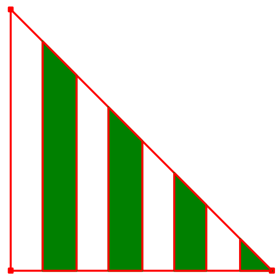
Problemes de Geometria per a l'ESO 116

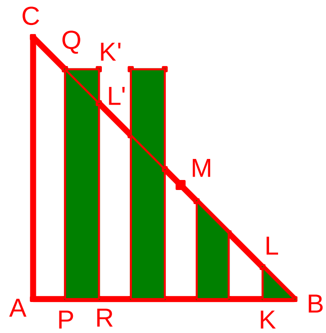
1151.- En un triangle rectangle isòsceles, un catet s'ha dividit en 8 parts iguals (veure figura).
Determineu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del triangle.
UKMT INTERMEDIATE 2014, problema 12.



Solució:

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^\circ$.
Siga $\overline{AB} = \overline{AC} = 8x$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(8x)^2 = 32x^2$.



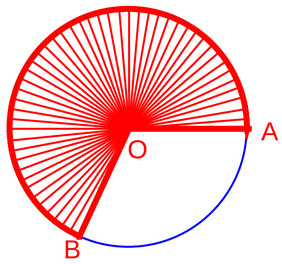
Siga $\overline{AP} = \overline{PR} = x$.
La recta perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa pel punt P talla la hipotenusa del triangle en el punt Q.
$\overline{BP} = \overline{PQ} = 7x$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{BQ}$.
Siga K' el simètric de K respecte de M.
Siga L' el simètric de L respecte de M.
L'àrea ombrejada és igual a dues vegades l'àrea del rectangle PRK'Q:

$S_{omb} = 2S_{PRK'Q} = 2x \cdot 7x = 14x^2$.

La proporció entre les àrees de la zona ombrejada i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

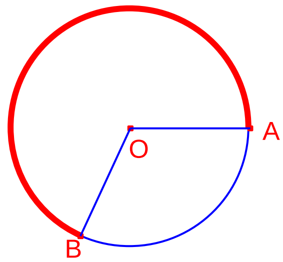
$$\frac{S_{omb}}{S_{ABC}} = \frac{14x^2}{32x^2} = \frac{7}{16}.$$

1152.- Retallem un sector d'un disc.



El perímetre del sector té la mateixa longitud que la circumferència del disc.
Calculeu la proporció entre l'àrea del sector i l'àrea del disc.
UKMT INTERMEDIATE 2014, problema 23.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.
Siga $\alpha = \angle AOB$ angle central del sector.
El perímetre del sector és igual a la longitud de la circumferència:



$$2\pi r = 2r + 2\pi r \frac{\alpha}{360^o}.$$

$$\alpha = \frac{\pi - 1}{\pi} 360^o \approx 245^o 24'30''.$$

L'àrea del sector és:

$$S_{sector} = \pi r^2 \frac{\alpha}{360^o} = (\pi - 1) r^2.$$

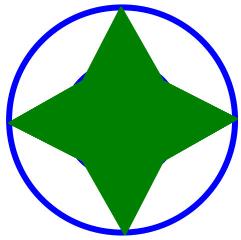
L'àrea del cercle és:

$$S_{cercle} = \pi r^2.$$

La proporció entre l'àrea del sector i l'àrea del disc és:

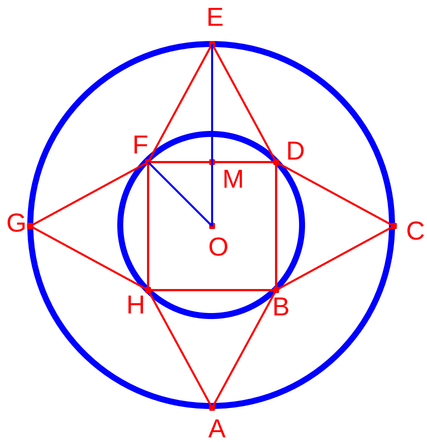
$$\frac{S_{sector}}{S_{cercle}} = \frac{(\pi - 1) r^2}{\pi r^2} = \frac{\pi - 1}{\pi} \approx 0.6817.$$

1153.- En la figura hi ha dues circumferències concèntriques de radis 1 i 2 unitats.



S'ha dibuixat un octògon de costats iguals.
Calculeu el perímetre i l'àrea de l'octògon.
UKMT INTERMEDIATE 2014, problema 25.

Solució:
Siguen dues circumferències de centre O i radis 1 i 2, respectivament.
Si l'octògon ABCDEFGH té els costats iguals, ADEG són vèrtexs d'un quadrat inscrit en la circumferència de radi 2 i BDFH són els vèrtexs d'un quadrat inscrit en la circumferència de radi 1.
Siga M el punt mig del segment $\overline{DF}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMF}$:

$$\overline{OM} = \overline{FM} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{DF} = 2\overline{FM} = \sqrt{2}.$$

$$\overline{EM} = \overline{OE} - \overline{OM} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FME}$:

$$\overline{EF} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}.$$

El perímetre de l'octògon ABCDEFGH és:

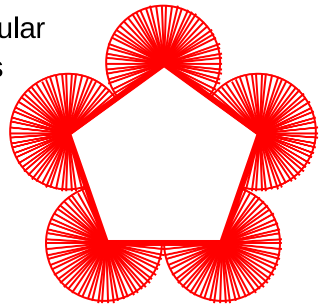
$$P_{ABCDEFGH} = 8 \cdot \overline{EF} = 8\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}.$$

L'àrea de l'octògon ABCDEFGH és igual a la suma de les àrees de 4 quadrilàters (cometa) ODEF.

$$S_{ABCDEFGH} = 4 \cdot S_{ODEF} = 4\left(\overline{DF} \cdot \overline{OD}\right).$$

$$S_{ABCDEFGH} = 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2\right) = 4\sqrt{2}.$$

1154.- Sobre un pentàgon regular de costat 4 s'han dibuixat 5 arcs circular de centre els vèrtexs de pentàgon i extrems els punts migs dels costats adjacents.



Calculeu l'àrea de la regió ratllada.

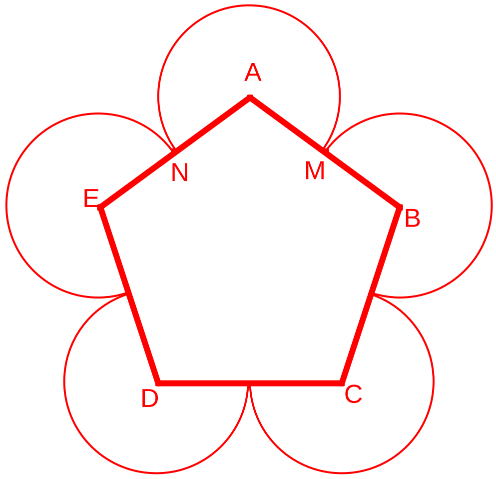
UKMT INTERMEDIATE 2014, problema 20.

Solució:

Siga el pentàgon regular ABCDE de costat $\overline{AB}=4$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AE}$.



$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$, radi de cada arc.

L'angle interior del pentàgon regular mesura:

$$\angle BAE=\frac{180^\circ(5-2)}{5}=108^\circ=\frac{3}{10}360^\circ.$$

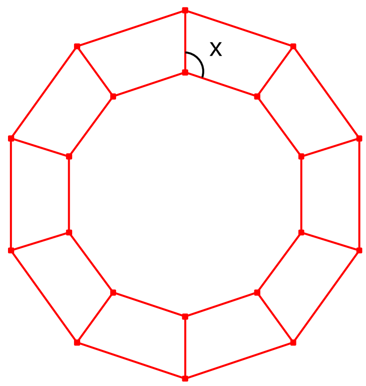
L'angle que forma un arc és:

$$arc=360^\circ-\frac{3}{10}360^\circ=\frac{7}{10}360^\circ.$$

L'àrea que formen el 5 sectors és:

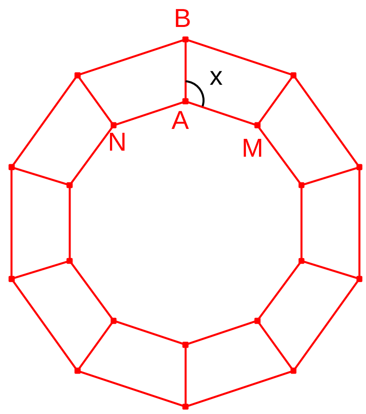
$$S_{ratllada}=5\left(\pi\cdot 2^2\frac{\frac{7}{10}360^\circ}{360^\circ}\right)=14\pi.$$

1155.- Dins d'un decàgon regular s'ha dibuixat un altre decàgon regular amb els mateixos eixos de simetria.



Determineu la mesura de l'angle x.
Generalitzeu el resultat per a qualsevol polígon regular.

Solució:
Siga $\angle BAM = x$.
Aleshores, $\angle BAN = x$.
L'angle interior d'un decàgon regular és:



$$\angle MAN = \frac{180^o(10-2)}{10} = 144^o.$$

$2x + 140^o = 360^o$. Resolent l'equació:

$x = 108^o$.

Generalització:
Dins d'un polígon regular de n costats $n \geq 3$ s'ha dibuixat un altre polígon de n costats amb els mateixos eixos de simetria.
Determineu la mesura de l'angle x.

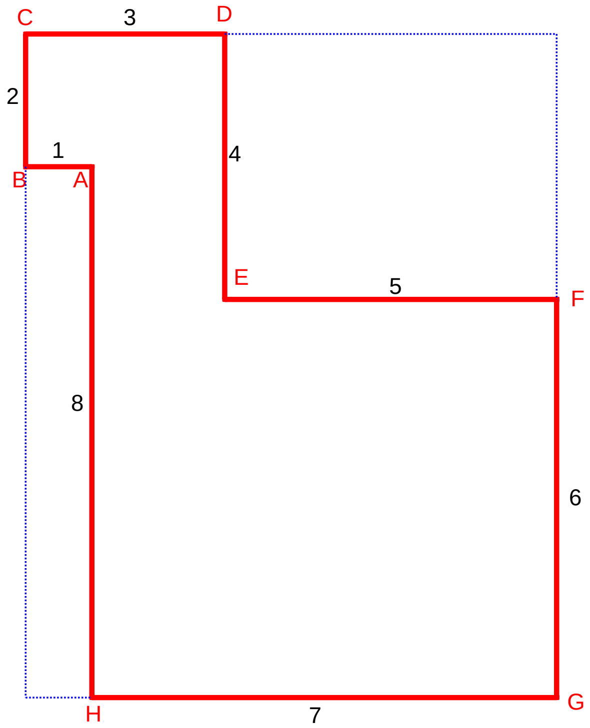
Solució:

$$x = \frac{90^o n + 180^o}{n} = \frac{n+2}{n} 90^o.$$

1156.- Un octògon ABCDEFGH té les següents propietats:

$\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=3$, $\overline{DE}=4$, $\overline{EF}=5$, $\overline{FG}=6$, $\overline{GH}=7$, $\overline{HA}=8$, i a més a més, l'angle que formen dos costats adjacents mesura 90º.
Calculeu l'àrea de l'octògon.

Solució:
L'única possibilitat, amb en sentit negatiu de la numeració dels vèrtexs és la de la figura:



L'octògon està inscrit en un rectangle de costats 8×10 .

L'àrea de l'octògon és igual a l'àrea del rectangle 8×10 menys l'àrea de dos rectangles de costats 8×1, 5×4 .

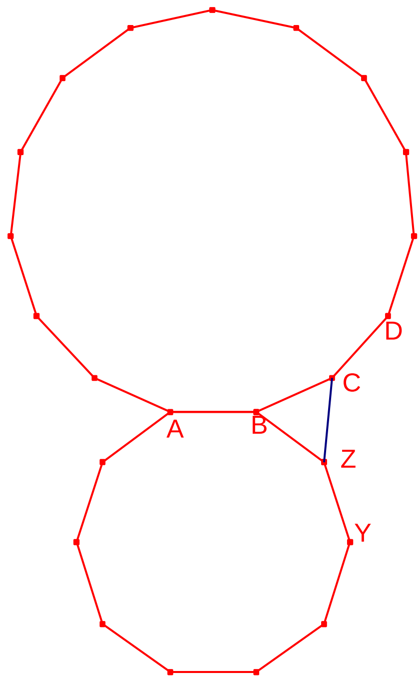
$S=8\cdot 10-(8\cdot 1+5\cdot 4)=52$.

1157.- Dos polígons regulars de costat 1 comparteixen un costat $\overline{AB}$, i ni els costats ni la superfície d'aquests polígons no tenen cap altre punt en comú.

Un dels polígons ABCD…. Té 15 costats i l'altre, ….YZBA, en té n.

Quin valor de n fa que $\overline{CZ}=1$?.

Proves cangur 2014, nivell4, problema 26.



Solució:

L'angle interior del polígon de 15 costats és:

$\angle ABC=\dfrac{180^o(15-2)}{15}=156^o$.

Z és exterior al polígon de 15 costats.

$\overline{BZ}=\overline{BC}=\overline{CZ}=1$, aleshores, $\angle CBZ=60^o$.

L'angle interior del polígon de n costats és:

$\angle ABZ=\dfrac{180^o(n-2)}{n}$.

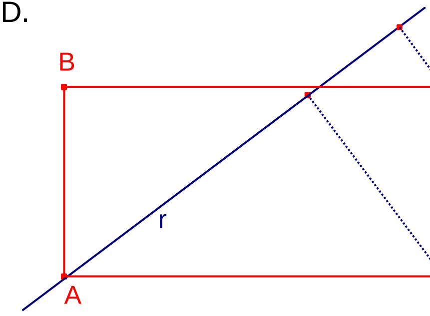
$\angle ABZ+\angle ABC+\angle CBZ=360^o$.

$\dfrac{180^o(n-2)}{n}+156^o+60^o=360^o$.

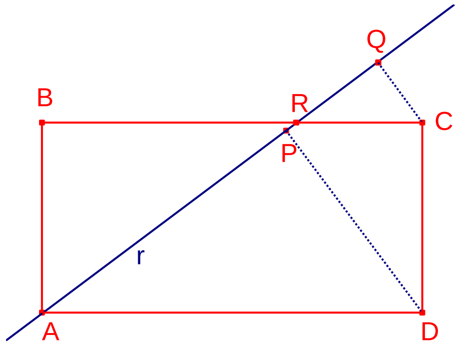
Resolent l'equació:

$n=10$.

1158.- La recta r passa pel vèrtex A d'un rectangle ABCD. La distància de C a la recta r és 2, i la distància des del punt D a la recta r és 6.
Si la longitud del costat $\overline{AD}$ és el doble que la longitud del costat $\overline{AB}$, quina és la longitud del costat $\overline{AD}$.
Proves Cangur 2014, nivell 4, problema 22.



Solució:
Siga $\overline{AD}=2a$, $\overline{AB}=a$.
Siga P la projecció de D sobre r.
Siga Q la projecció de C sobre r.
$\overline{DP}=6$, $\overline{CQ}=2$.
Siga R la intersecció de la recta r i el costat $\overline{BC}$.
Siga $\overline{RC}=x$.
$\overline{BR}=2a-x$.

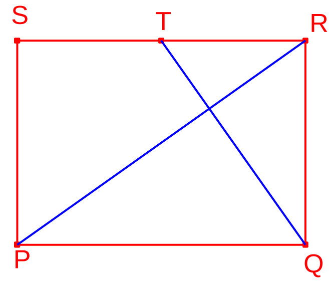


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectengle $\overset{\Delta}{ABR}$:
$\overline{AR}=\sqrt{a^2+(2a-x)^2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APD}$, $\overset{\Delta}{RQC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{2a}{6}=\frac{x}{2}$.
$x=\frac{2}{3}a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APD}$, $\overset{\Delta}{RBA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{2a}{6}=\frac{\sqrt{a^2+(2a-x)^2}}{a}$.
$\frac{a}{3}=\frac{\sqrt{a^2+\left(2a-\frac{2}{3}a\right)^2}}{a}$. Resolent l'equació:
$a=5$.
$\overline{AD}=2a=10$.

1159.- PQRS és un rectangle i T és el punt mig del costat $\overline{RS}$.



El segment $\overline{QT}$ és perpendicular a la diagonal $\overline{PR}$.

Calculeu la raó $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$.

Proves Cangur 2014, nivell 4, problema 19.

Solució:

Siga $\overline{PQ} = a$, $\overline{QR} = b$.

$\overline{RT} = \dfrac{a}{2}$.

$\angle QPR = \angle RQT$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{QRT}$ són semblants.

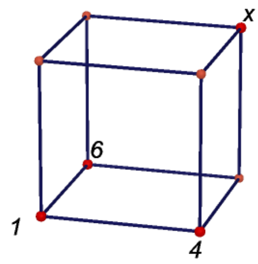
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{b}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

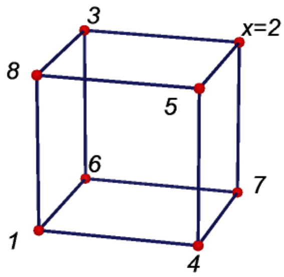
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

1160.- Hem numerat els vèrtexs d’un cub de l’1 al 8, de manera que el resultat obtingut si sumem els quatre nombres dels vèrtexs d’una cara és el mateix per a totes les cares.



Els nombres 1, 4, 6 ja estan posats sobre alguns vèrtexs, com mostra la figura.
Quin és valor de x?.
Proves Cangur 2014, nivell 4, problema 17.

Solució:
Cada vèrtex del cub apareix en 3 cares.
La suma de les sumes de totes les cares és:
$S = 3(1+2+3+4+5+6+7+8) = 108$.
Aleshores cada cara suma:
$\frac{108}{6} = 18$.
L’únic resultat possible completant cares és:



Aleshores, $x = 2$.