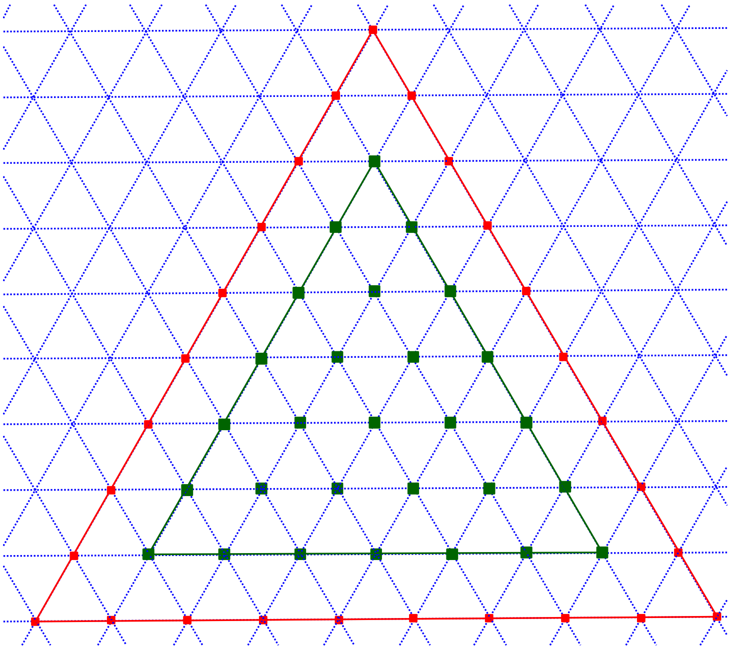
Problemes de Geometria per a l'ESO 117

1161.- En una trama equilàtera (formada per triangles equilàters) es dibuixa un triangle equilàter.
Dins del triangle hi ha 5995 punts de la trama.
Quants punts hi ha en el perímetre del triangle.
KöMaL, K410.

Solució:



Els punts interiors formen un triangle equilàter.
Siga n els punts que formen el costat del triangle interior.
En el triangle inicial cada costat conté $n+3$ punts.

La suma dels punts interior al triangle inicial és:

$$S_n = 1+2+3+....+n = \frac{1+n}{2}n .$$

$$\frac{1+n}{2}n = 5995 .$$

$$n^2 + n - 11990 = 0 .$$

$$n = 109 .$$

La suma de tots els punts del triangle inicial (el perímetre i l'interior) és:

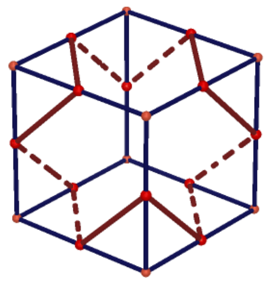
$$S_{n+3} = \frac{1+n+3}{2}(n+3) .$$

$$S_{112} = \frac{1+112}{2}112 = 6328 .$$

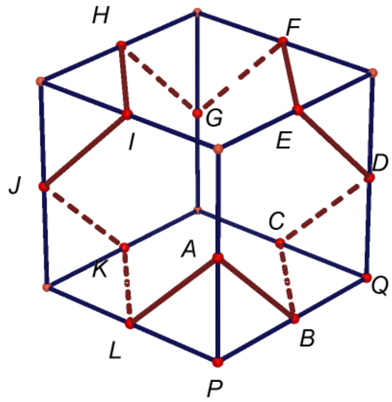
Els punts del perímetre del triangle inicial és:

$$S_{n+3} - S_n = 6328 - 5995 = 333 .$$

1162.- La figura següent, mostra una línia poligonal tancada, que té per vèrtexs els punts mitjans de les arestes d'un cub.
Per cada vèrtexs dels dos angles que formen els dos segment de la poligonal que hi conflueixen, considerem l'angle més petit de 180º.
Quant sumen tots aquests angles?.
Proves Cangur 2014. Nivell 4, problema 28.



Solució:
Considerem la línia poligonal ABCDEFGHIJKL
Notem que els angles A, C, E, G, I, i K són iguals.
Notem que els angles B, D, F, H, J i L són iguals.



Siga $\overline{PQ} = a$ l'aresta del cub.

$$\overline{AB} = \overline{AL} = \overline{BL} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{LBA}$ és equilàter.
Per tant, $A = 60^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQC}$:

$$\overline{PC} = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{AC} = a\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\cos B.$$

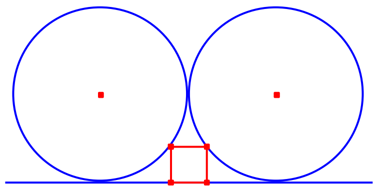
$$\cos B = -\frac{1}{2}.$$

$B = 120^{\circ}$.
La suma dels angles que forma la línia poligonal és:
$6A + 6B = 6\cdot 60^{\circ} + 6\cdot 120^{\circ} = 1080^{\circ}$.

1163.- Un quadrat s'ajusta perfectament entre la línia horitzontal i dos cercles tangents de radi 1.

Quina és la longitud del costat?

Proves Cangur 2014. Nivell 4, problema 30.



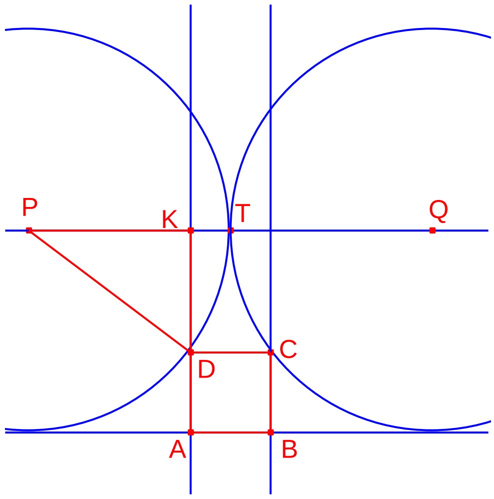
Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$

Siguen P, Q els centre de les circumferències.

Siga T el punt de tangència de les circumferències.

Siga K la projecció de A sobre la recta PQ.



$\overline{PD} = \overline{AK} = \overline{PT} = 1$.

$\overline{PQ} = 2$.

$\overline{KT} = \frac{1}{2}c$, $\overline{KD} = 1 - c$.

$\overline{PK} = 1 - \frac{1}{2}c$.

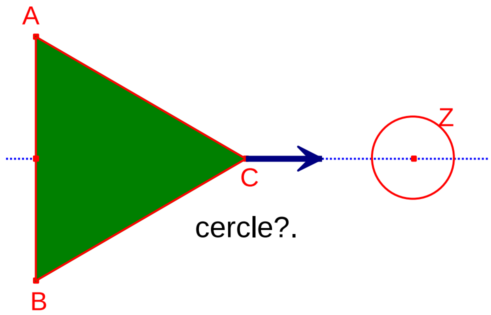
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKD}$:

$$1^2 = (1-c)^2 + \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2.$$

Resolent l'equació:

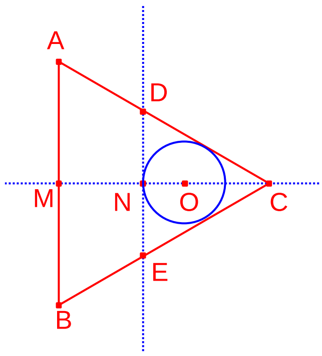
$$c = \frac{2}{5}.$$

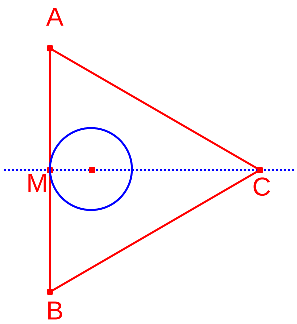
1164.- Un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ es mou a una velocitat d'1cm/s d'esquerra a dreta.
El cercle Z no és mou.
L'altura del triangle mesura 5cm i el radi del cercle 1cm.
Durant quant segons el triangle cobreix completament el cercle?.



Proves Cangur 2014. Nivell 4, problema 18.

Solució:





El triangle començarà a cobrir el cercle quan els costat $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ siguen tangents al cercle.
El triangle acabarà de cobrir el cercle quan el costat $\overline{AB}$ siga tangent al cercle.

El temps en què el triangle cobreix el cercle és igual al temps que tarda en recórrer el segment $\overline{MN}$.
Siga O el centre del cercle.

El cercle de radi 1 éstà inscrit en el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEC}$.

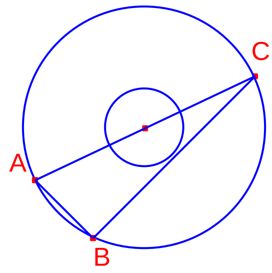
O és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{DEC}$.

$\overline{NC} = 3\overline{NO} = 3$.

$\overline{MN} = \overline{MC} - \overline{NC} = 5 - 3 = 2\text{cm}$.

La velocitat del triangle és 1 cm/s.
Per recórrer 2cm tardarà 2s.

1165.- Els radis de dues circumferències concèntriques estan en proporció 1:3.



El segment $\overline{AC}$ és diàmetre de la circumferència gran.

$\overline{BC}$ és una corda de la circumferència gran que és tangent a la circumferència petita, i la longitud de $\overline{AB} = 12$.

Quin és el radi de la circumferència gran.

Proves Cangur 2014. Nivell 4, problema 13.

Solució:

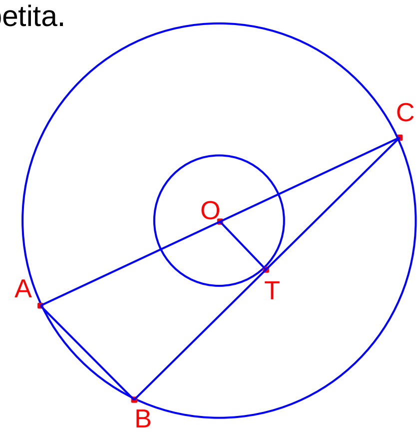
Siga O el centre de les dues circumferències.

Siga T el punt de tangència de la recta BC i la circumferència petita.

Per ser angle inscrit i abraçar el diàmetre $\angle ABC = 90^{o}$.

$\angle OTC = 90^{o}$.

Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència gran.



$\overline{OT} = \frac{1}{3}R$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{OTC}$ són semblants.

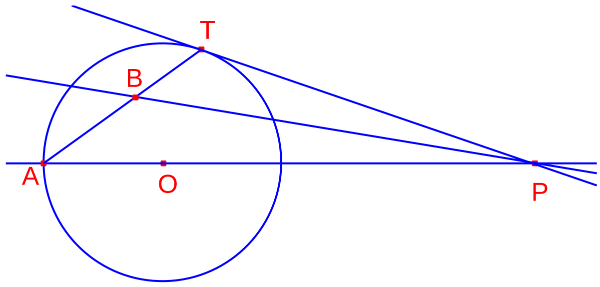
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OC}}$.

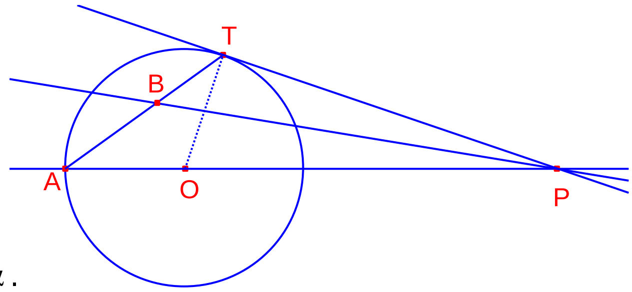
$\frac{12}{2R} = \frac{\frac{1}{3}R}{R}$. Resolent l'equació:

$R = 18$.

1166.- En la figura , la recta PT és tangent a la circumferència de centre O, i PB és bisectriu de l'angle $\angle TPA$.
Quant val l'angle $\angle ABP$.
Proves Cangur 2014. Nivell 3, problema 17.



Solució:



Siga $\alpha = \angle APB = \angle BPT$.

Per ser T punt de tangència, $\angle OTP = 90^o$.

$\angle AOT = \angle OTP + OPT = 90^o + 2\alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{AOT}$ és isòsceles, aleshores:

$$\angle TAO = \frac{180^o - \angle AOT}{2} = \frac{180^o - (90^o + 2\alpha)}{2} = 45^o - \alpha .$$

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és 180º, aleshores:

$\angle ABP = 180^o - (\angle APB + BAP) = 180^o - (\alpha + 45^o - \alpha) = 135^o$.

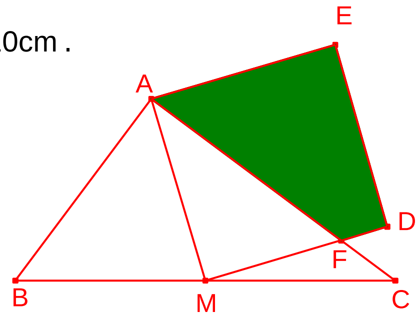
1167.- $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle amb $\overline{AB} = 6cm$, $\overline{AC} = 8cm$, $\overline{BC} = 10cm$.

M és el punt mig de $\overline{BC}$.

AMDE és quadrat i F és el punt de tall de MD i AC.

Calculeu l'àrea del quadrilàter AFDE expressada en cm^2.

Proves Cangur 2014. Nivell 3, problema 29.



Solució:

$6^2 + 8^2 = 10^2$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $A = 90^{o}$.

Per ser el triangle rectangle la mitjana sobre la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa.

$\overline{AM} = \overline{CM} = 5$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AMC}$ és isòsceles, $\angle MCA = \angle MAF$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FMA}$ són semblants (tenen els angles iguals).

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

$$\frac{\overline{MF}}{5} = \frac{6}{8}.$$

$$\overline{MF} = \frac{30}{8}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FMA}$ és:

$$S_{FMA} = \frac{1}{2}\overline{MF} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{2}\frac{30}{8}5 = \frac{75}{8}.$$

L'àrea del quadrat AMDE és:

$$S_{AMDE} = \overline{AM}^2 = 5^2 = 25.$$

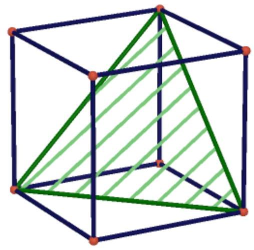
L'àrea del quadrilàter AFDE és:

$$S_{AFDE} = S_{AMDE} - S_{FMA} = 25 - \frac{76}{8} = \frac{125}{8}.$$

1168.- Tres vèrtexs qualsevol d'un cub formen un triangle.

De tots aquests triangles, quants n'hi ha que no tenen tots els vèrtexs en la mateixa cara del cub.
Proves Cangur 2014. Nivell 3, problema 26.

Solució:
Per dibuixar qualsevol triangle amb els vèrtex d'un cub, almenys un dels costats del triangles és una diagonal d'una cara del cub. Fixada una diagonal d'una cara per dibuixar un triangle que no estiga sobre una cara, el tercer vèrtex ha de ser qualsevol de la cara oposada a la que conté la diagonal del cub.



Hi ha 12 diagonals distintes de les cares de les cares aleshores, el nombre de triangles distints és:
$12 \cdot 4 = 48$.

1169.- Un rectangle té costats de longituds 6cm i 11cm.

Les bisectrius dels angles dels extrems d'un costat llarg tallen el costat oposat en tres parts.
Calculeu les longituds aquestes tres parts.
Proves Cangur 2014. Nivell 2, problema 17.

Solució:

Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB} = 11$, $\overline{AD} = 6$.

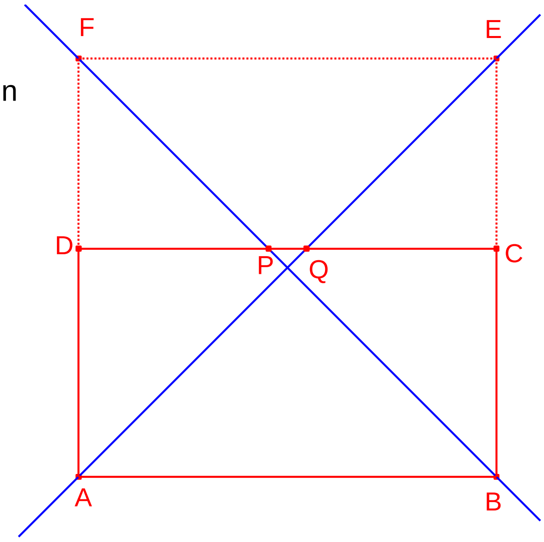
Les bisectrius dels vèrtexs A, B tallen el costat $\overline{CD}$ en els punts P, Q.
Construïm el quadrat ABEF de costat 11.
Les rectes AQ, BP, són diagonals del quadrat ABEF.

$\overline{DF} = 5$.

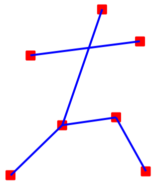
El triangle $\overset{\Delta}{DPF}$ és rectangle i isòsceles:

$\overline{DP} = \overline{CQ} = 5$.

$\overline{PQ} = 1$.



1170.- En la figura hi ha indicats 7 punts units per segments.



En Sergi vol afegir uns quants segments entre aquests punts, de manera que cada punt isquen el mateix nombre de segments.
Quin nombre mínim de segments que ha de dibuixar en Sergi.
Proves Cangur 2014. Nivell 3, problema 22.

Solució:
Hi ha un vèrtex que té 3 segments.
Si de cada vèrtex ixen 3 segments el total de segment seria:

$$\frac{7\cdot 3}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Si de cada vèrtex ixen 4 segments el total de segments seria:

$$\frac{7\cdot 4}{2} = 14.$$

Com hi ha 5 segments ens caldrien 9 segments.

Una possible solució: