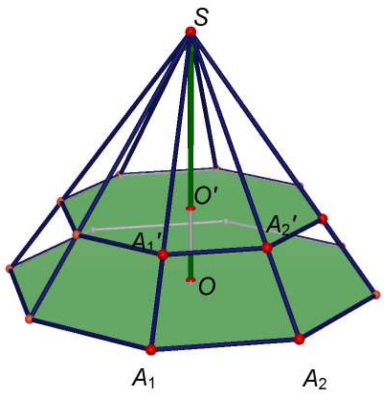
Problemes de Geometria per a l'ESO 118

1171.- L'altura d'una piràmide regular és h.
A quina distància de la base hem de traçar un plànol paral·lela a la base a fi que que l'àrea lateral reste dividida en dues parts d'igual àrea.

Solució:
Siga una piràmide regular n-gonal $A_1A_2A_3...A_nS$ de vèrtex S.
Siga O el centre de la base.
Siga $\overline{OS} = h$, altura de la piràmide.
El plànol que cerquem talla la piràmide en les punts:
$A'_1, A'_2, A'_3, ..., A'_n$.
El plànol talla l'altura $\overline{OS}$ en el punt O'.



Els triangles isòsceles $A_1\overset{\Delta}{A_2}S$, $A'_1\overset{\Delta}{A'_2}S$ són semblants i les àrees estan en proporció 2:1.

$$\left(\frac{\overline{A'_1S}}{\overline{A_1S}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, $\frac{\overline{A'_1S}}{\overline{A_1S}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Els triangles $A_1\overset{\Delta}{O}S$, $A'_1\overset{\Delta}{O'}S$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

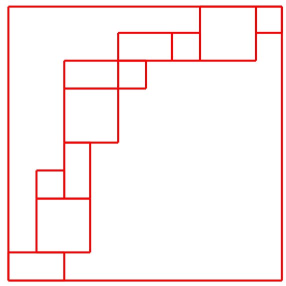
$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{A'_1S}}{\overline{A_1S}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{SO'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{SO} = \frac{\sqrt{2}}{2}h.$$

$$\overline{OO'} = \overline{SO} - \overline{SO'} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\overline{OS} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}h.$$

Nota: En aquest cas les àrees laterals i les àrees totals de les dues piràmides estan en proporció 2:1.

1172.- Uns quants quadrats, de dues mides diferents, i un rectangles tots iguals estan col·locats en un quadrat de costat 10cm com es veu en la figura.



Calculeu l'àrea dels rectangles.

Proves Cangur 2014. Nivell 2, problema 14.

Solució:

Siga x el costat del quadrat menut.

Siga y el costat del quadrat gran.

Notem que els costats del rectangle són x, y.

Notem que $y = 2x$.

El costat del quadrat inicial és 10cm:

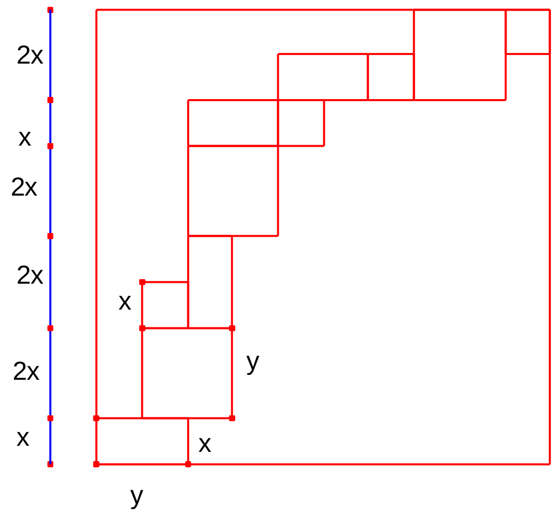
$10x = 10$. Resolent l'equació:

$x = 1$.

$y = 2x = 2$.

L'àrea del rectangle és:

$S = xy = 1 \cdot 2 = 2cm^2$.



1173.- Les columnes de la "fuente de colores" de l'avinguda del Arrabal de Requena són prismes de base un quadrat seccionats.

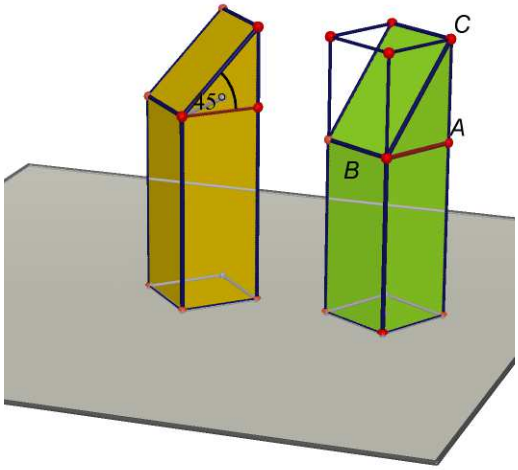
L'angle que forma la secció és de 45º i forma un rectangle DIN A.
Sota quin angle la secció tallada formarà un rectangle auri?.

Solució:
Evidentment, si l'angle és de 45º i l'aresta de la base del prisma és a, aleshores, el costat major del rectangle que forma la secció és $a\sqrt{2}$, per tant el rectangle és de format DIN A.

Siga $\alpha = \angle ABC$ l'angle que forma la secció i el plànol de la base:
Siga $\overline{AB} = a$.
Si la secció a de tenir proporció àurea:
$\overline{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

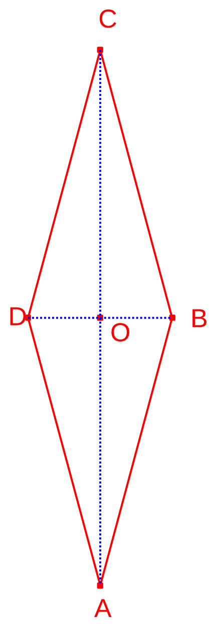
$$\cos\alpha = \frac{a}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 51º49'38''.$$



1174.- Un rombe té àrea la meitat de l'àrea del quadrat del mateix costat.

Calculeu la proporció entre les diagonals del rombe.



Solució:
Siga el rombe ABCD de costat $\overline{AB} = c$.
Siga $\overline{AC} = a$, $\overline{BD} = b$, les diagonals del rombe. $a > b$.
Siga O la intersecció de les diagonals del rombe.
L'àrea del rombe és:

$$S_{ABCD} = \frac{ab}{2}.$$

L'àrea del rombe és igual a la meitat del quadrat de costat c:

$$\frac{ab}{2} = \frac{1}{2}c^2.$$

$$ab = c^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

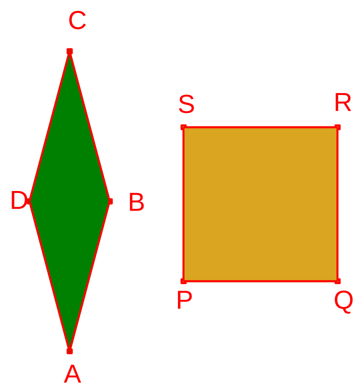
$$ab = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

$$a^2 - 4ab + b^2 = 0.$$

Dividint l'expressió per b^2:

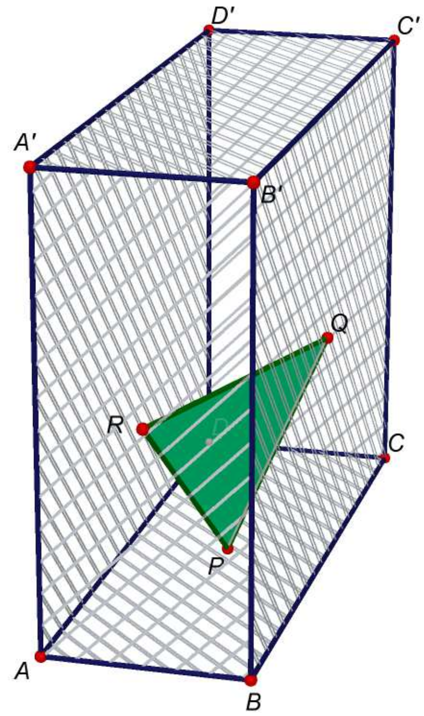
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b} + 1 = 0$. Resolent l'equació:

$$\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}.$$



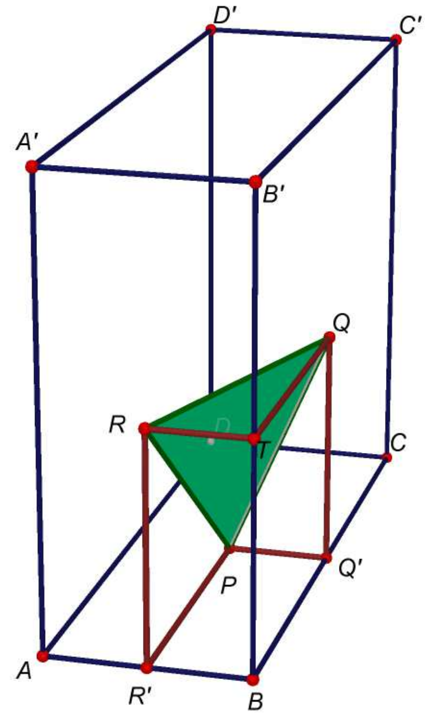
1175.- Tres cares d'una ortoedre tenen un punt comú que és un vèrtex de l'ortoedre.

Els centres de les tres cares són els vèrtexs d'un triangle tal que els costats mesuren 4, 5 i 6cm.
Determineu el volum de l'ortoedre.



Solució:

Siga l'ortoedre ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BB'}=c$.
Siga P el centre de la cara ABCD.
Siga Q el centre de la cara BCC'B'.
Siga R el centre de la cara ABB'A'.
Siga $\overline{PQ}=4$, $\overline{QR}=5$, $\overline{PR}=6$.



Siga Q' la projecció de Q sobre $\overline{BC}$, $\overline{QQ'}=\frac{1}{2}c$, $\overline{PQ'}=\frac{1}{2}a$.

Siga R' la projecció de R sobre $\overline{AB}$, $\overline{RR'}=\frac{1}{2}c$, $\overline{PR'}=\frac{1}{2}b$.

Siga T la projecció de R sobre $\overline{BB'}$, $\overline{BT}=\frac{1}{2}c$, $\overline{RT}=\frac{1}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQ'Q}$:

$$4^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PR'R}$:

$$6^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RTQ}$:

$$5^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

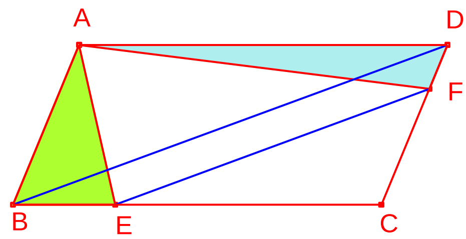
Resolent el sistema format per les tres expressions:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQ'Q}$:

$\begin{cases} a=\sqrt{10} \\ b=\sqrt{90} \\ c=\sqrt{54} \end{cases}$. El volum de l'ortoedre:

$$V=abc=\sqrt{10}\sqrt{90}\sqrt{54}=90\sqrt{6}\approx 220.45\text{cm}^3.$$

1176.- Siga ABCD un paral·lelogram.



Siga un punt qualsevol E del costat $\overline{BC}$.

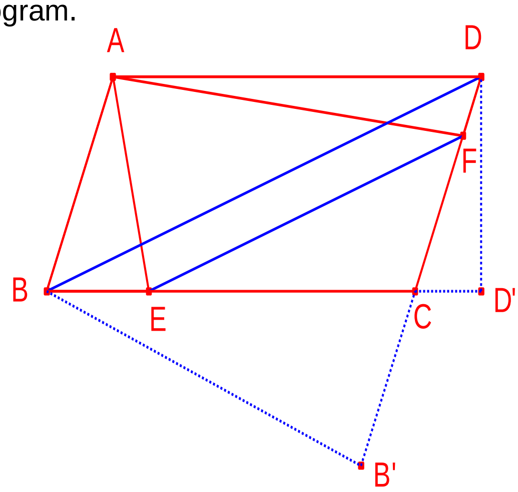
Siga F del costat $\overline{CD}$ tal que el segment $\overline{EF}$ és paral·lel a la diagonal $\overline{BD}$.

Proveu que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{ADF}$ són iguals.

Solució:

Siga $\overline{BC} = \overline{AD} = a$, $\overline{AB} = \overline{CD} = b$ costats del paral·lelogram.

Siga $\overline{BE} = x$..



Siga D' la projecció de D sobre la recta BC.

Siga $\overline{DD'} = h$ altura del paral·lelogram ABCD sobre el costat $\overline{BC}$.

L'àrea del paral·lelogram ABCD és:

$S_{ABCD} = ah$.

Siga B' la projecció de B sobre la recta CD.

Siga $\overline{BB'} = h'$ altura del paral·lelogram ABCD sobre el costat $\overline{CD}$.

L'àrea del paral·lelogram ABCD és:

$S_{ABCD} = bh'$.

Aleshores, $h' = \frac{a}{b}h$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ECF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DF}}{\overline{BE}} = \frac{b}{a}$. Aleshores, $\overline{DF} = \frac{b}{a}x$

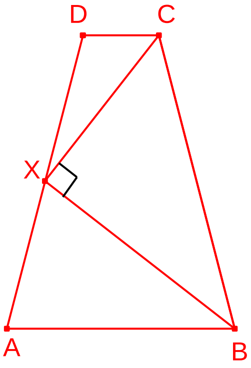
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$S_{ABE} = xh$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és:

$S_{ADF} = \overline{DF} \cdot h' = \frac{b}{a}x \cdot \frac{a}{b}h = xh = S_{ABE}$.

1177.- ABCD és un trapezi isòsceles, i X és el punt mig del costat $\overline{AD}$.

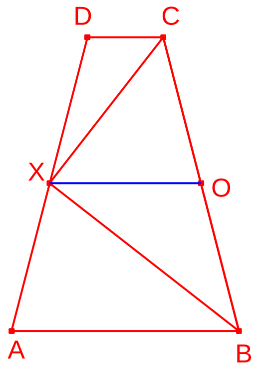


Si $\overline{AX}=1$ i el triangle $\overset{\Delta}{XBC}$ és rectangle en X.
Calculeu el perímetre del trapezi ABCD.
Concurso de Primavera, 1ª fase 2014. Nivell 4. Problema 21.

Solució:

$\overline{AD}=\overline{BC}=2\cdot\overline{AX}=2$.

En un triangle rectangle La mitjana sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa.



Siga O el punt mig de $\overline{BC}$.

$\overline{XO}=1$.

$\overline{XO}$ és paral·lela mitjana del trapezi, aleshores:

$\overline{XO}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)$.

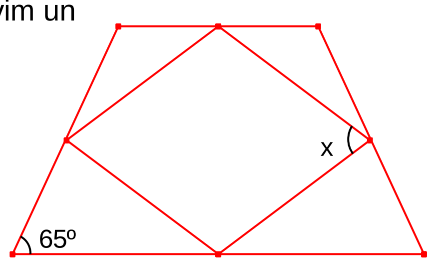
$\overline{AB}+\overline{CD}=2\cdot\overline{XO}=2$.

El perímetre del trapezi és:

$2\cdot\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{CD}=2\cdot2+2=6$.

1178.- En un trapezi isòsceles amb tres costats iguals inscrivim un rombe.

Si l'angle agut del trapezi mesura 65º, calculeu la mesura de l'angle agut x del rombe.
Concurso de Primavera, 1ª fase 2014. Nivell 3. Problema 2.



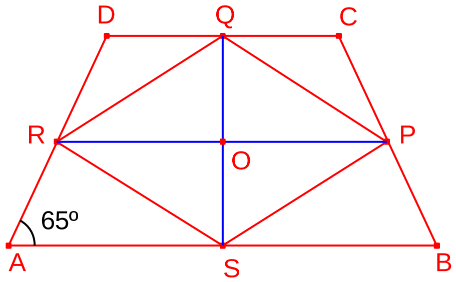
Solució:

Siga el trapezi ABCD tal que $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC}$.

Siga el rombe PQRS.

$x = \angle QPS$.

Siga O el centre del rombe.



$\overline{OS} = \overline{OQ}$, $\overline{OP} = \overline{OQ}$, aleshores:

RP és la paral·lela mitjana del trapezi.

$\angle BCD = 180º - \angle ABC = 115º$.

$\angle RPC = \angle ABC = 65º$.

$\overline{CP} = \overline{CQ}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CPQ}$ és isòsceles.

$\angle QPC = \frac{1}{2}(180º - \angle PCQ) = \frac{1}{2}65º$.

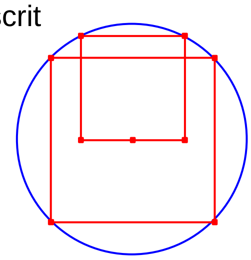
$\angle OPQ = \frac{1}{2}x$.

$\angle OPQ = \angle OPC - \angle QPC$.

$\frac{1}{2}x = 65º - \frac{1}{2}65º$. Resolent l'equació:

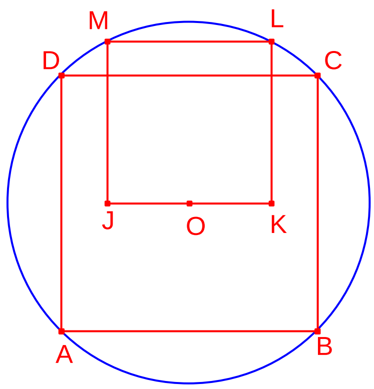
$x = 65º$.

1179.- En l'interior d'una circumferència es dibuixen dos quadrats: l'inscrit i un altre amb dos vèrtexs en la circumferència i un dels costats passant pel centre, com mostra la figura.



Calculeu la proporció entre les àrees del quadrat gran i menut.
Concurso de Primavera, 2ª fase 2014. Nivell 3. Problema 22.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.
Siga ABCD el quadrat inscrit.
Siga JKLM el quadrat amb el costat $\overline{JK}$ que passa pel centre.
Siga $\overline{AB} = a$ costat del quadrat inscrit.
Siga $\overline{JK} = b$ costat de l'altre quadrat.
$\overline{AC} = 2r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$2a^2 = 4r^2$.

$a^2 = 2r^2$.

$\overline{OK} = \frac{1}{2}b$, $\overline{KL} = b$, $\overline{OL} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$:

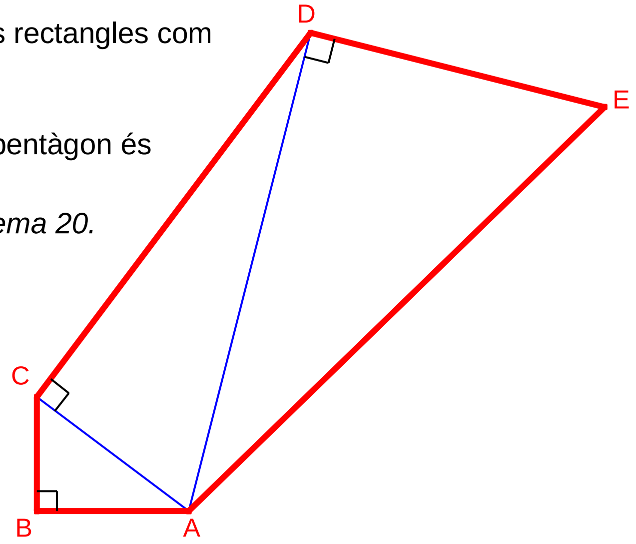
$$\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + b^2 = r^2.$$

$$b^2 = \frac{4}{5}r^2.$$

La proporció entre les àrees dels dos quadrats és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{2r^2}{\frac{4}{5}r^2} = \frac{5}{2}.$$

1180.- El pentàgon ABCD està dividit en tres triangles rectangles com mostra la figura.



Si $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{BC} = 3\text{cm}$, $\overline{Cd} = 12$ i el perímetre del pentàgon és 188cm, determineu la seua àrea.

Concurso de Primavera, 2ª fase 2014. Nivell 3. Problema 20.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$\overline{AD} = 13$.

Siguen $\overline{AE} = a$, $\overline{DE} = b$.

El perímetre del pentàgon és 188:

$3 + 4 + 12 + a + b = 188$. Simplificant:

$a + b = 169$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$a^2 = b^2 + 13^2$.

$(a + b)(a - b) = 169$ (2)

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$a - b = 1$ (3)

Considerem el sistema format per les expressions (1) (3):

$\begin{cases} a + b = 169 \\ a - b = 1 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a = 85 \\ b = 84 \end{cases}$.

L'àrea del pentàgon ABCDE és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACD}$, $\overset{\Delta}{ADE}$:

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2}(3 \cdot 4) + \frac{1}{2}(5 \cdot 12) + \frac{1}{2}(13 \cdot 84) = 582\text{cm}^2.$$