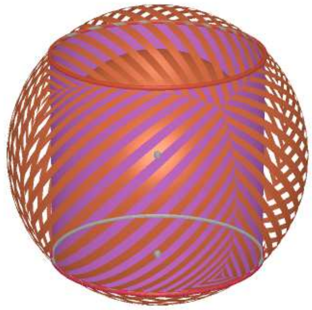
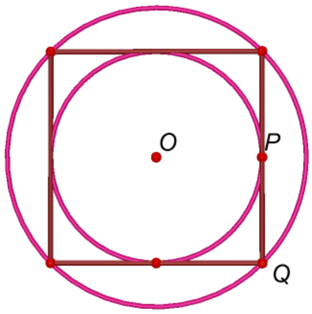
Problemes de Geometria per a l'ESO 115

1141.- Demostreu que l'àrea d'un cilindre circumscrit a una esfera és mitjana aritmètica de l'àrea de l'esfera inscrita i l'esfera circumscrita al cilindre.



Solució:
Siga r el radi de l'esfera inscrita del cilindre.
El radi del cilindre és r i l'altura 2r.
Siga O el centre de l'esfera inscrita.
Considerem la secció del cilindre que passa per O i és perpendicular a la base.
Siga $\overline{OP}=r$ (segment perpendicular a la generatriu del cilindre), radi de l'esfera inscrita i del cilindre.
Siga $\overline{OQ}=R$ radi de l'esfera circumscrita al cilindre.
$\overline{PQ}=r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$R^2=2r^2$.
L'àrea del cilindre és:
$S_C=2\pi r^2+2\pi r\cdot 2r=6\pi r^2$.

L'àrea de l'esfera inscrita al cilindre és:
$S_{e.insc.}=4\pi r^2$.

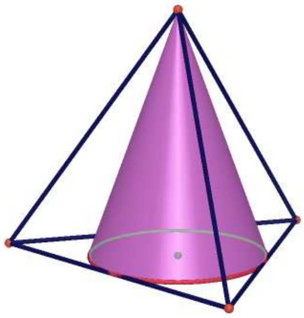
L'àrea de l'esfera circumscrita al cilindre és:
$S_{e.circums.}=4\pi R^2=4\pi\cdot 2r^2=8\pi r^2$.

$$\frac{S_{e.insc.}+S_{e.circums.}}{2}=\frac{4\pi r^2+8\pi r^2}{2}=6\pi r^2=S_C.$$

Aleshores, que l'àrea del cilindre és mitjana aritmètica de l'àrea de l'esfera inscrita i l'esfera circumscrita al cilindre.

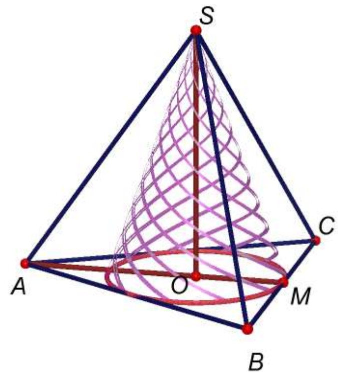
1142.- Siga un con inscrit en un tetraedre regular.

Calculeu la proporció entre el volum del con i del tetraedre.



Solució:

Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.
Siga O el baricentre de la base.
O és el centre de la base del con inscrit.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant La propietat del baricentre:

$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$, radi de la base del con.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

El volum del tetraedre és:

$$V_T = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OS}.$$

El volum del con és:

$$V_C = \frac{1}{3} \pi \overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}.$$

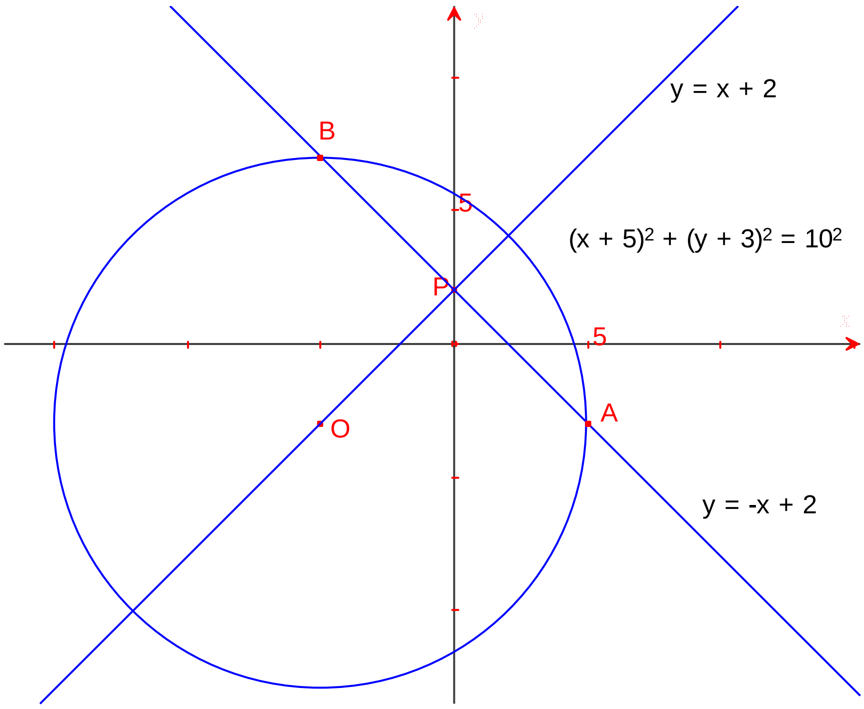
La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_C}{V_T} = \frac{\frac{1}{3}\pi \overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OS}} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6} a\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046.$$

1143.- Donada la circumferència $x^2+y^2+10x+6y-66=0$ i el punt mig $P(0,2)$ d'una corda, determineu l'equació de la corda i els extrems de la corda.

Solució:
Completant quadrats en l'equació de la circumferència:
$(x+5)^2+(y+3)^2=10^2$.
La circumferència té centre $O(-5,-3)$ i radi $r=10$.
Notem que P és interior a la circumferència ja que $\overline{OP}<10$:
$\overline{OP}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}<10$.

La corda de punt mig P és perpendicular a la recta OP i passa pel punt P.
La recta OP té equació:
$r_{OP}\equiv y=x+2$.
La recta perpendicular a la recta r_{OP} que passa pel punt P té equació:
$s\equiv y=-x+2$.
Els extrems de la corda és determinen resolent el sistema de l'equació de la recta c i la circumferència:
$\begin{cases} y=-x+2 \\ (x+5)^2+(y+3)^2=10^2 \end{cases}$ les solucions són:
$A(5,-3)$, $B(-5,7)$.

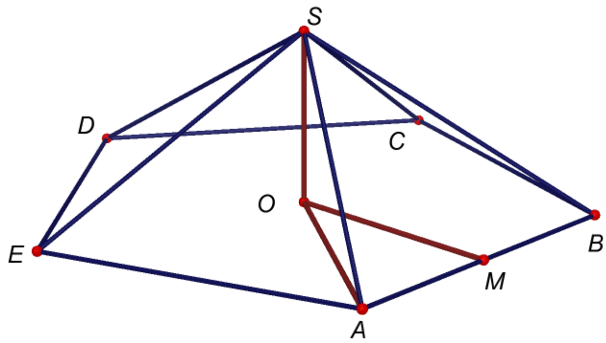


1144.- Totes les arestes d'una piràmide pentagonal són iguals.

Calculeu el seu volum.

Solució:

Siga la piràmide ABCDES que té totes les arestes iguals $\overline{AB}=a$.
La piràmide és recta.
Siga O el centre de la base.
$\angle AOB=72^{o}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
$\angle OAM=54^{o}$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:



$\overline{OM}=\frac{a}{2}tg54^{o}$, $\overline{OA}=\frac{a}{2\cos 54^{o}}$.

L'àrea del pentàgon regular ABCDE és:

$S_b=\frac{1}{2}5a\cdot\overline{OM}=\frac{5}{4}a^2\cdot tg54^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

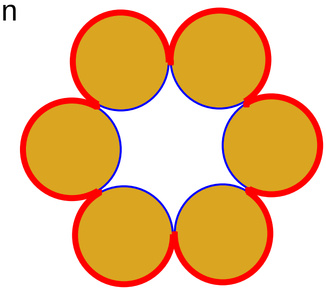
$\overline{OS}=\frac{a}{2\cos 54^{o}}\sqrt{4\cos^2 54^{o}-1}$.

El volum de la piràmide és:

$V=\frac{1}{3}S_b\cdot\overline{OS}=\frac{1}{3}\frac{5}{4}a^2tg54^{o}\cdot\frac{a}{2\cos 54^{o}}\sqrt{4\cos^2 54^{o}-1}=\frac{5}{24}\frac{tg45^{o}}{\cos 45^{o}}\sqrt{4\cos^2 54^{o}-1}\cdot a^3$.

$V=\frac{5+\sqrt{5}}{24}a^3$.

1145.- Sis cercles iguals formen un anell circular tal que cadascun dels sis cercles és tangent als cercles de seu costat.

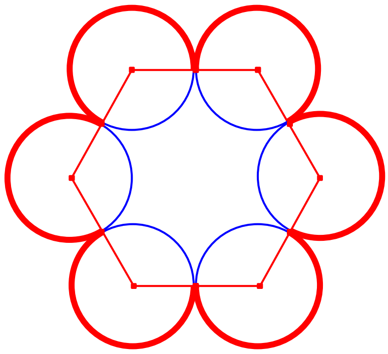


Quin percentatge de l'àrea de tot l'anell està cobert pels sis cercles.

KöMaL, K420.

Solució:

Siga r el radi dels sis cercles iguals.



L'àrea de l'anell està formada per la suma de sis $\frac{2}{3}$ parts de cercle de radi r més l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2r.

$S_{anell}=6\frac{2}{3}\pi r^2+6\frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2$.

$S_{anell}=\left(4\pi+6\sqrt{3}\right)r^2$.

La suma de les àrees dels 6 cercles de radi r és:

$S_6=6\pi r^2$.

La proporció entre l'àrea dels sis cercles i l'anell és:

$\frac{S_6}{S_{anell}}=\frac{6\pi r^2}{\left(4\pi+6\sqrt{3}\right)r^2}=\frac{3\pi}{2\pi+3\sqrt{3}}\approx 0.82102$.

El percentatge de les dues àrees és 82.10%.

1146.- Les cares laterals d'una piràmide quadrangular són triangles equilàters.

Determineu l'angle diedre de dues cares laterals.

Solució:

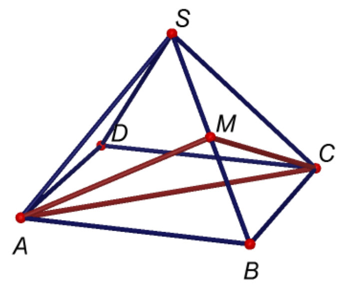
La piràmide és regular.

Siga ABCDS la piràmide de base el quadrat ABCD i cares laterals triangles equilàters.

Siga $\overline{AB} = a$, mesura de totes les arestes de la piràmide.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

L'angle que formen dues cares laterals és $\alpha = \angle AMB$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AC} = \sqrt{2}a.$$

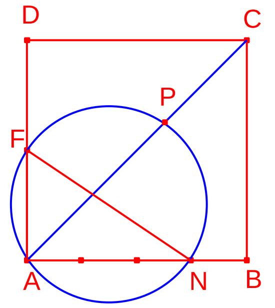
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\left(\sqrt{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{3}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{-1}{3} \approx 109º28'16''.$$

1147.- Siga el quadrat ABCD.



Siga F el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Siga N més prop de B que divideix el costat $\overline{AB}$ en raó 1:3.

Determineu en quina proporció la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{AFN}$ divideix la diagonal $\overline{AC}$.

KöMaL, C1221.

Solució:

Siga $\overline{AB}=4x$. $\overline{AF}=2x$, $\overline{AN}=3x$, $\overline{BN}=x$.

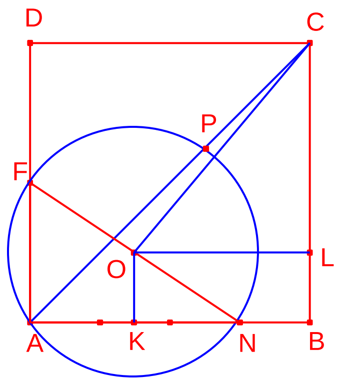
Siga O el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{AFN}$.

Per ser el triangle rectangle O és el punt mig de la hipotenusa $\overline{FN}$.

La circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{AFN}$ talla la diagonal $\overline{AC}$ en el punt P.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=4x\sqrt{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FAN}$:

$\overline{FN}=x\sqrt{13}$.

$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{FN}=\frac{\sqrt{13}}{2}x$.

Siga K la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga L la projecció de O sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{AN}=\frac{3}{2}x$, $\overline{BK}=\overline{OL}=\frac{5}{2}x$. $\overline{OK}=\overline{BL}=x$, $\overline{LC}=3x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLC}$:

$\overline{OC}^2=\frac{61}{4}x^2$.

Aplicant la potència de P respecte de la circumferència:

$\overline{CP}\cdot\overline{CA}=\overline{OC}^2-\overline{OA}^2$.

$$\overline{CP}\cdot 4x\sqrt{2}=\left(\frac{61}{4}-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2\right)x^2.$$

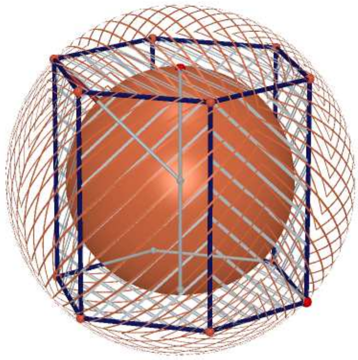
$$\overline{CP}=\frac{3\sqrt{2}}{2}x.$$

$$\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=4x\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}x=\frac{5\sqrt{2}}{2}x.$$

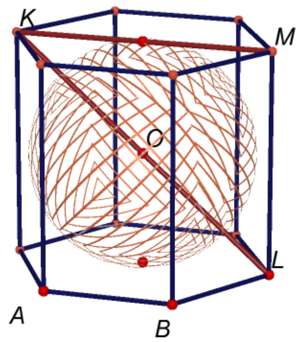
La proporció en què el punt P divideix la diagonal $\overline{AC}$ és:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}x}{\frac{3\sqrt{2}}{2}x}=\frac{5}{3}.$$

1148.- Un prisma hexagonal regular està inscrit en una esfera de radi R.
Calculeu la seua àrea sabent que el prisma està circumscrit a una esfera.



Solució:
Siga r el radi de l'esfera inscrita en el prisma.
L'altura del prisma és 2r.
L'apotema de l'hexàgon base és igual al radi de la circumferència inscrita.
L'aresta de la base del prisma és:



$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}r\ .$$

$$\overline{PQ} = 2R\ ,\ \overline{KM} = 2\overline{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}r\ ,\ \overline{LM} = 2r\ .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

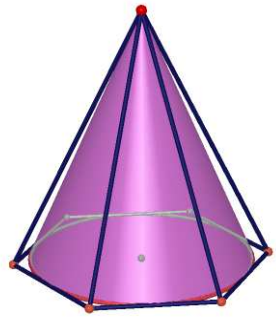
$$(2R)^2 = (2r)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}r\right)^2\ .$$

$$r^2 = \frac{3}{7}R^2\ .$$

L'àrea del prima és:

$$S = 2\left(6\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2\right) + 6\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}r\cdot 2r = 12\sqrt{3}\,r^2 = \frac{36\sqrt{3}}{7}R^2\ .$$

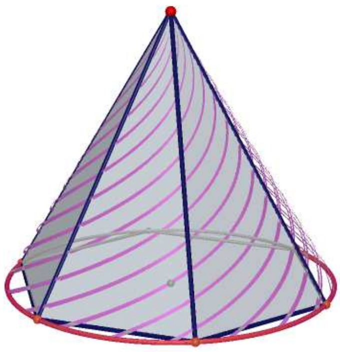
1149.- Determineu la proporció entre els volums d'una con inscrit en una piràmide regular hexagonal.



Solució:
La proporció entre els volums d'un con i una piràmide que tenen la mateixa altura són proporcionals a les bases.
Siga a l'aresta de la base de la piràmide.
L'apotema del polígon és igual al radi del cercle inscrit.
L'apotema de l'hexàgon és $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_{con}}{V_{piràmide}} = \frac{S_{cercle}}{S_{hexàgon}} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069\,.$$

Problema:
Determineu la proporció entre els volums d'una con circumscrit en una piràmide regular hexagonal.



Solució:

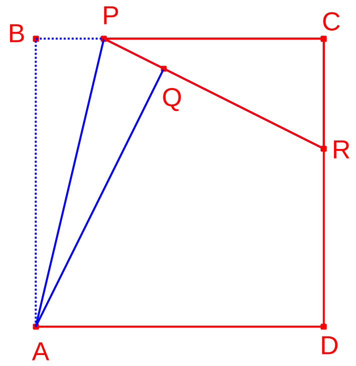
$$\frac{V_{piràmide}}{V_{con}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.8270\,.$$

Problema:
Determineu la proporció entre els volums d'una con inscrit i el con circumscrit en una piràmide regular hexagonal.

Solució:

$$\frac{V_{con.ins}}{V_{con.circums}} = \frac{V_{con.ins}}{V_{piràmide}} \cdot \frac{V_{piràmide}}{V_{con.circums}} = \frac{3}{4}\,.$$

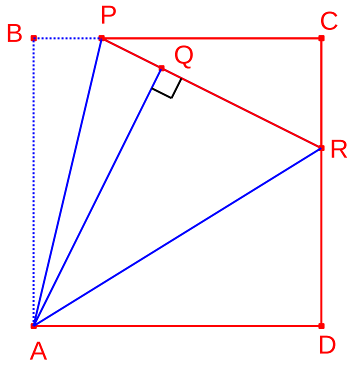
1150.- Siga ABCD un quadrat de paper de costat 10.



Siga P un punt del costat $\overline{BC}$.
Dobleguem el paper per la recta AP i el punt B determina el punt Q, com veiem en la figura.
La recta PQ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt R.

Calculeu el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{PCR}$.

Solució:



Siga el quadra ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

Siga $\overline{BP} = x$.

Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{BP}$, $\overline{AQ} = \overline{AB} = c$. $\angle ABP = \angle AQP = 90º$.

$\angle AQR = 90º$.

$\overline{AQ} = \overline{AD}$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQR}$, $\overset{\Delta}{ADR}$ són iguals.

Per tant, $\overline{DR} = \overline{QR}$.

$\overline{PC} = c - x$, $\overline{CR} = c - \overline{DR}$.

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{PCR}$ és:

$\overline{PC} + \overline{CR} + \overline{PR} = \overline{PC} + \overline{CR} + \overline{PQ} + \overline{QR} = c - x + c - \overline{DR} + x + \overline{QR} = 2c$.

Si el costat del quadrat és 10 el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{PCR}$ és 20.