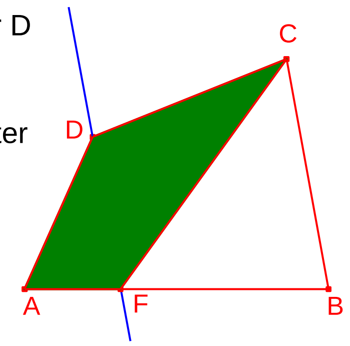
Problemes de Geometria per a l'ESO 114

1131.- En un quadrilàter convex ABCD la recta que passa per D paral·lela al costat $\overline{BC}$ talla el costat $\overline{AB}$ en el punt F.

Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és 4 determineu l'àrea del quadrilàter AFCD.



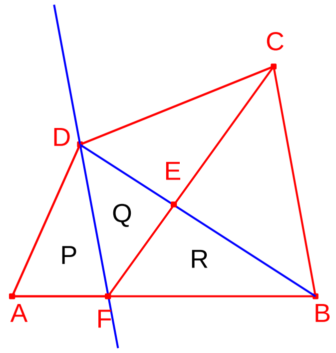
Solució:

Siga E la intersecció dels segments $\overline{BD}$, $\overline{CF}$.

Siguen P, Q, R les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AFD}$, $\overset{\Delta}{FED}$, $\overset{\Delta}{FBE}$, respectivament.

$P+Q+R=4$.

Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea.



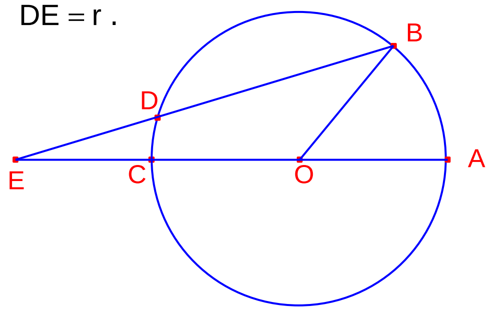
Els triangles $\overset{\Delta}{DFC}$, $\overset{\Delta}{DFB}$ tenen la mateixa base $\overline{DF}$ i la mateixa altura ja que $\overline{BC}$ i $\overline{DF}$ són paral·leles.

Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEC}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FBE}$.

Aleshores, l'àrea del quadrilàter AFCD és igual a $P+Q+R=4$.

1132.- En la figura la circumferència de centre O té radi r, $\overline{DE} = r$.

Si $\angle AEB = k\angle AOB$, determineu el valor de k.

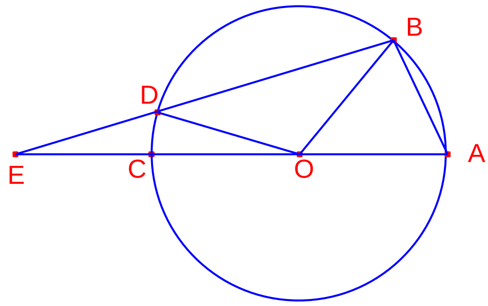


Solució:

Siga $\angle AOB = \alpha$, $\angle AEB = \beta$. Per hipòtesi $\beta = k \cdot \alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle OAB = \angle OBA = \dfrac{180º - \alpha}{2} = 90º - \dfrac{\alpha}{2}$.



El triangle $\overset{\Delta}{EDO}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle BED = \angle EOD = \beta$.

$\angle BDO = 2\beta$.

El triangle $\overset{\Delta}{DOB}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle DBO = \angle BDO = 2\beta$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{EAB}$ és 180º:

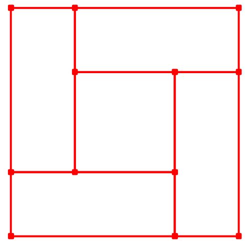
$\beta + 90º - \dfrac{\alpha}{2} + 90º - \dfrac{\alpha}{2} + \beta = 180º$.

$3\beta - \alpha = 0º$.

$\beta = \dfrac{1}{3}\alpha$.

Aleshores, $k = \dfrac{1}{3}$.

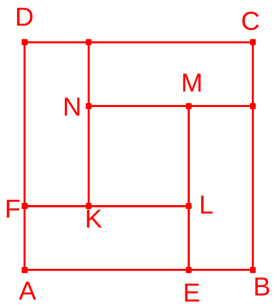
1133.- En la figura, un quadrat s'ha dividit en quatre rectangles iguals i un quadrat interior.



Totes les cinc parts tenen la mateixa àrea.
Determineu la proporció entre els costats d'un dels rectangles.

Solució:

Sense perdre generalització suposem que el quadrat ABCD té costat $\overline{AB}=1$.
L'àrea del quadrat ABCD és 1.



Siguen $\overline{AE}=x$, $\overline{AF}=y$ costats dels rectangle AELF.

$\overline{EB}=\overline{FK}=x$.

$\overline{KL}=y-x$.

Les àrees del quadrat KLMN i del rectangle AELF són iguals i iguals a la cinquena part del quadrat ABCD:

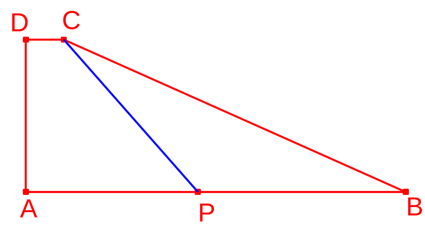
$$\begin{cases} (x-y)^2=\dfrac{1}{5} \\ xy=\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\ y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}.$$

La proporció entre els costats del rectangle AELF és:

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$



1134.- En la figura el trapezi rectangular ABCD, $\overline{AB} = 10$, $\overline{AD} = 4$, $\overline{CD} = 1$.

P és un punt del costat $\overline{AB}$ tal que les àrees del quadrilàter APCD i del triangle $\overset{\Delta}{PBC}$ són iguals.

Determineu la mesura del segment $\overline{PB}$.

Solució:

Siga $\overline{PB} = x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBC}$ és:

$$S_{PBC} = \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{AD} = 2x.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)\overline{AD} = 11.$$

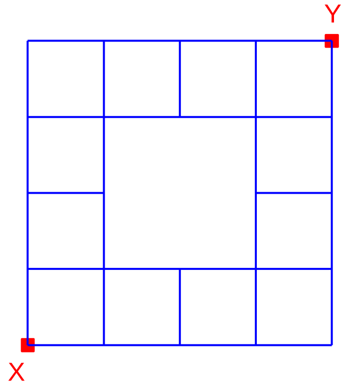
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBC}$ és la meitat de l'àrea del trapezi ABCD:

$$2x = 11.$$

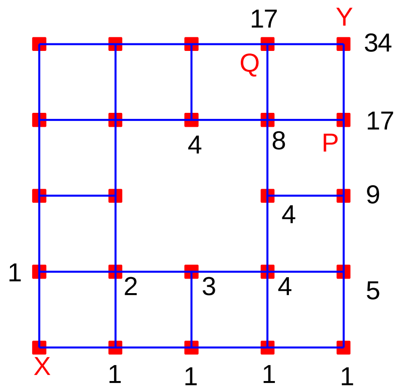
$$x = \frac{11}{2}.$$

1135.- La figura mostra un quadrat 4 per 4.

De quantes formes es pot anar de X a Y, sempre recorrent la mínima distància.



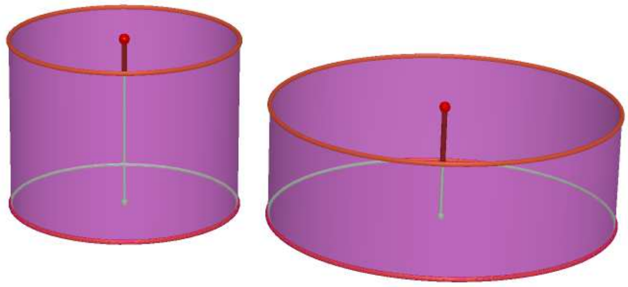
Solució:



La figura és simètrica respecte de la diagonal XY.
Els distints camins d'arribar a P i Q són iguals.
Les distintes formes d'arribar a un vèrtex és igual a la suma de les distintes formes d'arribar als dos vèrtexs inferior.

Notem que per arribar a P hi ha 17 camins distints.
Aleshores per arribar a Y hi ha 34 camins distints.

1136.- Determineu la raó entre els volums de dos cilindres que tinguen la mateixa àrea lateral.



Solució:

Siga el cilindre de radi R_1 i altura h_1.

Siga el cilindre de radi R_2 i altura h_2.

Si els dos cilindres tenen la mateixa àrea lateral:

$2\pi R_1 \cdot h_1 = 2\pi R_2 \cdot h_2$. Simplificant:

$R_1 \cdot h_1 = R_2 \cdot h_2$.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

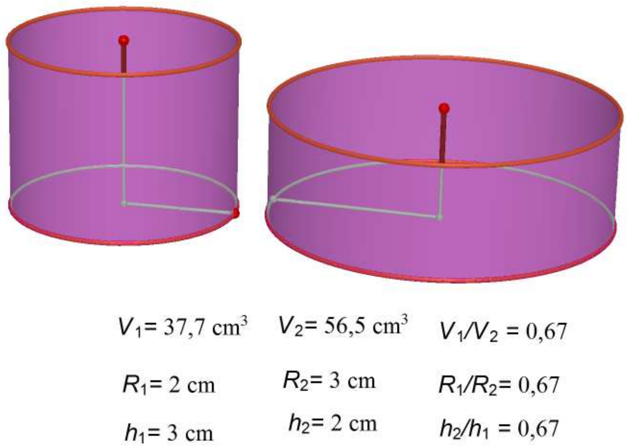
Els volums dels dos cilindres és:

$V_1 = \pi {R_1}^2 \cdot h_1$, $V_2 = \pi {R_2}^2 \cdot h_2$.

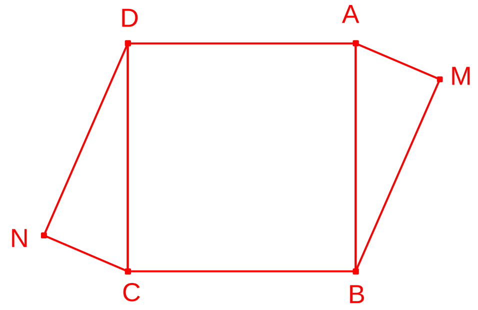
La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi {R_1}^2 \cdot h_1}{\pi {R_2}^2 \cdot h_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Els volums són directament proporcionals als radis i inversament proporcionals a les altures.



1137.- Siga el quadrat ABCD.

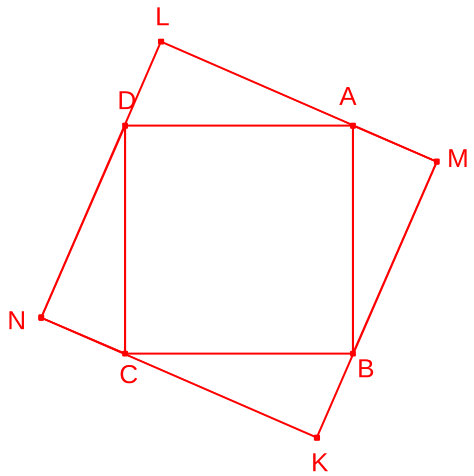


Siga M un punt exterior al quadrat tal que $\angle ABM = 90^{\circ}$.

Siga $a = \overline{AM}$ i $b = \overline{BM}$.

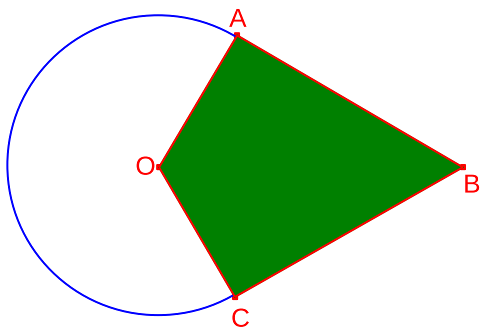
Siga el punt N exterior al quadrat tal que $a = \overline{CN}$ i $b = \overline{DN}$.

Determineu en funció de a, b la longitud del segment $\overline{MN}$.



Solució:
Les rectes BM, CN és tallent en el punt K.
Les rectes AM. ND és tallen en el punt L
KMLN és un quadrat de costat $a + b$.
$\overline{MN}$ és la diagonal del quadrat de costat $a + b$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{NKM}$:
$\overline{MN} = (a + b)\sqrt{2}$.

1138.- El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter i dos dels seus costats són tangents a una circumferència de centre O i radi r.
Determineu l'àrea del quadrilàter AOCB.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és rectangle, $\angle OAB = 90º$, $\angle OBA = 30º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$\overline{AB} = r\sqrt{3}$.

L'àrea del quadrilàter AOCB és:

$$S_{AOCB} = 2 \cdot S_{OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{AB} = r^2\sqrt{3}.$$

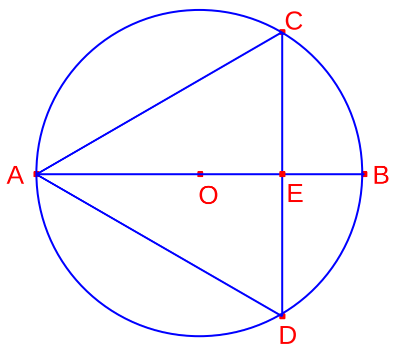
1139.- $\overline{AB}$ és un diàmetre d'una circumferència de radi1.

La corda $\overline{CD}$ és perpendicular al diàmetre $\overline{AB}$ i el talla en el punt E.

Si l'arc $\overset{\frown}{CAD}$ és $\frac{2}{3}$ de la circumferència, determineu la longitud del segment $\overline{AE}$.

Solució:

Siga O el centre de la circumferència.



$\overline{OA} = 1$.

$\overset{\frown}{CAD} = \frac{2}{3} 360^o = 240^o$.

$\overset{\frown}{CBD} = 120^o$.

Per ser les dues cordes perpendiculars:

$\overline{AC} = \overline{AD}$.

$\angle CAD = \frac{1}{2} 120^o = 60^o$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{ACD}$ és equilàter i O és el seu baricentre.

E és el punt mig de la corda $\overline{CD}$.

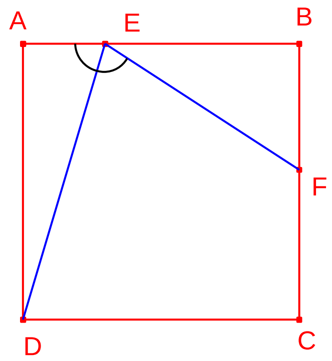
Per la propietat del baricentre:

$\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{1}{2}$.

$\overline{AE} = \overline{OA} + \overline{OE} = \frac{3}{2}$.

1140.- Donat el quadrat ABCD, siga E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\angle AED = \angle DEF$.

Proveu que $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{CF}$.



Solució:

Siga P la projecció de D sobre el segment $\overline{EF}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAE}$, $\overset{\Delta}{DPE}$ són iguals (LAA).

Aleshores, $\overline{AD} = \overline{DP}$, $\overline{AE} = \overline{EP}$.

$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{DP}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DPF}$, $\overset{\Delta}{DCF}$ (LLA).

Aleshores, $\overline{CF} = \overline{PF}$.

$\overline{EF} = \overline{EP} + \overline{PF} = \overline{AE} + \overline{CF}$.