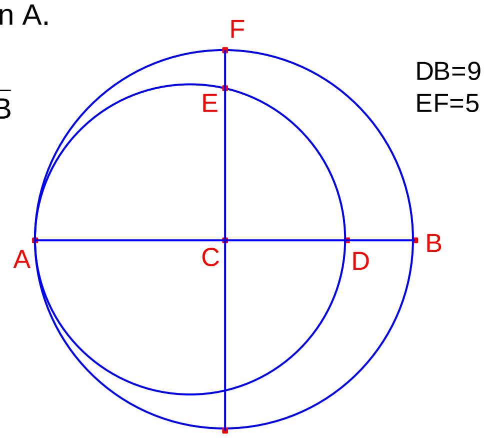
Problemes de Geometria per a l'ESO 113

1121.- En la figura, dos circumferències són tangents en A. C és el centre de la gran. $\overline{FC}$ és perpendicular a $\overline{AB}$. Si $\overline{DB}=9$ i $\overline{FE}=5$, calculeu la mesura del diàmetre $\overline{AB}$ de la circumferència gran.



Solució:

Siga $\overline{CD}=x$.

$\overline{AC}=\overline{CB}=x+9$.

$\overline{FC}=\overline{CB}=x+9$.

$\overline{CE}=x+4$.

$\overline{AD}$ és diàmetre de la circumferència menuda.

$\angle AED=90^{\circ}$.

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{CE}^2=\overline{AC}\cdot\overline{CD}$.

$(x+4)^2=(x+9)x$. Resolent l'equació:

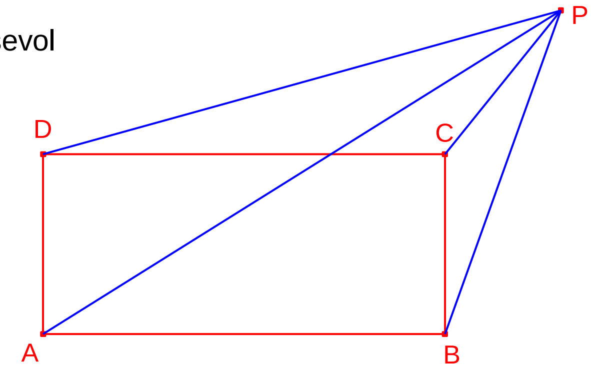
$x=16$.

$\overline{AC}=16+9=25$.

$\overline{AB}=2\cdot\overline{AC}=2\cdot 25=50$.

1122.- Donat un rectangle ABCD i P un punt qualsevol del plànol, proveu que

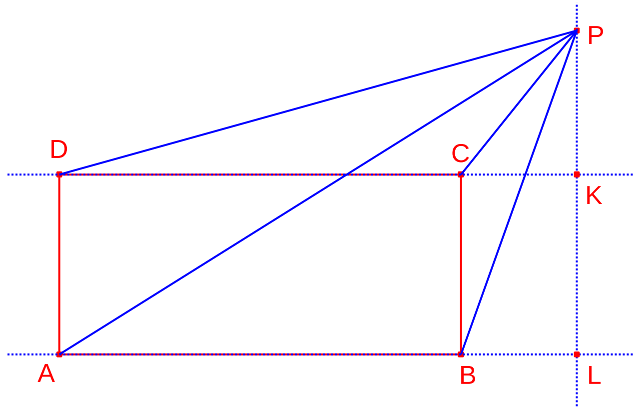
$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 = 0$.



Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$.
Siga K la projecció P sobre la recta DC.
Siga L la projecció de P sobre la recta AB.

Siga $\overline{BL} = x$, $\overline{PL} = y$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALP}$:

$\overline{PA}^2 = (a + x)^2 + y^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLP}$:

$\overline{PB}^2 = x^2 + y^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKP}$:

$\overline{PC}^2 = x^2 + (y - b)^2$.

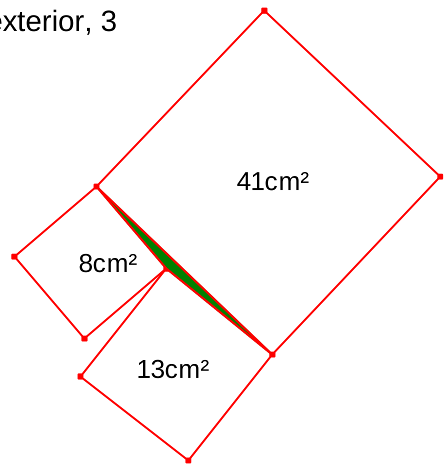
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKP}$:

$\overline{PD}^2 = (a - x)^2 + (y - b)^2$.

Aleshores, $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 = 0$.

1123.- Sobre els costats d'un triangle s'ha dibuixat, cap a l'exterior, 3 quadrats, les àrees dels quals són $41\text{cm}^2, 8\text{cm}^2, 13\text{cm}^2$.

Calculeu l'àrea del triangle.



Solució:

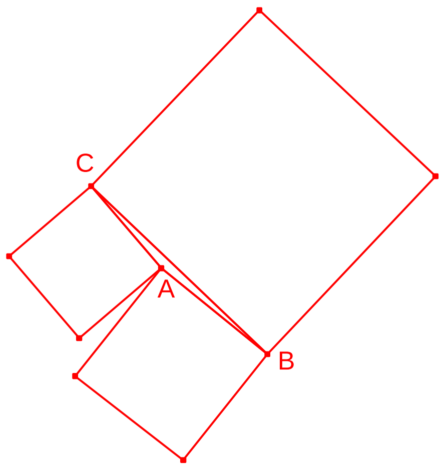
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $a=\sqrt{41}, b=\sqrt{8}, c=\sqrt{13}$.

Aplicant el teorema del cosinus:

$$41=8+13-2\sqrt{8}\sqrt{13}\cdot\cos A.$$

$$\cos A=\frac{-10}{\sqrt{104}}.$$

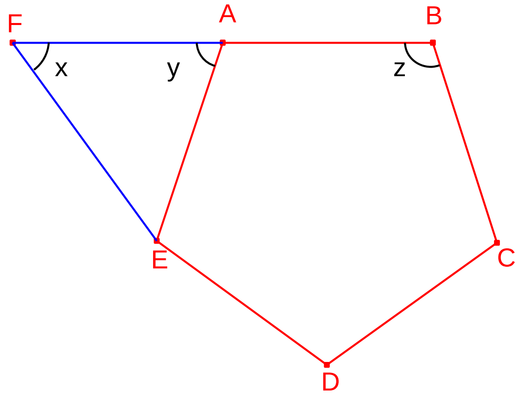
$$\sin A=\frac{2}{\sqrt{104}}.$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{8}\sqrt{13}\frac{2}{\sqrt{104}}=1.$$

1124.- Siga ABCDE un pentàgon regular.



F pertany a la recta AB i a més a més, $\overline{FA}=\overline{AB}$.
Determineu la proporció $x:y:z$

Solució:
z és un angle interior del pentàgon regular:

$$z=\frac{180^o(5-2)}{5}=108^o.$$

y és el suplementari de x.

$y=180^o-108^o=72^o$.

$\overline{FA}=\overline{AB}=\overline{AE}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AFE}$ és isòsceles:

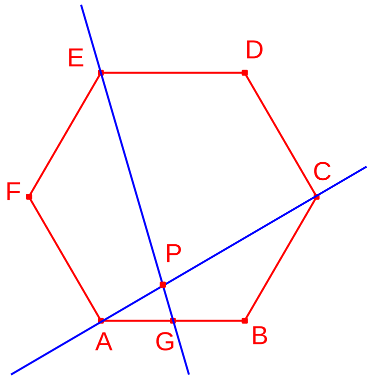
$2x+y=180^o$.

$x=54^o$.

$x:y:z=54^o:72^o:108^o=3^o:4^o:6^o$.

1125.- ABCDEF és un hexàgon regular.

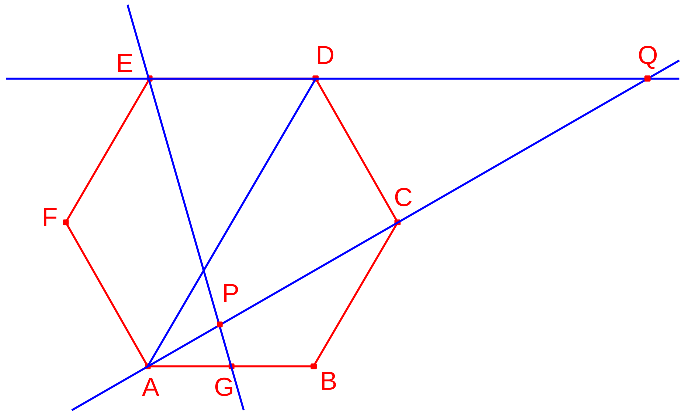
Siga G el punt mig del costat $\overline{AB}$.
La recta GE talla la recta AC en el punt P.
Determineu la raó en què el punt P divideix el segment $\overline{AC}$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon regular.

$\overline{AG} = \frac{1}{2}c$.

$\angle CAD = 30^{o}$, $\angle ACD = 90^{o}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$\overline{AD} = c$, $\overline{AC} = c\sqrt{3}$

La recta DE talla la recta AC en el punt Q.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACD}$, $\overset{\Delta}{QCD}$ són iguals, aleshores:

$\overline{DQ} = \overline{AD} = c$, $\overline{CQ} = \overline{AC} = c\sqrt{3}$.

$\overline{AQ} = 2\sqrt{3}c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AGP}$, $\overset{\Delta}{QEP}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{EQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ} - \overline{AP}}.$$

$$\frac{\frac{1}{2}c}{3c} = \frac{\overline{AP}}{2\sqrt{3}c - \overline{AP}}.$$ Resolent l'equació:

$$\overline{AP} = \frac{2\sqrt{3}}{7}c.$$

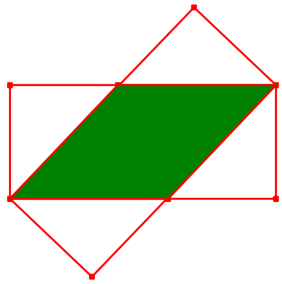
$$\overline{CP} = \overline{AC} - \overline{AP} = \sqrt{3}c - \frac{2\sqrt{3}}{7}c = \frac{5\sqrt{3}}{7}c.$$

El punt P divideix el segment $\overline{AC}$ en dos parts que estan en proporció:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{7}c}{\frac{5\sqrt{3}}{7}c} = \frac{2}{5}.$$

1126.- Dos rectangles iguals $3\text{cm} \times 7\text{cm}$ estan disposats com en la figura.

Calculeu l'àrea de la intersecció dels dos rectangles.

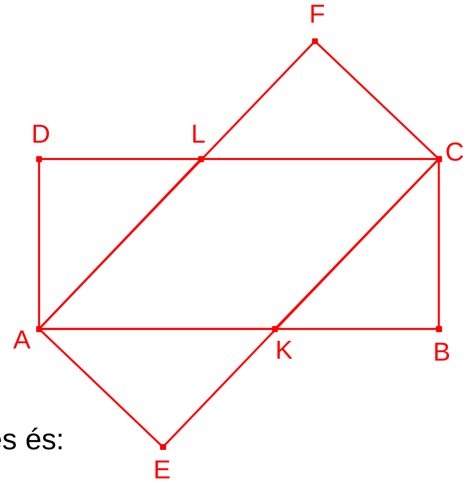


Solució:

Siguen els rectangles ABCD, AECF. $\overline{AB} = \overline{AF} = 7$, $\overline{AD} = \overline{AE} = 3$.

Siguen K, L els punts intersecció dels dos rectangles.

Siga $\overline{AK} = x$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEK}$, $\overset{\Delta}{CBK}$ són iguals.

$\overline{BK} = \overline{EK} = 7 - x$, $\overline{AE} = 3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEK}$:

$x^2 = 3^2 + (7 - x)^2$.

Resolent l'equació:

$x = \frac{29}{7}$.

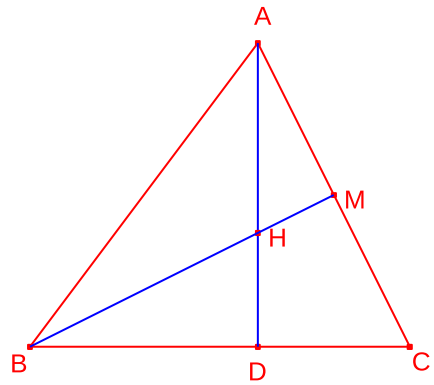
L'àrea del paral·lelogram AKCL, intersecció dels dos rectangles és:

$S_{AKCL} = \overline{AK} \cdot \overline{AD} = \frac{29}{7} 3 = \frac{87}{7} \approx 12.43\text{cm}^2$.

1127.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ l'altura des del vèrtex A talla el costat $\overline{BC}$ en el punt D i l'altura des del vèrtex B talla $\overline{AD}$ en el punt H.

Si $\overline{AD}=4$, $\overline{BD}=3$ i $\overline{CD}=2$, calculeu la mesura del segment $\overline{HD}$.

Solució:

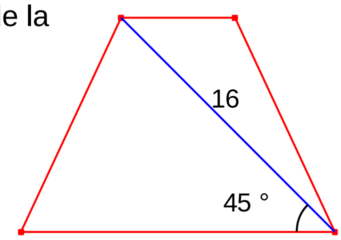


Els triangle rectangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BDH}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{DH}}{\overline{BD}}.$$

$$\frac{2}{4}=\frac{\overline{DH}}{3}.$$

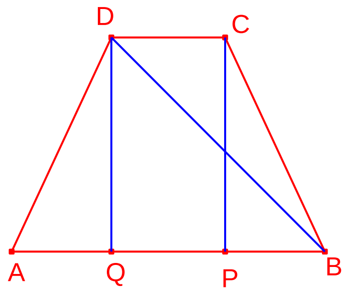
1128.- La diagonal d'un trapezi isòsceles mesura 16cm i l'angle de la diagonal i la base mesura 45º.



Calculeu l'àrea del trapezi.

Solució:

Siga ABCD el trapezi isòsceles de bases paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.



Siga $\overline{BD} = 16$, $\angle ABD = 45^o$.

Siga P la projecció de C sobre la base $\overline{AB}$.

Siga Q la projecció de D sobre la base $\overline{AB}$.

Siga $\overline{AQ} = \overline{BP} = x$. $\overline{PQ} = \overline{CD} = y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BQD}$:

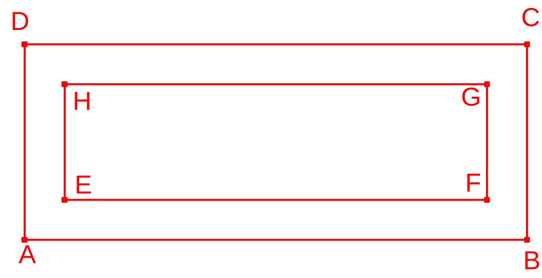
$\overline{BQ} = \overline{DQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}16 = 8\sqrt{2}$.

$\overline{BQ} = x + y = 8\sqrt{2}$.

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)\overline{DQ} = \frac{1}{2}(x + x + y + y)8\sqrt{2} = (x + y)8\sqrt{2} = 8\sqrt{2}8\sqrt{2} = 128cm^2.$$

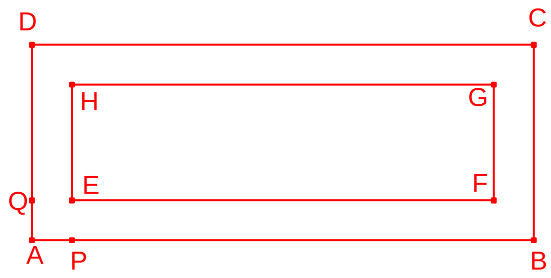
1129.- Donat un rectangle construïu un rectangle de meitat àrea en el seu interior tal que la regió entre els dos rectangles forma un marc d'amplària uniforme al voltant del rectangle interior.



KöMaL, C1213, febrer 2014.

Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$.
Siga EFGH el rectangle interior.
Siga $\overline{AP} = \overline{AQ} = x$ amplària del marc.



$\overline{EF} = a - 2x$, $\overline{EH} = b - 2x$, $x < \text{mín}\left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right\}$.

L'àrea del rectangle EFGH és la meitat de l'àrea del rectangle ABCD:

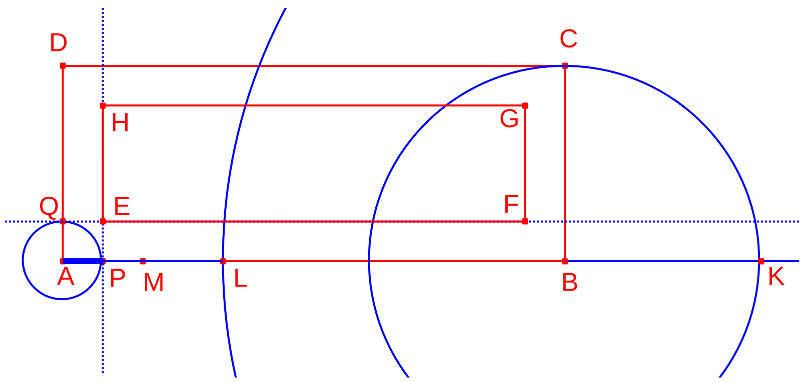
$(a-2x)(b-2x) = \frac{1}{2}ab$.

$4x^2 - 2(a+b)x + \frac{1}{2}ab = 0$. Resolent l'equació:

$x = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}$.

Construcció:

Notem que $\sqrt{a^2+b^2}$ és igual a la mesura de la diagonal del rectangle ABCD.



a) Dibuixem $\overline{BK} = \overline{BC} = b$.

b) Dibuixem $\overline{KL} = \overline{AC} = \sqrt{a^2+b^2}$.

c) Dibuixem el punt mig M del segment $\overline{AL}$.

d) Dibuixem el punt mig P del segment $\overline{AM}$, $x = \overline{AP} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}$.

e) Dibuixem el punt Q del costat $\overline{AD}$ tal que $\overline{AQ} = \overline{AP}$.

f) Dibuixem la recta r perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa per P.

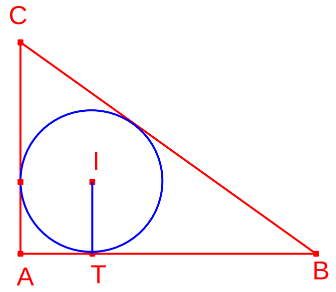
g) Dibuixem la recta s perpendicular al costat $\overline{AD}$ que passa per Q.

h) La intersecció de les rectes r i s és el vèrtex E del rectangle interior.

i) Dibuixem el rectangle EFGH amb el mateix procediment del valor x en cada vèrtex.

1130.- Demostreu que si la circumferència inscrita en un triangle rectangle té radi 1 i un catet és un nombre racional aleshores els altres dos costats són nombres racionals.
KöMaL, C1215, febrer 2014

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.
Suposem que $b = \overline{AC}$ és un nombre racional.
Siga I l'incentre i T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el catet $\overline{AB}$.
$r = \overline{IT} = \overline{AT} = 1$.
$\overline{AT} = \dfrac{b+c-a}{2}$.
$c - a = 2 - b \in Q$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$a^2 - c^2 = b^2 \in Q$.
$(a+c)(a-c) \in Q$, $a - c \in Q$.
$a + c = \dfrac{b^2}{a-c}$, el quocient de dos nombres racionals és un nombre racional
Aleshores, $a + c \in Q$.
La suma de dos racionals és un nombre racional:
$2a$, $2c$ és un nombre racional,
Aleshores, a, c són nombres racionals.