107.-En la figura hi ha dos quadrats, el menut té 2cm de costat i el gran 7cm.
Els costats dels dos quadrats són paral·lels.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat 7cm
Siga el quadrat PQRS de costat 2cm.
Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.
Siga L la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga M la projecció de R sobre el costat $\overline{BC}$.
Siga N la projecció de R sobre el costat $\overline{CD}$.
Siga $\overline{PK}=a, \overline{RM}=b$. Aleshores, $a+b=7-2=5$.
Siga $\overline{PL}=c, \overline{RN}=d$. Aleshores, $c+d=7-2=5$.



L'àrea de la zona ombrejada és igual a:

$$S=S_{ABCD}-\left(S_{PQRS}+S_{ADP}+S_{BCR}+S_{ABP}+S_{CDR}\right).$$

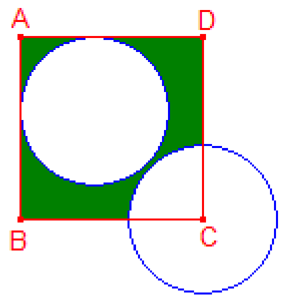
$$S=7^2-\left(2^2+\frac{1}{2}7a+\frac{1}{2}7b+\frac{1}{2}7c+\frac{1}{2}7d\right).$$

$$S=49-\left(4+\frac{1}{2}7(a+b)+\frac{1}{2}7(c+d)\right).$$

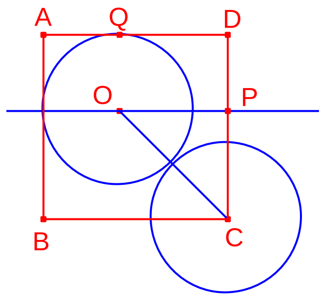
$$S=49-\left(4+\frac{1}{2}7\cdot 5+\frac{1}{2}7\cdot 5\right).$$

$$S=10cm^2.$$

1108.- En la figura hi ha el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=1+\sqrt{2}$ i dos cercles tangents d'igual radi.
Sabent que el cercle que sobresurt del quadrat té centre en el vèrtex C, determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga r el radi de les dues circumferències.
Siga O el centre de la circumferència interior del quadrat ABCD.
Siga Q el punt de tangència de la circumferència anterior i el costat $\overline{AD}$.
Siga P la projecció de O sobre el costat $\overline{CD}$.



$\overline{OC}=2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{CPO}$:

$\overline{CP}=r\sqrt{2}$.

$\overline{PD}=\overline{OQ}=r$.

$\overline{CD}=r\sqrt{2}+r=1+\sqrt{2}$.

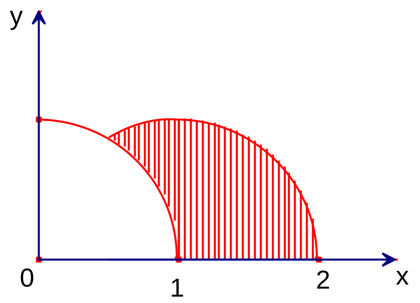
Resolent l'equació:

$r=1$.

L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys l'àrea de 5 quadrants de cercle de radi 1.

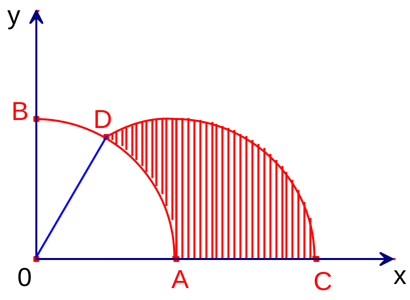
$$S=\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\frac{5}{4}\pi\cdot 1^2=3+2\sqrt{2}-\frac{5\pi}{4}\approx 1.9014 .$$

1109.- En la figura, dos arcs de radi 1 tenen els centres en l'eix d'abscisses.
Calculeu l'àrea de la regió ratllada.



Solució1:
Siga D la intersecció dels dos arcs.
$\overline{0A}=\overline{OD}=\overline{AD}=1$.

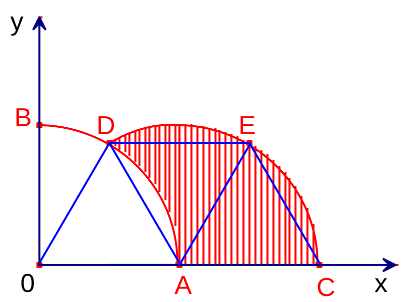
El triangle $\overset{\Delta}{0AD}$ és equilàter, aleshores:
$\angle DAC=120^{o}$.

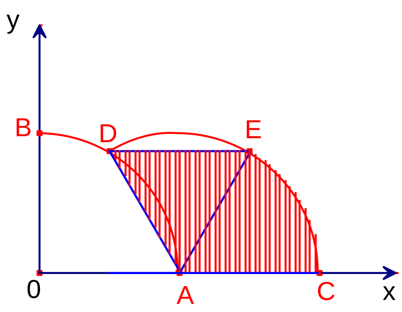


L'àrea ratllada és igual a l'àrea del sector de radi 1 i 120º menys l'àrea del segment circular de radi a i 60º.

$$S_{rat}=\frac{1}{3}\pi 1^2-\left(\frac{1}{6}\pi 1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}1^2\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Solució 2:





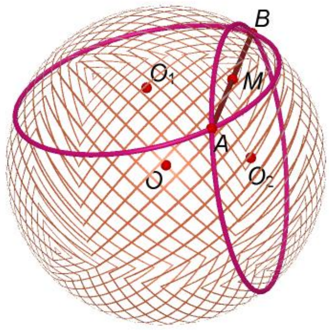
Siga D la intersecció dels dos arcs.
$\overline{0A}=\overline{OD}=\overline{AD}=1$.

El triangle $\overset{\Delta}{0AD}$ és equilàter, aleshores:
$\angle DAC=120^{o}$.
Siga $\overline{AE}$ la bisectriu de l'arc $\angle DAC=120^{o}$.
L'àrea ratllada és igual a l'àrea del sector de radi 1 i 60º més l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{AED}$ de costat 1.

$$S_{rat}=\frac{1}{6}\pi 1^2+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

1110.- En la superfície d'una esfera de radi R estan donades dues circumferències iguals que tenen una corda comuna de longitud a. Determineu el radi de les dues circumferències si les circumferències pertanyen a dos plànols perpendiculars.
Gúsiev, problema 854.

Solució:
Siga la circumferència de radi R i centre O.



Siga $\overline{AB} = a$ la corda comuna a les dues circumferències.
$a \leq 2R$.
Siguen O_1, O_2 els centres de les dues circumferències i
$\overline{O_1A} = \overline{O_2A} = r$ els seus radis.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
M pertany al plànol format pel centre de l'esfera i les dues circumferències ja que el plànol mediatriu de la corda $\overline{AB}$ passa pel centre de l'esfera.
$\overline{OO_1} = \overline{OO_2}$, $\angle O_1MO_2 = 90^o$, aleshores:
OO_2MO_1 és un quadrat.
Siga $\overline{OO_1} = \overline{OO_2} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OO_1M}$:

$$\overline{OM} = x\sqrt{2} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AO_1M}$:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$$R^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{8}a^2 \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (2):

$$r^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{8}a^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{8}a^2}.$$