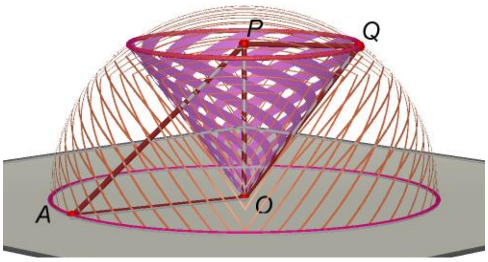
Problemes de Geometria per a l'ESO 112

1111.- En una semiesfera està inscrit un con, el vèrtex del qual coincideix amb el centre de la circumferència que serveix de base a la semiesfera.
El plànol de la base del con és paral·lel a la base de la semiesfera.
La recta que uneix el centre de la base del con amb qualsevol punt de la circumferència màxima de la semiesfera forma un angle α amb el plànol base de la semiesfera.
Determineu la raó entre els volums de la semiesfera i el con.
Gúsiev, problema 866.

Solució:
Siga O el centre de la base de la semiesfera.
Siga P el centre de la base del con.
Siga A un punt de la circumferència màxima de la semiesfera (circumferència base).

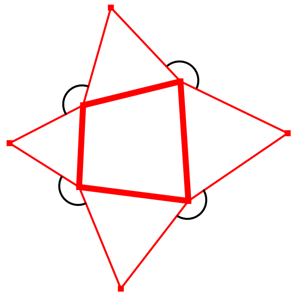


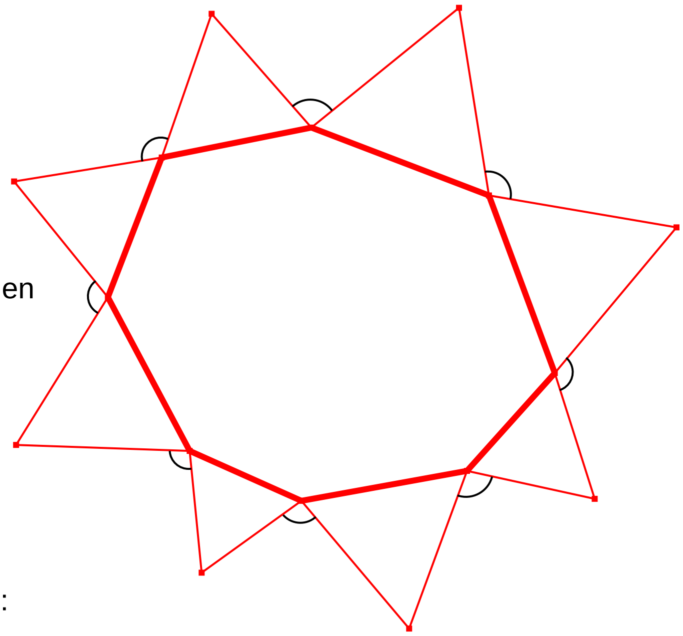
$\angle PAO = \alpha$.
Siga $\overline{OA} = R$ radi de la semiesfera.
El volum de la semiesfera és:
$$V_{se} = \frac{2}{3}\pi R^3.$$
Siga Q un punt de la circumferència base del con.
El radi del con és $\overline{PQ}$.
L'altura del con és $\overline{OP}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$:
$$\overline{OP} = R \cdot \text{tg}\alpha.$$
$$\overline{OQ} = R.$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$$\overline{PQ} = R\sqrt{1 - \text{tg}^2\alpha}.$$
El volum cel con és:
$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi\left(R\sqrt{1-\text{tg}^2\alpha}\right)^2 \text{tg}\alpha = \frac{1}{3}\pi\left(1-\text{tg}^2\alpha\right)\text{tg}\alpha \cdot R^3.$$
La raó entre els volums de la semiesfera i del con és:
$$\frac{V_{se}}{V_{con}} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi\left(1-\text{tg}^2\alpha\right)\text{tg}\alpha} = \frac{2}{\left(1-\text{tg}^2\alpha\right)\text{tg}\alpha}.$$

1112.-

a) Donat un quadrilàter com el de la figura, sobre cadascun dels costats i a la part exterior dibuixem triangles equilàters.
Determineu la suma de tots els angles que es formen entre triangles equilàters contigus.





b) Donat un octògon com el de la figura, sobre cadascun dels costats i a la part exterior dibuixem triangles equilàters.
Determineu la suma de tots els angles que es formen entre triangles equilàters contigus.

c) I si el polígon és de 100 costats?.

Solució:

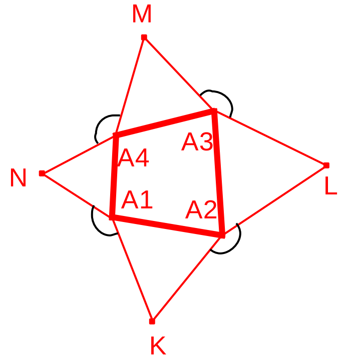
a)

La suma dels angles del quadrilàter $A_1A_2A_3A_4$ és:

$180º\cdot(4-2)$.

Cadascun dels vèrtex forma 360º amb la suma de l'angle del quadrilàter més dos angles de 60º del triangle equilàter i l'angle que cerquem.

Siga $A'_1 = \angle NA_1K$, $A'_2\ \angle KA_2L$, $A'_3 = \angle LA_3M$, $A'_4 = \angle MA_4N$.



$A_1 + 2\cdot 60 + A'_1 = 360º$.

$A_1 + A'_1 = 240º$. Anàlogament:

$A_2 + A'_2 = 240º$.

$A_3 + A'_3 = 240º$.

$A_4 + A'_4 = 240º$.

Sumant les quatre expressions:

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 = 4\cdot 240º$.

$180º\cdot 2 + A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 = 4\cdot 240º$.

$A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 = 4\cdot 240º - 180º\cdot(4-2) = 4\cdot 60º + 180º\cdot 2$.

$A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 = 4\cdot 60º + 180º\cdot 2 = 600º$.

b)

La suma dels angles del quadrilàter $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ és:

$$\sum_{i=1}^{8} A_i = 180^o \cdot (8-2).$$

Siga $A'_1 = \angle KA_1L$.

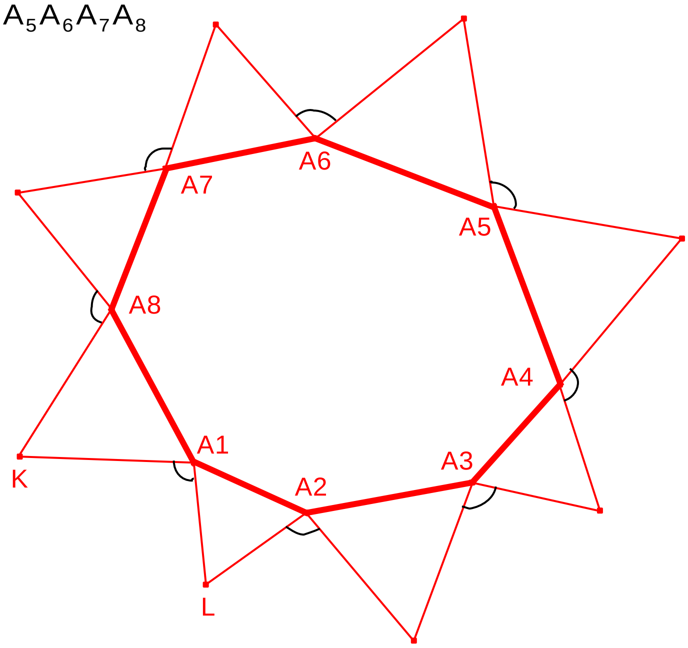
$A_1 + A'_1 = 240^o$.

Aleshores:

$$\sum_{i=1}^{8} A_i + \sum_{i=1}^{8} A_i = 8 \cdot 240^o.$$

$$\sum_{i=1}^{8} A_i = 8 \cdot 240^o - (8-2)180^o = 8 \cdot 60^o + 2 \cdot 180^o.$$

$$\sum_{i=1}^{8} A_i = 8 \cdot 60^o + 2 \cdot 180^o = 840^o.$$

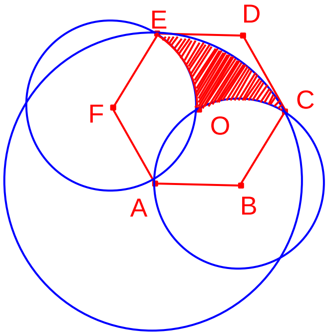


c)

Generalitzant el problema:

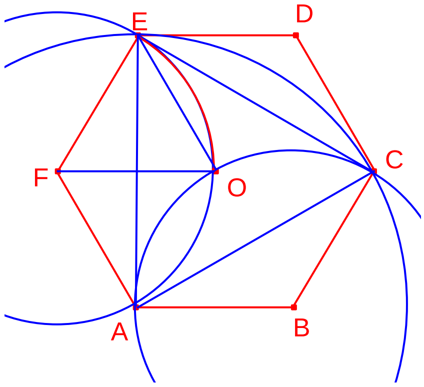
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = n \cdot 60^o + 2 \cdot 180^o.$$

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} A_i = 100 \cdot 60^o + 2 \cdot 180^o = 6360^o.$$



1113.- Siga l'hexàgon regular ABCDEF de centre O i costat a.
Siga la circumferència de centre A que passa pels punts C, E.
Siga la circumferència B que passa pels punts O, C.
Siga la circumferència de centre F que passa pels punts E, O.
Calculeu l'àrea ombrejada, limitada per les tres circumferències interior al triangle.

Solució:



Notem que la recta CE és tangent a les dues circumferències de centres B i F.
L'àrea ombrejada és igual a la suma de les àrees del segment circular $\overset{\frown}{CE}$ de centre A 60º, i radi $\overline{AC}$ i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCE}$ menys l'àrea de dos segments circulars $\overset{\frown}{OE}$, $\overset{\frown}{OC}$ de 60º i radi $\overline{AB}$.

$\overline{AC} = a\sqrt{3}$.

L'àrea del segment circular $\overset{\frown}{CE}$ és:

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)a^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCE}$ és igual a l'àrea del triangle equilàter de costat a:

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

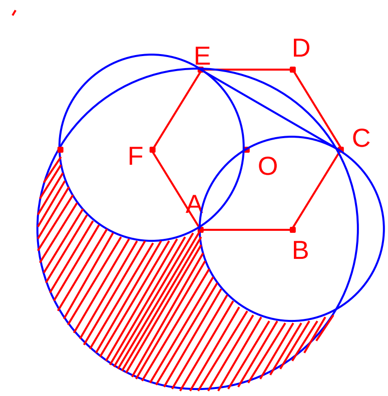
L'àrea del segment circular $\overset{\frown}{OE}$ és:

$$S_3 = \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2.$$

L'àrea ombrejada és:

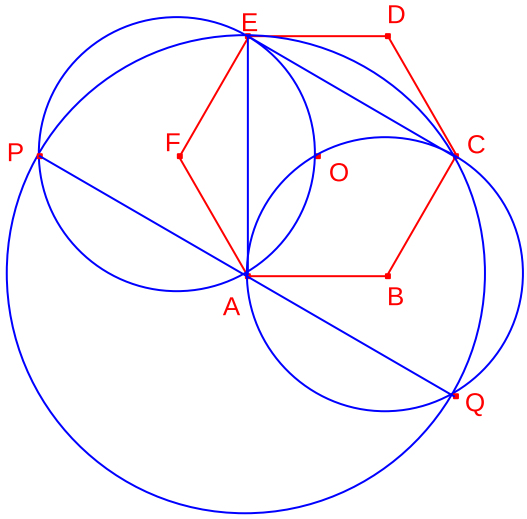
$$S = S_1 + S_2 - 2\cdot S_3 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2 = \frac{\pi}{6}a^2.$$

1114.- Siga l'hexàgon regular ABCDEF de centre O i costat a.
Siga la circumferència de centre A que passa pels punts C, E.
Siga la circumferència B que passa pels punts O, C.
Siga la circumferència de centre F que passa pels punts E, O.
Calculeu l'àrea ombrejada, limitada per les tres circumferències exterior al triangle.



Solució:
Siguen P i Q la intersecció de la circumferència gran i cadascuna de les menudes.
$\angle EAF = 30^o$, $\angle FAB = 120^o$

$\overline{AE} = \overline{AE}$, $\overline{FE} = \overline{FP}$, aleshores els triangles $\overset{\Delta}{APF}$, $\overset{\Delta}{AEF}$ són iguals.
Aleshores, $\angle PAF = \angle EAF$
Anàlogament, $\angle QAB = 30^o$.
Aleshores, els punts P, A, F estan alineats.
$\overline{PQ}$ és diàmetre de la circumferència de centre A.
L'àrea ombrejada és igual l'àrea del semicercle de centre A 60º, i radi $\overline{AC} = \overline{AP}$ menys l'àrea de dos segments circulars $\overset{\frown}{AP}$, $\overset{\frown}{AQ}$ de 120º i radi $\overline{AB}$.



$\overline{AC} = a\sqrt{3}$.
L'àrea del semicercle de centre A és:

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)a^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APF}$ és igual a l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABO}$.

L'àrea del segment circular $\overset{\frown}{AP}$ és:

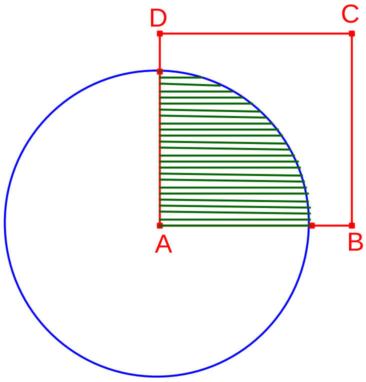
$$S_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2.$$

L'àrea ombrejada és:

$$S = S_1 - 2\cdot S_2 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)a^2 - 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2 = \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

1115.- Siga ABCD un quadrat de costat c.
Una circumferència de centre A i radi r talla els costats del quadrat en dues superfícies d'igual àrea.
Determineu el radi de la circumferència.

Solució:
La superfície intersecció del cercle de radi r i el quadrat és un quadrant de cercle.

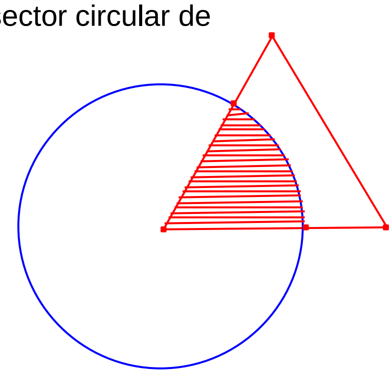


L'àrea del quadrat de cercle és $S = \frac{1}{4}\pi r^2$.
L'àrea del quadrant és la meitat de l'àrea del quadrat:
$$\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{c^2}{2}.$$
Resolent l'equació:
$$r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,c.$$

Problema:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat c.
Una circumferència de centre A i radi r talla els costats del triangle en dues superfícies d'igual àrea.
Determineu el radi de la circumferència.

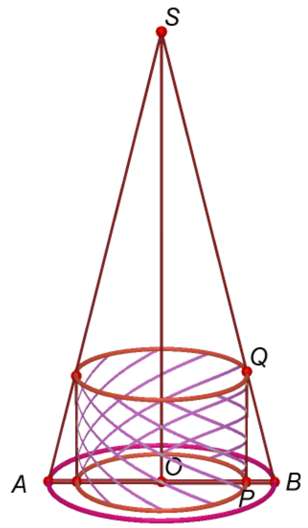
Solució:
La superfície intersecció del cercle de radi r i el triangle és un sector circular de 60º.



L'àrea del sector és $S_1 = \frac{1}{6}\pi r^2$.
L'àrea del triangle equilàter és:
$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$
L'àrea del quadrant és la meitat de l'àrea del quadrat:
$$\frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2.$$
Resolent l'equació:
$$r = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}\,c.$$

1116.- Un cilindre està inscrit en un con.
L'altura del cilindre és igual a radi de la base del con.
Siga α l'angle que forma l'altura del con i la generatriu.
La raó entre l'àrea lateral del cilindre i l'àrea de la base del con estan en proporció 3:2.
Calculeu la mesura de l'angle α.

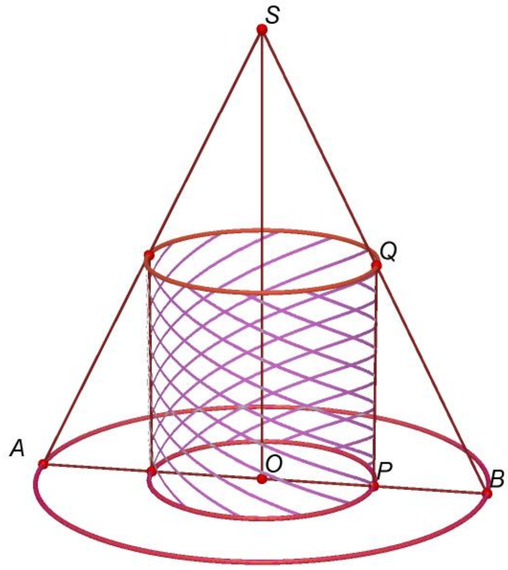
Solució:



Siga el con de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2R$.
Siga O en centre de la base del con.
Siga $\overline{PQ} = R$ altura del con.
Siga $\overline{OP} = r$ radi del cilindre.
Siga S el vèrtex del con.
$\alpha = \angle OSB$.
L'àrea lateral del cilindre és:
$S_1 = 2\pi rR$.
L'àrea de la base del con és:
$S_2 = \pi R^2$.
La raó entre l'àrea lateral del cilindre i l'àrea de la base del con estan en proporció 3:2, aleshores:
$2\pi rR = \frac{3}{2}\pi R^2$. Resolent l'equació:
$r = \frac{3}{4}R$.
$\overline{PB} = R - r = \frac{1}{4}R$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SOB}$, $\overset{\Delta}{QPB}$. Aleshores:
$\angle PQB = \alpha$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QPB}$:
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{4}R}{R} = \frac{1}{4}$. $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{4} \approx 14º2'10''$.

1117.- Un cilindre està inscrit en un con.
L'altura del cilindre és igual a radi de la base del con.
Siga α l'angle que forma l'altura del con i la generatriu.
La raó entre l'àrea total del cilindre i l'àrea de la base del con estan en proporció 3:2.
Calculeu la mesura de l'angle α.

Solució:



Siga el con de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2R$.
Siga O en centre de la base del con.
Siga $\overline{PQ} = R$ altura del con.
Siga $\overline{OP} = r$ radi del cilindre.
Siga S el vèrtex del con.
$\alpha = \angle OSB$.
L'àrea toal del cilindre és:
$S_1 = 2\pi r^2 + 2\pi rR$.
L'àrea de la base del con és:
$S_2 = \pi R^2$.
La raó entre l'àrea lateral del cilindre i l'àrea de la base del con estan en proporció 3:2, aleshores:
$$2\pi r^2 + 2\pi rR = \frac{3}{2}\pi R^2.$$
$$4r^2 + 4Rr - 3R^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{1}{2}R.$$
$$\overline{PB} = R - r = \frac{1}{2}R.$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SOB}$, $\overset{\Delta}{QPB}$. Aleshores:
$\angle PQB = \alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QPB}$:
$$tg\alpha = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}. \quad \alpha = arctg\frac{1}{2} \approx 26º33'54''.$$

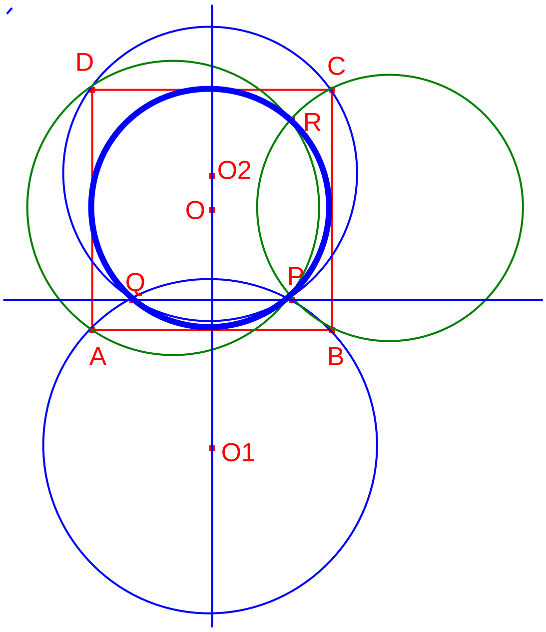
1118.- Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga P un punt interior al quadrat distint de O.

Les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{PAB}$, $\overset{\Delta}{PCD}$ s'íntersecten en els punts P, Q.

Les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{PAD}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ s'íntersecten en els punts P, R.

Proveu que $\overline{QR} = 2 \cdot \overline{OP}$.

Solució:

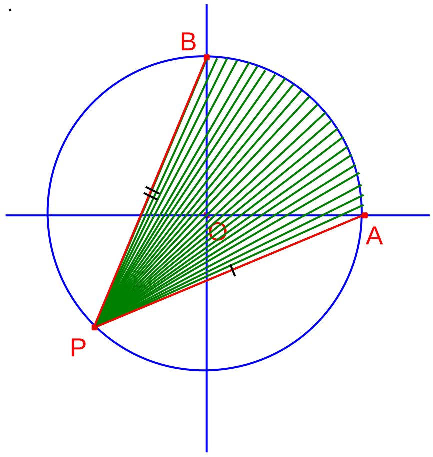


Siga O_1 el centre de la circumferència $\overset{\Delta}{PAB}$.

Siga O_2 el centre de la circumferència $\overset{\Delta}{PCD}$.

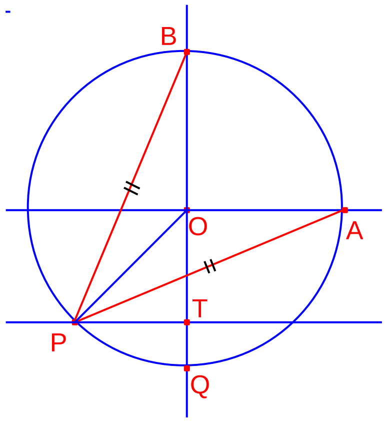
O, O_1, O_2 pertanyen a la mediatriu del costat $\overline{AB}$.
La recta PQ és perpendicular a la recta que uneix els centres
PQ és paral·lel al costat $\overline{AB}$.
La recta mediatriu segment $\overline{PQ}$ passa pels centres O_1, O_2.
La recta mediatriu al costat $\overline{AB}$ és recta mediatriu del segment $\overline{PQ}$.
O pertany a la recta mediatriu del segment $\overline{PQ}$, aleshores:
$\overline{OP} = \overline{OQ}$.
Anàlogament: $\overline{PR}$ és paral·lel al costat $\overline{BC}$ i $\overline{OP} = \overline{OR}$
$\angle QPR = 90^o$.
O és centre de la circumferència que passa per P, Q, R.
$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR}$, $\angle QPR = 90^o$, aleshores, $\overline{QR}$ és un diàmetre.
O, Q, R estan alineats.
Aleshores, $\overline{QR} = 2 \cdot \overline{OP}$.

1119.- En la figura la circumferència de centre O té radi 1.
P pertany a la circumferència i les cordes $\overline{PA}, \overline{PB}$ són iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ratllada.



Solució:

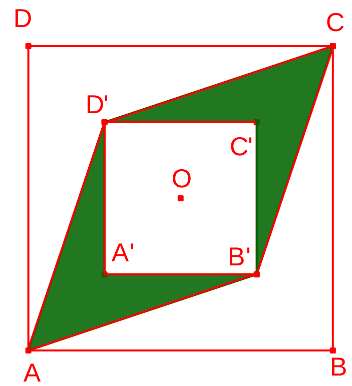
Els triangles $\overset{\Delta}{AOP}$, $\overset{\Delta}{BOP}$ són iguals i isòsceles.
Aleshores, $\angle AOP = \angle BOP = 135^{\circ}$.
$\angle POQ = 45^{\circ}$.
Siga T la projecció de P sobre la recta OB.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$\overline{PT} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BOP}$ és:
$S_{BOP} = \frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{PT} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
L'àrea ratllada és la suma de l'àrea d'un quadrant i dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BOP}$:
$S_{ratllada} = \frac{1}{4}\pi\cdot 1^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



1120.- Siga ABCD el quadrat de centre O.

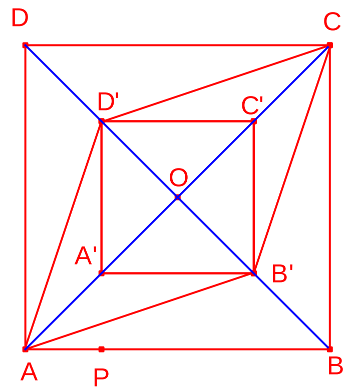
Siga A', B', C', D' els punts migs dels segments $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$, respectivament.

Calculeu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i el quadrat ABCD.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat c.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{A'B'O}$ són semblants i de raó 2:1.

Aleshores, $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}c$.

Siga P la projecció de A' sobre el costat $\overline{AB}$

$$\overline{A'P} = \overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{A'B'}\right) = \frac{1}{4}c.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{A'B'A}$ és:

$$S_{A'B'A} = \frac{1}{2}\overline{A'B'} \cdot \overline{A'P} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}c\frac{1}{4}c = \frac{1}{16}c^2.$$

L'àrea ombrejada és igual a quatre vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{A'B'A}$:

$$S_o = 4 \cdot S_{A'B'A} = 4\frac{1}{16}c^2 = \frac{1}{4}c^2.$$

L'àrea del quadrat ABCD és:

$$S_{ABCD} = c^2.$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_o}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{c^2} = \frac{1}{4}.$$